Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
Факультет вычислительной математики и кибернетики

«УТВЕРЖДАЮ»
Декан факультета ВМК МГУ,
академик РАН

/Соколов И.А./

«_____» __________2022 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

(для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре)

1.1.5 -«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Программа утверждена
Ученым советом факультета
(протокол № 4 от 28 апреля 2022 г.)

Москва-2022

I. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа предназначена для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 1.1.5 «математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» и содержит основные темы и вопросы к экзамену, список литературы к основной и дополнительной частям и критерии оценивания.

II. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ И ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Основная часть

1. Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Равномерная непрерывность. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Арцела.

2. Функции многих переменных. Полный дифференциал, и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

3. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формулы трапеций и Симпсона, оценки погрешностей. Понятие о методе Гаусса.

4. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости (Коши, Даламбера, интегральный, Лейбница).

5. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов ряда. Теорема Римана. Умножение рядов.

6. Ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).

7. Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость по параметрам и ее признаки. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.

8. Мера множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега и его основные свойства.

9. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов (почленное интегрирование и дифференцирование). Разложение элементарных функций.

10. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

11. Элементарные функции комплексного переменного , , и даваемые ими

конформные отображения. Простейшие многозначные функции ,$Ln(z)$.

12. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

13. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты. Основная теорема о вычетах и ее применение.

14. Линейные преобразования. Квадратичные формы. Приведение их к каноническому виду линейными преобразованиями в комплексной и действительной областях. Закон инерции.

15. Линейная зависимость и независимость векторов. Ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.

16. Характеристический многочлен линейного преобразования векторного пространства. Собственные числа и собственные векторы. Свойства собственных чисел и векторов симметрических матриц. Понятие о методе ортогональных вращений решения полной проблемы собственных значений.

18. Итерационные методы решения уравнения (хорд, Ньютона). Принцип сжатых отображений в полных метрических пространствах и его применение.

19. Линейные операторы, норма линейного оператора. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (методы простой итерации и Зейделя).

20. Гильбертово пространство. Линейные и билинейные функционалы в гильбертовом пространстве. Линейные уравнения с вполне непрерывным оператором.

21. Интегральные уравнения Фредгольма 2-ого рода. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения с симметричным ядром.

22. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональной системе функций, неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье. Достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе функций. Влияние гладкости функции на порядок коэффициентов Фурье.

23. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, системы уравнений первого порядка и уравнения n-ого порядка.

24. Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная независимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Общее решение неоднородного уравнения.

25. Устойчивость по Ляпунову решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема об устойчивости по первому приближению. Второй метод Ляпунова.

27. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

Вариационная задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.

28. Градиентные методы поиска экстремума.

29. Формализация понятия алгоритма (машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова). Алгоритмическая неразрешимость.

30. Структура и состав вычислительной системы (аппаратура + программное обеспечение). Физические и виртуальные ресурсы. Управление ресурсами в вычислительной системе. Потоки управляющей информации и данных в вычислительной системе. Проблемы дисбаланса производительности компонентов вычислительной системы и аппаратно-программные решения, предназначенные для сглаживания этого дисбаланса. Кеширование информационных потоков в вычислительной системе.

31. Архитектура многопроцессорных вычислительных систем. Графовая модель представления параллельных алгоритмов. Принципы построенияпараллельных программ с использованием технологий MPI и OpenMP. Показатели качества параллельных программ. Закон Амдала, его следствия.

32. Операционные системы, основные функции. Типы операционных систем. Организация управления и взаимодействия процессов в операционной системе. Модели и средства синхронизации. Программирование взаимодействующих процессов. Модели организации и управления ОЗУ.

33. Парадигмы программирования (функциональное, императивное, объектно-ориентированное программирование).

34. Базы данных. Основные понятия реляционной модели данных. Реляционная алгебра. Средства языка запросов SQL.

35. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

36. Схемы из функциональных элементов и простейшие алгоритмы их синтеза. Оценка сложности схем, получаемых по методу Шеннона.

2. Дополнительная часть

1. Вопросы независимости, непротиворечивости и дедуктивной полноты на примере исчисления высказываний, теорема дедукции.

2. Группы. Подгруппы, смежные классы, разложение группы по подгруппе, теорема Лагранжа. Нормальные подгруппы, фактор-группы. Гомоморфизм групп, теорема о гомоморфизме групп.

3. Перестановки. Симметрическая группа перестановок. Теорема Кэли о конечных группах.

4. Кольца, поля. Кольцо многочленов. Деление с остатком многочленов над полем, алгоритм Евклида. Неприводимые многочлены над полем, критерий неприводимости многочленов степени 2 и 3, разложение многочлена над

полем в произведение неприводимых многочленов.

5. Алгоритм Евклида поиска наибольшего общего делителя целых чисел. Решение линейных уравнений в целых числах.

6. Функции алгебры логики. Полнота в алгебре логики, критерий полноты Поста.

7. Функции многозначной логики. Полнота в k-значной логике. Алгоритм распознавания полноты в k-значной логике. Теорема Кузнецова. Критерий Слупецкого.

8. Графы, деревья. Основные свойства деревьев.

9. Планарность графов, теорема Эйлера. Критерий планарности Понтрягина-Куратовского.

10. Конечные автоматы, эксперименты с автоматами, теорема Мура.

11. Машины Тьюринга и рекурсивные функции, совпадение классов частично рекурсивных функций и функций, вычислимых на машинах Тьюринга.

12. Классы P и NP, NP-полные задачи. Теорема Кука об NP-полноте задачи выполнимости конъюнктивных нормальных форм.

III. РЕФЕРАТ ПО ИЗБРАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ

Реферат по избранному направлению подготовки представляет собой обзор литературы по теме будущего научного исследования и позволяет понять основные задачи и перспективы развития темы будущей диссертационной работы. Реферат включает титульный лист, содержательную часть, выводы и список литературных источников. Объем реферата 10-15 страниц машинописного текста. В отзыве к реферату предполагаемый научный руководитель дает характеристику работы и рекомендуемую оценку, входящую в общий экзаменационный балл.

IV. ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

Вопрос 1. Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная независимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Общее решение неоднородного уравнения.

Вопрос 2. Функции алгебры логики. Полнота в алгебре логики, критерий полноты Поста.

Вопрос 3. Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

V. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. К основной части

1. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа (ч. 1, ч. 2). М.: Физматлит, 2005 (ч. 1), 2002 (ч. 2).

2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, часть 1 и часть 2. М.: Дрофа, 2003 (ч. 1), 2004 (ч. 2).

3. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.

4. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.

5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2009.

6. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2008.

7. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. Изд-во МЦНМО, 1998.

8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2006.

9. Колмолгоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.

10. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. М.: ГИТТЛ, 1956.

11. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.

12. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2004.

13. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2009.

14. Эльсгольц Л.З. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.

16. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

17. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматлит, 2009.

18. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т. 1, т. 2. М.: ГИФМЛ, 1962 (т. 1), 1959 (т. 2).

19. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.

20. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

21. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1 и т. 2. М.: Мир, 1964 (т. 1) и 1967 (т. 2).

22. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

23. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая Школа, 2001.

24. Алексеев В.Б. Дискретная математика. М.: Инфра-М, 2021.

25. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. М.: Издательский отдел ф-та ВМК МГУ, 2004.

26. Мальцев А.И. Алгоритмы и вычислимые функции. М.: Наука, 1986.

27. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

28. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002.

29. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

30. КоруховаЛ.С., Шура-Бура М.Р. Введение в алгоритмы. Учебное пособие для студентов 1 курса, 2-е исправленное издание. М.: МАКС Пресс, 2010, http://sp.cmc.msu.ru/info/1/vvedalg.pdf

31. Таненбаум Э., Остин Т. Архитектура компьютера. Спб: Питер, 2013.

32. Столингс У. Операционные системы. М.: Вильямс, 2002.

33. Таненбаум Э., Бос Х. Современные операционные системы. СПб: Питер, 2015.

34. Пратт Т., Зелкович М. Языки программирования. Разработка и реализация. СПб: Питер, 2002.

35. Кауфман В.Ш. Языки программирования. Концепции и принципы. М.: ДМК-Пресс, 2010.

36. Дейт К. Введение в системы баз данных. М.: Вильямс, 2006.

37. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. Спб: БХВ-Петербург, 2002.

38. Антонов А.С. Технологии параллельного программирования MPI и OpenMP: Учеб пособие. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2012.

2. К дополнительной части

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.

2. Алексеев В.Б. Дискретная математика. М.: Инфра-М, 2021.

3. Алексеев В.Б. Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2002.

4. Марченков С.С. Избранные главы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2016.

5. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. Изд. 2. М.: Наука, 1986.

6. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., Наука, 1981.

7. Тыртышников Е.Е. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2017.

8. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. т. 1. М.: Мир, 1988.

9. Метакидес Г., Нероуд А. Принципы логики и логического программирования. М.: Факториал пресс, 1998.

10. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

V. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Уровень знаний поступающих в аспирантуру МГУ оценивается по десятибалльной шкале. При отсутствии поступающего на вступительном экзамене в качестве оценки проставляется неявка. Результаты сдачи вступительных экзаменов сообщаются поступающим в течение трех дней со дня экзамена путем их размещения на сайте и информационном стенде структурного подразделения. Вступительное испытание считается пройденным, если абитуриент получил семь баллов и выше.

VI. АВТОРЫ

1. Алексеев Валерий Борисович, д.ф.-м.н., профессор
2. Селезнева Светлана Николаевна, д.ф.-м.н., профессор