1. Алгебра

1.1. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета

Определение 1. Квадратным трехчленом называется выражение

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

где $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ — постоянные числа, $x \in R$ — переменная, a, b и c называются *коэффициентами.*

Определение 2. Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$f(x) = 0 \quad \text{или} \quad ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0,\ a, b, c \in R). \tag{2}$$

Определение 3. Корнем (решением) квадратного уравнения, а также корнем квадратного трехчлена (1) называется такое число $x_0 (x_0 \in R)$, для которого $f(x_0) = 0$ или ${ax_0}^2 + bx_0 + c = 0$ — верное числовое равенство.

Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трехчлена $f(x)$ (квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

Если $a = 1$, то квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0 \tag{3}$$

называется *приведенным.* Его дискриминант $D = p^2 - 4q$.

Теорема 1. А) Если $D \geqslant 0$, то квадратное уравнение (2) имеет корни $x_1,\ x_2 \in R$, определяемые формулой:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

или формулами:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ , \tag{5}$$

$\sqrt{D}$ — арифметический квадратный корень из числа D, причем если $D > 0$, то $x_1 \neq x_2$, то есть уравнение (2) имеет *два различных действительных корня* ; если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = x_0 = -b/2a$ — уравнение имеет *два совпадающих корня* (один действительный корень).

Б) Если $D < 0$, то квадратное уравнение (2) *не имеет действительных корней.*

В случае приведенного квадратного уравнения и $D = p^2 - 4q \geqslant 0$ формулы корней имеют вид

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\ ,\ x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\ .$$

Доказательство. Преобразуем выражение для $f(x)$, применяя метод выделения полного квадрата суммы выражений:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=f(x)\ . \tag{6}$$

А) Если применить при $D \geqslant 0$ формулу разности квадратов, то выражение для квадратного трехчлена преобразуется к виду:

$$f(x)=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 определяются из формулы (5). Так как $a \neq 0$, то $f(x)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=x_1$ или $x=x_2$, в случае А) теорема доказана.

Б) При $D<0$ очевидно, что при любом действительном x выражение, на которое умножается a, в (6) строго положительно, а потому

$\forall\ a>0\ (a<0)\ \Rightarrow\ f(x)>0\ (f(x)<0)$,

следовательно, ни при каком действительном значении x квадратный трехчлен не обращается в 0, стало быть, при $D<0$ квадратное уравнение не имеет действительных корней. Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2 (Виета). Если $D=b^2-4ac \geqslant 0$, соответственно $D=p^2-4q \geqslant 0$, $x_1,\ x_2$ — корни квадратного уравнения (2) или (3), то в случае общего (приведенного) квадратного уравнения

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad (x_1+x_2=-p)\ ; \tag{7}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\quad (x_1\cdot x_2=q)\ . \tag{8}$$

Доказательство. Равенство (7) получается в результате непосредственного сложения равенств (5) для x_1 и x_2; для доказательства (8) почленно умножим равенства (5) для x_1 и x_2, получим, применяя формулу разности квадратов и выражение для дискриминанта D,

$$x_1\cdot x_2=\frac{(-b-\sqrt{D})(-b+\sqrt{D})}{4a^2}=-\frac{D-b^2}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}\ .$$

Теорема Виета доказана.

Замечание. Случай $D=0$ предполагает наличие *двух совпадающих корней* квадратного уравнения.

Рассмотрим случай уравнения вида (с "четным коэффициентом" при x)

$$ax^2+2bx+c=0 \tag{9}$$

Если $D=(2b)^2-4ac=4(b^2-ac)\geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ b^2-ac\geqslant 0$, то формула корней этого уравнения имеет вид

$$x_{1,2}=\frac{-2b\pm\sqrt{(2b)^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b\pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}\ . \tag{10}$$

Теорема 3 (обратная теорема Виета).

Пусть числа x_1, x_2, p, q связаны соотношениями: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$ (см. вторые равенства (7) и (8) (в скобках)), тогда x_1, x_2 — корни приведенного квадратного уравнения (3).

Доказательство. Числа x_1, x_2 и только они являются корнями уравнения $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, которое *равносильно* получающемуся в результате раскрытия скобок, перегруппировки некоторых слагаемых в левой части последнего уравнения с учетом соотношений (7) и (8) в скобках следующему уравнению $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 3 доказана для приведенного квадратного уравнения. Однако доказать ее для общего квадратного уравнения можно точно также (если вместо p будет фигурировать b/a, а вместо q — c/a, $a \neq 0$), получающееся уравнение $x^2 + (b/a)x + c/a = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$. Важно, правда, отметить, что по известным корням x_1 и x_2 квадратного уравнения однозначно определить коэффициенты a, b, c нельзя, поэтому обратную теорему Виета удобно формулировать и доказывать для приведенного квадратного уравнения (у которого $a = 1$, а коэффициенты p и q уже будут однозначно определяться по заданным корням x_1 и x_2).

1.2. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители

Теорема 4. (о разложении квадратного трехчлена на линейные множители).

Если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ неотрицателен, то

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \qquad (11)$$

где x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Доказательство. Преобразуем выражение для $f(x)$, выделяя полный квадрат суммы выражений,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Если применить при $D \geqslant 0$ формулу разности квадратов, то выражение для квадратного трехчлена преобразуется к виду

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 определяются из формулы (5), что и требовалось доказать.

Отметим, что при $D < 0$ разложение на действительные линейные множители невозможно.

Это легко доказать от противного, предполагая, что разложение типа (11) для $f(x)$ возможно, мы получим существование действительного корня у квадратного трехчлена с отрицательным дискриминантом и тем самым придем к противоречию с доказанным выше отсутствием таких корней.

1.3. Свойства квадратичной функции $y = ax^2+bx+c$ и ее график

Определение. Функция вида $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ называется *квадратичной* функцией, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ — постоянные числа, $x \in R$ — переменная.

I. $D[f] = (-\infty, +\infty)$, так как из свойств действительных чисел (строго доказываемых в курсе математического анализа) вытекает, что $\forall x \in R$ однозначно определены произведения $x \cdot x = x^2$, ax^2, bx и суммы $ax^2 + bx$, $(ax^2 + bx) + c = ax^2 + bx + c = f(x)$.

II. $E[f] = [-D/4a, +\infty)$, если $a > 0$ и $E[f] = (-\infty, -D/4a]$, если $a < 0$, где $D = b^2 - 4ac$.

Доказательство. Преобразуем $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} \ .$$

$\forall x \in R \ \Rightarrow \ (x + b/2a)^2 \geqslant 0$, поэтому при $a > 0$ $(a < 0)$ получаем, что $\forall x \in R \ \Rightarrow \ f(x) \geqslant -D/4a$ $(f(x) \leqslant -D/4a)$.

Фиксируем произвольное $y_0 \geqslant -D/4a$ $(y_0 \leqslant -D/4a)$. Рассматривая уравнение $f(x) = y_0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c - y_0 = 0$, откуда $\tilde{D} = b^2 - 4a(c - y_0) = b^2 - 4ac + 4ay_0 = 4a(y_0 + D/4a)$, мы и получим, что если $a > 0$ $(a < 0)$ и $y_0 \geqslant -D/4a$ $(y_0 \leqslant -D/4a)$, то $\tilde{D} \geqslant 0$, поэтому уравнение $f(x) = y_0$ имеет решения, то есть $\exists x_1, \ x_2: \ \ f(x_1) = f(x_2) = y_0$, II доказано.

Следствие. На основе результатов рассуждений этого п. II, получаем важный вывод: на всей области определения квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает при $a > 0$ $(a < 0)$ только неотрицательные (неположительные) значения тогда и только тогда, когда дискриминант $D = b^2 - 4ac \leqslant 0$.

Это утверждение можно применять для доказательства различных неравенств, например, с тригонометрическими выражениями и доказательств утверждений, например, в курсе линейной алгебры и аналитической геометрии.

III. В силу того, что при $a > 0$ $(a < 0)$ имеем: $\forall x \in R \Rightarrow f(x) \geqslant -D/4a$ $(f(x) \leqslant -D/4a)$, вытекает ограниченность квадратичной функции снизу (сверху) на своей области определения. Далее, проводя такие же рассуждения, что и в конце п. II, получаем, что для любого $m_2 \geqslant -D/4a$ ($m_1 \leqslant -D/4a$) найдутся такие значения аргумента x_2 (x_1), при которых, например, $f(x_2) = m_2 + 1 > m_2$ ($f(x_1) = m_1 - 1 < m_1$). А это и означает, что квадратичная функция не ограничена сверху (снизу) на своей области определения.

IV. В силу определений наибольшего и наименьшего значений функции и результатов п. II получаем:
если $a > 0$, то существует $\min\limits_{x\in R} f(x) = -D/4a = f(-b/2a)$,
а если $a < 0$, то существует $\max\limits_{x\in R} f(x) = -D/4a = f(-b/2a)$,
$\max\limits_{x\in R} f(x)$ $(\min\limits_{x\in R} f(x))$ при $a > 0$ $(a < 0)$ не существует. Последние утверждения легко доказываются от противного так же, как неограниченность функции сверху (снизу) при $a > 0$ $(a < 0)$ в п. III.

V. Четность и нечетность.

$D[f]$ — симметрична относительно точки $x_0 = 0$. Исследуем равенство $f(-x) \equiv f(x) \Leftrightarrow a(-x)^2 + b(-x) + c \equiv ax^2 + bx + c \Leftrightarrow 2bx \equiv 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ при $b = 0$ — функция четная, а при $b \neq 0$ — не является четной. Исследуем равенство $f(-x) \equiv -f(x) \Leftrightarrow a(-x)^2 + b(-x) + c \equiv$ $\equiv (-ax^2 - bx - c) \Leftrightarrow 2(ax^2 + c) \equiv 0 \Leftrightarrow x^2 \equiv -\dfrac{c}{a}$, что неверно, так как x — переменная, следовательно, $f(x)$ не является нечетной.

VI. $f(x)$ не является периодической.

Для доказательства предположим, что $\exists\, T_0 \neq 0$ такое, что $\forall x \in R \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x + T_0) = f(x)$ (здесь мы используем факт $D[f] = (-\infty, +\infty)$). Тогда, в частности, при $x = x_0 = -b/2a \Rightarrow x_0 + T_0 \neq x_0$, стало быть или $x_0 + T_0 > x_0$, или $x_0 + T_0 < x_0$, но в силу результатов п. VII при этом или $f(x_0 + T_0) < f(x_0)$, или $f(x_0 + T_0) > f(x_0)$, то есть $f(x_0) \neq f(x_0 + T_0)$, пришли к противоречию.

VII. Если $D \geqslant 0$, то $f(x) = 0$ при $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$ (см. п. 1.1). Так как $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (см. 2^0), то при $D = 0 \Rightarrow x_1 =$ $= x_2 = -b/2a = x_0 \Rightarrow f(x) = a(x - x_0)^2$, следовательно, при $a > 0$ $(a < 0) \Rightarrow f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ на $(-\infty, -b/2a) \cup (-b/2a, +\infty)$; если же $D > 0$, то при $a > 0$ $(a < 0) \Rightarrow f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ на $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, и $f(x) < 0$ $(f(x) > 0)$ на (x_1, x_2), где x_1 — меньший, а x_2 — больший корни уравнения $f(x) = 0$; при $D < 0$, $a > 0 \Rightarrow f(x) \geqslant$ $\geqslant -D/4a > 0$, при $D < 0$, $a < 0 \Rightarrow f(x) \leqslant -D/4a < 0 \Rightarrow f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ при $a > 0$ $(a < 0)$ всюду на $(-\infty, +\infty)$.

VIII. Если $a > 0$ $(a < 0)$, то $f(x) = ax^2 + bx + c$ возрастает на $[-b/2a, +\infty)$ $((-\infty, -b/2a])$ и убывает на $(-\infty, -b/2a]$ $([-b/2a, +\infty))$. Доказывается это путем рассмотрения произвольных $x_2 > x_1 \geqslant -b/2a$ и

$x_1 < x_2 \leqslant -b/2a$ и разности $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) =$ $= (x_2 - x_1)(a(x_1 + x_2) + b) = a(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - (-b)/a)$. $x_2 - x_1 > 0$ всегда, поэтому знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ зависит от знака выражения $a(x_1 + x_2 - (-b)/a)$, а он и определяется сформулированными в условиях п. VII данными следующим образом: если $x_2 > x_1 \geqslant -b/2a$ $(x_1 < x_2 \leqslant -b/2a)$, то в силу свойств числовых неравенств

$$x_1 \geqslant -\frac{b}{2a} \quad \left(x_2 \leqslant -\frac{b}{2a}\right)$$

$$x_2 > -\frac{b}{2a} \quad \left(x_1 < -\frac{b}{2a}\right),$$

почленно складывая эти неравенства, мы получим: $x_1 + x_2 > -\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 - (-b)/a) > 0 \quad \left(x_1 + x_2 < -\frac{b}{a} \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - (-b)/a) < 0\right),$$

а уже отсюда все определяется знаком числа a.

IX. Выпуклость квадратичной функции

Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ строго выпукла вниз (вверх) на всей своей области определения (на промежутке $(-\infty, +\infty)$) если $a > 0$ $(a < 0)$.

Доказательство. Фиксируем произвольные x_1 и $x_2 \in R$, $\quad x_1 \neq x_2$. Сравним разность выражений:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \text{с числом} \quad 0\ .$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + c -$$

$$-\frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{2} - \frac{ax_2^2 + bx_2 + c}{2} = \frac{1}{4}a(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2) =$$

$$= -\frac{a}{4} \cdot \left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) = -\frac{a(x_1 - x_2)^2}{4}\ .$$

Если $a > 0 \quad (a < 0)$, то при $x_1 \neq x_2 \Rightarrow -\dfrac{a(x_1 - x_2)^2}{4} < 0 \quad (> 0)$, а потому в конечном итоге для квадратичной функции имеет место неравенство $(1')$ $((2'))$ стр. 6, что и означает ее выпуклость вниз (вверх) на $(-\infty, +\infty)$, что и требовалось доказать.

X. Графики: (см. рис. 1.1 а — е)

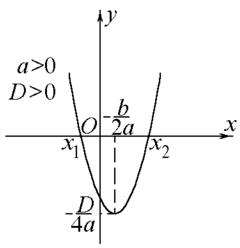

рис. 1.1 а

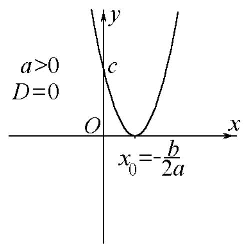

рис. 1.1 б

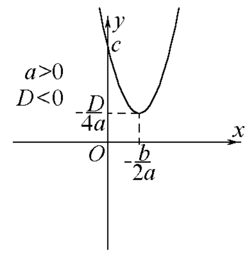

рис. 1.1 в

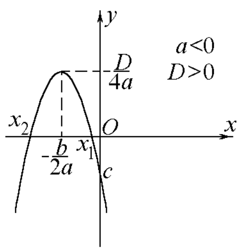

рис. 1.1 г

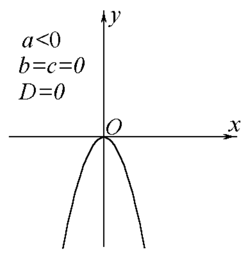

рис. 1.1 д

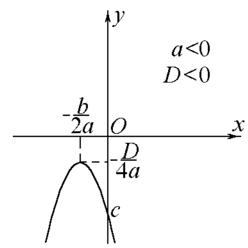

рис. 1.1 е

$(0; c)$ общая точка графика функции с осью Oy (ибо $f(0) = c$); $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox при $D > 0$; при $D = 0$ это точка касания, $x_1 = x_2 = x_0 = -b/2a$; при $D < 0$ таких точек нет.

Замечание. Монотонность $f(x)$ может быть доказана и с помощью производной, однако при применении теоремы об участках возрастания (убывания) при $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) это можно утверждать лишь на $(-b/2a, +\infty)$ или $(-\infty, -b/2a)$, а не на $[-b/2a, +\infty)$ или $(-\infty, -b/2a]$.

1.4. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями

Степенью называется выражение a^α, где число a называется *основанием* степени, а число α называется *показателем* степени.

Пусть a — действительное число :

$$a^n \overset{def}{=} \begin{cases} a, & \text{если } n = 1 \\ \underbrace{aa\cdots a}_{n}, & \text{если } n \geqslant 2 \end{cases} \qquad n \in N, \tag{1}$$

если $n = 0,\ a \neq 0$, то $a^0 \overset{def}{=} 1$, 0^0 не определено.

$$a^{-n} \overset{def}{=} \frac{1}{a^n}, \quad \text{где } a \neq 0,\ n \in N, \tag{2}$$

0^{-n} не определено.

Из (2) при $n < 0 \Rightarrow 1/a^{-n} = a^{-(-n)} = a^n$ (так как $-n > 0$), $a^{-0} = 1 = 1/1 = 1/a^0$ при любом $a \neq 0$. Следовательно, $\forall a \neq 0$ и $\forall m \in Z$ (где Z — множество целых чисел) вытекает равенство:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}\ . \tag{3}$$

Свойства. Для любых целых чисел m и p

1. $(ab)^m = a^m b^m$,
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$,
3. $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$,
4. $a^m : a^p = a^{m-p}$,
5. $(a^m)^p = a^{mp}$,
6. если $m > 0$, $a > b \geqslant 0$, то $a^m > b^m \Leftrightarrow a > b$,
   если $m < 0$, $0 < a < b$, то $a^m > b^m \Leftrightarrow a < b$,
   читателям самостоятельно рассмотреть случаи:
   $a^m \geqslant b^m$, $a^m < b^m$, $a^m \leqslant b^m$.

Свойства 1 — 5 справедливы для любых a, $b \in R$, для которых определены левые и правые части выписанных равенств, в частности, для любых отличных от нуля a, $b \in R$, свойство 6 — для любых указанных a, $b \in R$.

Доказательства

1. (a) $m \in N$: $(ab)^m = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{m} = \underbrace{(aa\cdots a)}_{m}\underbrace{(bb\cdots b)}_{m} = a^m b^m$,

   (b) $m = 0$: $(ab)^m = (ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 b^0 = a^m b^m$,

   (c) $m = -n$, $n \in N$: $(ab)^m = (ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} =$
   $= \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} b^{-n} = a^m b^m \Rightarrow 1$ доказано;

2. (a) $m \in N$: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}_{m} = \frac{\overbrace{aa\cdots a}^{m}}{\underbrace{bb\cdots b}_{m}} = \frac{a^m}{b^m}$,

   (b) $m = 0$: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0} = \frac{a^m}{b^m}$,

   (c) $m = -n$, $n \in N$: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{(a/b)^n} =$
   $= \frac{1}{a^n/b^n} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{1}{b^{-n}} \cdot a^{-n} = \frac{a^m}{b^m} \Rightarrow 2$ доказано;

3. (a) $m > 0$, $p > 0$, m, $p \in N$:
   $a^m a^p = \underbrace{aa\cdots a}_{m}\underbrace{aa\cdots a}_{p} = \underbrace{aa\cdots a}_{m+p} = a^{m+p}$,

(b) $m \in Z, p = 0$:
$a^m a^p = a^m a^0 = a^m 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+p}$,
случай $m = 0,\ p \in Z$ рассматривается аналогично,
в частности, $m = p = 0$:
$a^m a^p = a^0 a^0 = 1 \cdot 1 = 1 = a^0 = a^{0+0} = a^{m+p}$,

(c) $m > 0,\ p < 0$, тогда $p = -n,\ n \in N$:
(α) $\quad m > n \Rightarrow m - n \in N: \quad a^m \cdot a^p = a^m \cdot a^{-n} =$
$= a^m : a^n = a^{n+(m-n)} : a^n = \left(a^n \cdot a^{m-n}\right) : a^n = a^{m-n} =$
$= a^{m+(-n)} = a^{m+p}$,
(β) $\quad m = n \Rightarrow m - n = 0: \quad a^m \cdot a^p = a^m \cdot a^{-n} = a^m : a^n =$
$= a^m : a^m = 1 = a^0 = a^{m-m} = a^{m-n} = a^{m+(-n)} = a^{m+p}$,
(γ) $\quad m < n \Rightarrow n - m \in N: \quad a^m \cdot a^p = a^m \cdot a^{-n} =$
$= a^m : a^n = a^m : \left(a^{m+(n-m)}\right) = a^m : \left(a^m \cdot a^{n-m}\right) =$
$= 1 : a^{n-m} = a^{-(n-m)} = a^{m-n} = a^{m+p}$,

(d) $m < 0,\ p > 0$ рассматривается аналогично,

(e) $m < 0,\ p < 0$, тогда $m = -q, p = -n,\ n, q \in N$:
$$a^{m+p} = a^{(-q)+(-n)} = a^{-(q+n)} = \frac{1}{a^{q+n}} = \frac{1}{a^q \cdot a^n} =$$
$= a^{-q} \cdot a^{-n} = a^m a^p \ \Rightarrow\ 3$ полностью доказано;

4. $a^p \cdot a^{m-p} = a^{p+(m-p)} = a^m \ \Rightarrow\ a^{m-p} = a^m : a^p \ \Rightarrow\ 4$ доказано;

5. (a) $m > 0, p > 0$:
$$(a^m)^p = \underbrace{\underbrace{(aa\cdots a)}_{m}\underbrace{(aa\cdots a)}_{m}\underbrace{(aa\cdots a)}_{m}}_{p} = \underbrace{aa\cdots a}_{mp} = a^{mp},$$

(b) $m \in Z,\ p = 0: \quad (a^m)^p = (a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m\cdot 0} = a^{mp}$,
$m = 0, p \in Z: \quad (a^m)^p = 1^p = 1 = a^0 = a^{0\cdot p} = a^{mp}$,
в частности, $m = p = 0$: $(a^m)^p = (a^0)^0 = 1^0 = 1 = a^0 =$
$= a^{0\cdot 0} = a^{mp}$,

(c) $m < 0,\ p > 0 \ \Rightarrow\ m = -q,\ q \in N$:
$$(a^m)^p = (a^{-q})^p = \left(\frac{1}{a^q}\right)^p = \frac{1^p}{(a^q)^p} = \frac{1}{a^{qp}} = a^{-qp} =$$
$= a^{(-q)p} = a^{mp}$,

(d) $m > 0,\ p < 0 \ \Rightarrow\ p = -n,\ n \in N$:
$$(a^m)^p = (a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m(-n)} = a^{mp},$$

(e) $m < 0,\ p < 0 \ \Rightarrow\ m = -q, p = -n,\ n, q \in N$:
$$(a^m)^p = (a^{-n})^{-q} = \frac{1}{(a^{-n})^q} = \frac{1}{a^{(-n)q}} = a^{-(-nq)} = a^{nq} =$$
$= a^{(-n)(-q)} = a^{mp} \ \Rightarrow\ 5$ полностью доказано;

6. $m > 0$, это свойство сразу вытекает из свойства 10 числовых неравенств (см. [1], раздел II, п. 2.1, вопрос 3),
$m < 0 \Leftrightarrow -m > 0$, далее так же, как и ниже, для случая отрицательного рационального показателя или в силу доказанного ниже в п. 1.9 свойства монотонности степенной функции с целым показателем.

Таким образом, все свойства степеней с целыми и, в частности, с натуральными показателями доказаны.

1.5. **Свойства арифметических корней n - ой степени. Свойства степеней с рациональными показателями**

Определение 1. Пусть числа $a,\ b \in R$. Число b называется *корнем n-ой степени* $(n \in N)$ из числа a (алгебраическим корнем), если $b^n = a$. Если $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$, то число b называется *арифметическим корнем n-ой степени* из числа a. Арифметический корень обозначается так:

$$b = \sqrt[n]{a}.$$

Это обозначение применяется и для случая нечетного n и отрицательного a $(a < 0)$, при этом также $b < 0$.

При $n = 1$ $b = a$, так как $a^1 = a$, при $n = 2$ $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

В школьном курсе без доказательства принимается существование арифметического корня n - ой степени; его единственность легко доказывается от противного на основе утверждения о числовых неравенствах: если $a > b \geqslant 0$, то при любом натуральном n $a > b$ $(a < b) \Leftrightarrow a^n > b^n$ $a^n < b^n$.

О понятии степени см. выше п. 1.4, см. также дополнительный материал к п. 1.5 о существовании и количестве действительных корней.

Определение 2. Пусть $p \in Z,\ q \in N,\ a > 0,\ a \in R,\ a^{\frac{p}{q}} \overset{def}{=} \sqrt[q]{a^p}$,
в частности, при $p = 1$ $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$, если $p \in N$, то $a^{\frac{p}{q}}$ определено и для $a = 0$.

Если $q < 0$, то $a^{\frac{p}{q}} \overset{def}{=} a^{\frac{-p}{|q|}}$, однако все свойства степеней с рациональными показателями будут формулироваться и доказываться для случая, когда у показателей $\alpha = p/q,\ \beta = r/s$ — $q \in N,\ s \in N$, то есть $q,\ s > 0$.

Свойства корней n - ой степени:

1. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \text{ если } n = 2k-1,\ \forall k \in N,\ \forall a \in R \\ |a|, \text{ если } n = 2k,\ \forall k \in N,\ \forall a \in R \end{cases}$;
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b},\ \forall n \in N,\ \forall a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ a,\ b \in R$;
3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ \forall n \in N,\ \forall a \geqslant 0,\ b > 0,\ a,\ b \in R$;
4. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m,\ \forall m,\ n \in N,\ \forall a \geqslant 0,\ a \in R$;

5. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^k, \ \forall m, \ n, \ k \in N, \ k = m : n, \ \forall a \geqslant 0, \ a \in R,$
$\sqrt[n]{a^m} = a^k \sqrt[n]{a^r}, \forall m, \ n, \ k, \ r \in N, \ m = nk + r,$
$0 < r \leqslant n - 1, \forall a \geqslant 0, \ a \in R$;

6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \forall m, \ n \in N, \ \forall a \geqslant 0, \ a \in R$;

7. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[q]{a^p}, \forall m, \ n, \ p, \ q, \ k \in N : \ m = kq, \ n = kp,$
$\forall a \geqslant 0, \ a \in R$;

8. $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}, \forall p, \ q, \ m, \ n \in N, \ \forall a \geqslant 0, \ a \in R,$
$\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}}, \forall p, \ q, \ m, \ n \in N, \ \forall a > 0, \ a \in R.$

Свойства степеней. Для любых рациональных чисел α и β :

1. $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$;
2. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$;
3. $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$;
4. $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$;
5. $(a^\alpha)^\beta = (a^\beta)^\alpha = a^{\alpha\beta}$.
6. $a^\alpha > b^\alpha \ \Leftrightarrow \ a > b \geqslant 0, \ \alpha > 0.$
$a^\alpha > b^\alpha \ \Leftrightarrow \ 0 < a < b, \ \alpha < 0,$
читателям самостоятельно рассмотреть случаи:
$a^\alpha \geqslant b^\alpha, \ a^\alpha < b^\alpha, \ a^\alpha \leqslant b^\alpha.$

Свойства 1 — 5 справедливы для всех действительных a и b, при которых определены левые и правые части выписанных равенств, в частности, для любых $a > 0, \ b > 0, \ a, \ b \in R$, свойство 6 — для любых указанных $a, \ b \in R$.

Доказательства

I. Свойства корней

Их доказательства основаны на определении корня, единственности корня (в свойстве 1. применяется еще единственность алгебраического корня нечетной степени из отрицательного числа) и свойствах степеней с натуральными показателями.

1. $(\sqrt[n]{a^n})^n \overset{def}{=} a^n$ и $(a)^n = a^n \ \Rightarrow \ \sqrt[n]{a^n} = a, \ n = 2k - 1$, если $n = 2k$, то так как $a^n = |a|^n$, для любого $n \in N$ $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{|a|^n} = |a|$, что выводится точно так же, как и в случае $n = 2k - 1$ (при этом используется то, что $|a| \geqslant 0$) ;

2. $(\sqrt[n]{ab})^n \overset{def}{=} ab, \ (\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab \ \Rightarrow \ 2$;

3. $\left(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\right)^n \overset{def}{=} \dfrac{a}{b}\ , \ \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \dfrac{a}{b} \ \Rightarrow \ 3$;

4. $(\sqrt[n]{a^m})^n \overset{def}{=} a^m, \ ((\sqrt[n]{a})^m)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = (a)^m = a^m \ \Rightarrow \ 4$;

5. $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m,\ (a^k)^n = a^{kn} = a^m \ \Rightarrow\ 5,$
$(a^k \sqrt[n]{a^r})^n = (a^k)^n(\sqrt[n]{a^r})^n = a^{kn}a^r = a^{kn+r} = a^m,\ (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m \Rightarrow 5$;

6. $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a,\ (\sqrt[mn]{a})^{mn} \overset{def}{=} a \ \Rightarrow\ 6$;

7. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[kq]{a^{kp}} \overset{6.}{=} \sqrt[k]{\sqrt[q]{a^{pk}}} \overset{5.}{=} \sqrt[k]{\sqrt[q]{(a^p)^k}} \overset{4.}{=} \sqrt[k]{(\sqrt[q]{a^p})^k} = \sqrt[q]{a^p}$;

8. $\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[q]{a^p} \overset{7.}{=} \sqrt[nq]{a^{mq}}\,\sqrt[nq]{a^{pn}} \overset{2.}{=} \sqrt[nq]{a^{mq}a^{pn}} \overset{1.}{=} \sqrt[nq]{a^{mq+pn}},$

аналогично рассматривается случай частного с использованием свойства 4 степеней.

II. Свойства степеней

1. Пусть $\alpha = \dfrac{m}{n}$, где $m \in Z,\ n \in N$ $(ab)^\alpha = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} =$
$= \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = a^\alpha b^\alpha$;

2. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\dfrac{a^m}{b^m}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$;

3. 3. и 4. вытекают из свойств корней 8. и определения степени:
пусть $\beta = \dfrac{p}{q}$, $a^\alpha a^\beta = \sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} =$
$= a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\alpha+\beta}$;

4. $a^\alpha : a^\beta = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}-\frac{np}{nq}} =$
$= a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\alpha-\beta}$;

5. $(a^\alpha)^\beta = (\sqrt[n]{a^m})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{(a^m)})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}} =$
$= \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{\alpha\beta},$

аналогично доказывается, что $(a^\beta)^\alpha = a^{\beta\alpha} = a^{\alpha\beta} = (a^\alpha)^\beta$;

6. $\alpha > 0 \ \Rightarrow\ \alpha = m/n,\ m,\ n \in N$, в силу только что доказанного свойства 5 и утверждения о числовых неравенствах: если $a > b \geqslant 0$, то при любом натуральном n $a > b$ $(a < b) \Leftrightarrow a^n > b^n$ $a^n < b^n$ имеем $a^{m/n} >$ $> b^{m/n} \Leftrightarrow (a^{1/n})^m > (b^{1/n})^m \Leftrightarrow a^{1/n} > b^{1/n} \Leftrightarrow (a^{1/n})^n > (b^{1/n})^n \Leftrightarrow a > b,$

$\alpha < 0 \ \Leftrightarrow\ -\alpha > 0$, по доказанному и в силу свойства 9 числовых неравенств (см. [1], раздел II, п. 2.1, вопрос 3)

$$a > b \ \Leftrightarrow\ a^{-\alpha} > b^{-\alpha} \ \Leftrightarrow\ 1/a^{-\alpha} < 1/b^{-\alpha} \ \Leftrightarrow\ a^\alpha < b^\alpha.$$

Свойства степеней и корней доказаны.

Обращаем внимание, что в свойствах 2. и 3. корней при $n = 2k,\ k \in N$ для любых $a,\ b \in R$ таких, что $ab \geqslant 0$ (в случае 3. $b \neq 0$) имеют место равенства, которые предлагается самостоятельно обосновать:

$2'.$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|}\,\sqrt[n]{|b|}$ и $3'.$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}.$

Дополнительный материал к п. 1.5.

Исследуем вопрос о существовании и количестве корней n — ой степени из действительного числа a в зависимости от четности или нечетности n и знака числа a.

Прежде всего отметим, что если $a = 0$, то $\forall n \in N \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{0} = 0$ и только 0, поскольку $\forall n \in N \quad 0^n = 0$, а $\forall n \in N, \ b \in R$ такого, что $b \neq$ $\neq 0 \Rightarrow b^n \neq 0$ (согласно определению произведения чисел). Далее, если $a = 1$, то $\forall n \in N \ : \ \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1} = 1$ поскольку $\forall n \in N \ : \ 1^n = 1$. Других арифметических значений корня n — ой степени из 1 не существует, поскольку в силу утверждения о числовых неравенствах: если $a > b \geqslant 0$, то при любом натуральном $n \ \ a > b \ (a < b) \Leftrightarrow a^n > b^n \ a^n < b^n \ \ \forall b$ такого, что $0 \leqslant b < 1 \Rightarrow 0 = 0^n \leqslant b^n < 1^n = 1$, а $\forall b$ такого, что $b > 1 \Rightarrow b^n > 1^n = 1$, следовательно $\forall b \in R$ такого, что $0 \leqslant b \neq 1 \Rightarrow 0 \leqslant b^n \neq 1$. Для случая $0 < a \neq 1$ схему обоснования существования $\sqrt[n]{a}$ см., например, в [3], гл. 3, §2, п. 1.1. Она также приводится в курсах математического анализа. Предполагая существование двух неотрицательных чисел $b_1 \neq b_2$ таких, что $b_1^n = b_2^n = a$ мы сразу получаем противоречие, поскольку при $b_1 < (>) b_2$ и $b_1^n < (>) b_2^n$, следовательно, $b_1^n \neq b_2^n$. Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. $\forall a < 0$ и $\forall k \in N, n = 2k \ \ \nexists b \in R \ : \ b^n = a$.

Доказательство. Предполагая противное, что такое число b существует, мы получаем, что если $b \geqslant 0$, то согласно правилу умножения чисел $b^n =$ $= b^{2k} \geqslant 0$, а если $b < 0$, то $b = -|b|$, где $|b| > 0$ и потому $b^n = b^{2k} =$ $= ((-1)|b|)^{2k} = (-1)^{2k}|b|^{2k} = |b|^{2k} > 0$, поэтому равенство $b^n = b^{2k} = a < 0$ невозможно ни для какого $b \in R$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. $\forall a > 0$ и $\forall k \in N, n = 2k \ \ \exists b_1 = -\sqrt[2k]{a} < 0, \ b_2 = \sqrt[2k]{a} > 0$, $b_{1,2} \in R \ : \ b_1^n = b_2^n = a$. Других действительных значений корня $2k$ - ой степени из числа a нет.

Доказательство. Отсутствие отличных от b_2 неотрицательных значений корня $2k$ - ой степени из числа a вытекает из существования (принятого без доказательства) и единственности арифметического корня. Далее, $b_1^n = b_1^{2k} = (-\sqrt[2k]{a})^{2k} = (-1)^{2k}(\sqrt[2k]{a})^{2k} = 1 \cdot a = a$, то есть число b_1 действительно является корнем $2k$ - ой степени из числа a (алгебраическим, не арифметическим). Предположим, что существует число $-b' < 0$ и $-b' \neq b_1 \ (b' > 0)$, что $(-b')^{2k} = a$, тогда получаем, что $b' \neq b_2$ и так как $a = (-b')^{2k} = (-1)^{2k}(b')^{2k} = (b')^{2k}$, то приходим к противоречию с единственностью арифметического корня $2k$ - ой степени из числа $a > 0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. $\forall a \in R$ и $\forall k \in N_0, n = 2k + 1 \ \ \exists! b \ : \ b^n = b^{2k+1} = a$

Доказательство

Случай $a = 0$ рассмотрен выше. Пусть $a > 0$, тогда $\sqrt[n]{a} = \sqrt[2k+1]{a}$ — единственное арифметическое значение этого корня, поскольку $\forall b < 0$ $b^{2k+1} = (-|b|)^{2k+1} = (-1)^{2k+1}|b|^{2k+1} = (-1) \cdot |b|^{2k+1} = -|b|^{2k+1} < 0$ (так как $|b| > 0$, а потому и $|b|^{2k+1} > 0$), то и отрицательных значений корня нечетной степени из положительного числа нет. Пусть $a < 0$, тогда $|a| > 0$ и число $-\sqrt[n]{|a|} = -\sqrt[2k+1]{|a|} < 0$ является корнем указанной степени из числа a, поскольку $(-\sqrt[2k+1]{|a|})^{2k+1} = (-1)^{2k+1}(\sqrt[2k+1]{|a|})^{2k+1} = (-1)\cdot|a| = -|a| = a$. При этом так как всякое неотрицательное число в любой натуральной степени неотрицательно, то неотрицательных значений корня нечетной степени из отрицательного числа не существует. Если же предположить существование числа $-b' < 0$, отличного от $-\sqrt[2k+1]{|a|}$, но $(-b')^{2k+1} = a =$ $= (-1)^{2k+1}b'^{2k+1} = -b'^{2k+1}$, то число $b' > 0$, $b' \neq \sqrt[2k+1]{|a|}$ и $b'^{2k+1} =$ $= -a = |a|$, получили противоречие с единственностью арифметического корня $2k+1$ степени из положительного числа, которое и доказывает единственность корня нечетной степени из отрицательного числа. Это значение отрицательно и поэтому не является арифметическим значением корня. Теорема 3 доказана.

Замечание. Единственность корня нечетной степени из любого числа естественным образом позволяет нам использовать знак радикала (корня) для его обозначения, то есть в частности, при $a < 0$ $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$, где $\sqrt[2k+1]{|a|}$ уже арифметический корень из положительного числа $|a|$. Использование знака корня четной степени допускается только для *арифметического* (то есть неотрицательного) значения корня. Стало быть, запись вида $\sqrt[4]{16} = -2$ не корректна, $-2 = -\sqrt[4]{16}$, где $\sqrt[4]{16} = 2$.

Алгоритм извлечения квадратного корня из положительного числа

Чтобы извлечь квадратный корень из данного целого числа надо:

1) разбить число справа налево на группы по две цифры в каждой, кроме первой (крайней левой), если в ней одна цифра;

2) подобрать наибольшее число, квадрат которого не больше числа в левой группе, и записать его в ответ;

3) возвести это число в квадрат и вычесть из числа в первой группе цифр;

4) к полученной разности приписать следующую группу цифр;

5) удвоить число, записанное в ответ, относя его в колонку слева от колонки разностей, формируемых в 4), приписать к этому удвоенному числу наибольшую цифру (может быть и 0), чтобы произведение полученного числа на эту цифру было не больше числа, полученного в 4), записать это произведение в правой колонке под числом, полученным в 4), и найти разность числа, полученного в 4), и указанного произведения;

6) приписать цифру, получаемую в левой колонке в 5) справа к числу, записываемому в ответе;
7) повторить процесс, описанный в 4) — 6).

Если по окончании всех этих процессов очередная разность будет равна нулю, то корень извлекся точно, если эта разность не будет равна нулю, то к исходному числу приписываем справа $2k$ нулей ($k \in N$), отделив их от него запятой, и разбиваем эти нули по два слева направо, ставим запятую справа от числа, полученного в ответе, и еще k раз повторяем процесс, описанный в 4) — 6). В результате мы получаем k первых десятичных знаков искомого корня, что будет являться его приближенным значением по недостатку с точностью $1/10^k$.

Если подкоренное число выражается десятичной дробью, то деление на грани производится от запятой для целой части влево, для дробной части вправо (примеры: $565,7548 = 5'65,75'48$; $2138,639 = 21'38,63'90$). Для получения требуемой точности надо приписать справа необходимое число пар нулей (пример: $21'38,63'90'00'00 = 2138,639$). Примеры:

1)	$\sqrt{1'14'49} = 107$
1	1
20	014
0	0
207	1449
7	1449
	0

2)	$\sqrt{28'85'76,00'00} = 537,19\ldots$
5	25
103	385
3	309
1067	7676
7	7469
10741	20700
1	10741
107429	995900
9	966861
	29039
.....	.....

3)	$\sqrt{3'81,64'28'00} = 19,535\ldots$
1	1
29	281
9	261
385	2064
5	1925
3903	13928
3	11709
39065	221900
5	195325
	25575
.....	.....

4)	$\sqrt{21'50,17'69'00} = 46,37$
4	16
86	550
6	516
923	3417
3	2769
9267	64869
7	64869
	0

Таким образом: $\sqrt{11449} = 107$, корень извлекся точно, процесс завершен; $\sqrt{288576} = 537,19...$, корень извлечен приближенно с точностью 1/100, процесс может быть продолжен;
$\sqrt{381,6428} = 19,535...$, корень извлечен приближенно с точностью 1/1000, процесс может быть продолжен;
$\sqrt{2150,1769} = 46,37$, корень извлекся точно, процесс завершен.

1.6. Свойства показательной функции и ее график

О понятии степени с целым и рациональным показателем см. п. 1.4 и 1.5.

Определение 1. Пусть $a,\ \alpha$ — произвольные действительные числа, r_1 и r_2 — произвольные рациональные числа такие, что $r_1 \leqslant \alpha \leqslant r_2$, тогда, при $a > 1$, $a^\alpha \overset{def}{=} b$, если для любых указанных $r_1,\ r_2 \in Q$ $a^{r_1} \leqslant b \leqslant a^{r_2}$; при $0 < a < 1$, $a^\alpha \overset{def}{=} b$, если для любых указанных $r_1,\ r_2 \in Q$
$a^{r_2} \leqslant b \leqslant a^{r_1}$.

Если $a = 1$, то для любого $\alpha \in R$ $a^\alpha \overset{def}{=} 1$; если $a = 0$, то для любого $\alpha > 0$ (то есть $\alpha \in R^+$) $a^\alpha \overset{def}{=} 0$,*[1] $\forall \alpha \leqslant 0$ $(\alpha \in R)$ a^α не определено.

Замечание. Для случая $a = 1$ это определение согласуется с тем, что если для $a = 1$ применить определение a^α как при $a > 1$, так и при $0 < a < 1$, то в силу того, что при любом целом α очевидно, что $1^\alpha = 1$, а при любом $\alpha \in Q$ $(\alpha = p/q$, где $p \in Z,\ q \in N,\ q \geqslant 2)$ $1^\alpha = \sqrt[q]{1^p} = 1$, получим, что 1^α может равняться только 1. Для случая $a = 0$ это определение согласуется с тем, что если для $a = 0$ применить определение a^α при $0 < a < 1$ и $r_1,\ r_2 > 0$, то в силу того, что при любом натуральном α очевидно, что $0^\alpha = 0$, а при любом $\alpha \in Q^+$ $(\alpha = p/q$, где $p \in N,\ q \in N,\ q \geqslant 2)$ $0^\alpha = \sqrt[q]{0^p} = 0$, получим, что 0^α при $\alpha > 0$ может равняться только 0.

Определение 2. Функция вида $y = a^x$ называется *показательной* функцией, $a \geqslant 0$ — постоянное число, x — переменная (аргумент).

В курсе математического анализа доказывается существование и единственность числа $b = a^\alpha$ $\forall a > 0,\ a \neq 1$ и $\alpha \in R$.

I. Отсюда и в соответствии с замечанием область определения функции a^x при $a > 0$ — любое $x \in R$, то есть промежуток $(-\infty, +\infty)$, а при $a = 0$ — только любое $x > 0$ $(x \in R^+)$, то есть промежуток $(0, +\infty)$.

II. Если $a = 1$, то так как $\forall x \in R$ $a^x = 1 \Rightarrow E[a^x] = \{1\}$,
если $a = 0$, то так как $\forall x \in R^+$ $a^x = 0 \Rightarrow E[a^x] = \{0\}$.

[1]* Такое определение приводится в учебниках по математическому анализу, связано это с тем, что при любом действительном $\alpha > 0$ значения функции x^α стремятся к нулю при стремлении справа к нулю аргумента x, однако в школьном курсе математики случай $a = 0$ не рассматривается.

Следовательно, при $a = 1$ $a^x \equiv g(x)$, где $g(x)$ — линейная функция (вида $a_0 x + b_0$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$), в случае $a = 0$ ситуация аналогичная с тем отличием, что там $b_0 = 0$ и определена эта функция *только на* $(0, +\infty)$. Поэтому случаи $a = 1$ и $a = 0$ достаточно тривиальны и подробнее рассматриваться не будут.* [2]

Пусть $0 < a \neq 1$.

II. В курсе математического анализа доказывается, что для любого $b > 0$ существует и единственное α : $a^\alpha = b$. Поэтому из определения 1 степени и (см. ниже п. VII) оценки снизу вытекает, что областью изменения функции $y = a^x$ является промежуток $(0, +\infty)$.

III. Из II и соответствующих определений вытекает, что показательная функция $y = a^x$ ограничена снизу и не ограничена сверху на своей области определения.

IV. $\max a^x$ и $\min a^x$ нет.

Мы докажем от противного эти утверждения:

$$\nexists \min_{x\in R} a^x \ ; \ \nexists \max_{x\in R} a^x .$$

Предположим, что $\exists x_1,\ x_2 \in R:\ a^{x_1} = \varepsilon_0 > 0,\ a^{x_2} = M_0 > 0$ и

$$\forall x \in R \Rightarrow a^x \geqslant \varepsilon_0 > 0,\ a^x \leqslant M_0,$$

тогда $\varepsilon_0 \overset{def}{=} \min\limits_{x\in R} a^x$, $M_0 \overset{def}{=} \max\limits_{x\in R} a^x$, но так как $E[a^x] = (0, +\infty)$, то, в частности

$$\exists \tilde{x}_1 \in R : a^{\tilde{x}_1} = \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0 \ \left(0 < \frac{\varepsilon_0}{2}\right),\ \exists \tilde{x}_2 \in R : a^{\tilde{x}_2} = 2M_0 > M_0,$$

пришли к противоречию.

V. $y = a^x$ не является четной в силу строгой монотонности на $(-\infty, +\infty)$ (см. п. VIII), из которой вытекает: $\forall x \neq 0$ $y(-x) \neq y(x)$, она же не является нечетной, так как принимает только положительные значения, откуда $\forall x \in R$ равенство $y(-x) = -y(x)$ невозможно.

VI. $y = a^x$ не является периодической. Предположим, что $\exists T_0 \neq 0$, что $\forall x \in R \Rightarrow a^{x+T_0} = a^x$. Тогда в силу не обращения в 0 значений показательной функции (это вытекает из результатов п. VI) и свойства степеней получаем $a^{x+T_0} = a^x \Leftrightarrow a^x \cdot a^{T_0} = a^x \Leftrightarrow a^{T_0} = 1$. В силу строгой монотонности показательной функции (см. п. VIII) $a^{T_0} = 1 \Leftrightarrow T_0 = 0$, пришли к противоречию.

---

[2]* Игнорирование многими авторами рассмотрения случаев $a = 1$ и $a = 0$ могло приводить к серьезным ошибкам учащихся и абитуриентов, например, при решении уравнений типа $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$, когда или забывалась рассматриваться возможность $f(x) = 1$, или исключалась ситуация, когда при $f(x) = 0$ получалось $g(x) > 0$ и $h(x) > 0$, при этом ведь уравнение $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$ обращалось в верное числовое равенство.

VII. Так как при $a > 1$ $(0 < a < 1)$ и $\forall r \in Q$ $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$, то, следовательно, в частности, $b = a^\alpha \geqslant a^r > 0$, где $r \leqslant$ $(\geqslant)$ α, $r \in Q$, поэтому нулей у показательной функции нет и $a^x > 0$ на $(-\infty, +\infty)$.

VIII. Возрастание функции $y = a^x$ при $a > 1$ и ее убывание при $0 < a < 1$ сначала докажем на множестве рациональных чисел, то есть $\forall r_1,\ r_2 \in Q\ :\ r_2 > r_1,\ \forall a > 1\ (0 < a < 1)\ \Rightarrow\ a^{r_2} > a^{r_1}\ (a^{r_2} < a^{r_1})$.

Фиксируем произвольные рациональные числа $r_2 > r_1$. В силу доказанных свойств степеней с рациональными показателями

$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1)$. Так как $a^{r_1} > 0$ и $r_2 - r_1 > 0$, то достаточно доказать, что $\forall r > 0,\ r \in Q,\ \forall\ a > 1\ (0 < a < 1)\ \Rightarrow\ a^r > 1\ (0 < a^r < 1)$.

При доказательстве этих фактов будем использовать непосредственно вытекающие из свойств числовых неравенств (см. [1], раздел II, п. 2.1, вопрос 3) следующие два вспомогательных утверждения.

Утверждение 1. $\forall\ n \in N,\ a \in R,\ a > 1\ \Rightarrow\ a^n > 1^n = 1$.

Утверждение 2. $\forall\ n \in N,\ a \in R,\ 0 < a < 1\ \Rightarrow\ 0 = 0^n < a^n < 1^n = 1$.

Пусть $r > 0,\ r \in Q$, тогда $r = \dfrac{m}{n},\ m,\ n\ \in N,\ \ a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

В силу утверждений 1 и 2 и определения корня n-ой степени из того, что

$$a > 1\ (0 < a < 1)\ \Rightarrow\ a^m > 1\ (0 < a^m < 1)\ \Rightarrow\ (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m > 1$$
$$(0 < (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m < 1)\ \Rightarrow\ a^r = \sqrt[n]{a^m} > 1\ (0 < a^r = \sqrt[n]{a^m} < 1).$$

Тем самым возрастание (убывание) функции $y = a^x$ при $a > 1$ $(0 < a < 1)$ на множестве рациональных чисел доказано.

Для доказательства соответствующих утверждений на множестве действительных чисел нам потребуется доказать еще одно вспомогательное утверждение.

Утверждение 3. $\forall a,\ b, \in R\ :\ a < b\ \ \exists x \in Q$ такое, что $a < x < b$.

Доказательство. Случай $a < 0$ и $b > 0$ тривиален: в качестве числа x можно взять $x = 0$.

Пусть $0 \leqslant a < b$. Представим числа a и b в виде бесконечных десятичных дробей $a = a_0, a_1 a_2 a_3 ... a_n ...$, $b = b_0, b_1 b_2 b_3 ... b_n ...$.

Замечание. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что среди рассматриваемых бесконечных десятичных дробей отсутствуют дроби с периодом 9.

Согласно правилу сравнения бесконечных десятичных дробей (см. стр. 5) так как $0 \leqslant a < b$, то либо $a_0 < b_0$, либо

$\exists\ k \in N:\ \ a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \dots,\ a_{k-1} = b_{k-1},\ a_k < b_k$.

В то же время в силу замечания существует $p \in N\ :\ p > k$, что $a_p < 9$, а потому число $x = a_0, a_1 a_2 ... a_k a_{k+1} ... (a_p + 1)000...0... \in Q$ и будет удовлетворять неравенствам $a < x < b$.

Случай $a < b \leqslant 0$ легко сводится к только что рассмотренному следующим образом: $a < b \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant -b < -a, \;\Leftrightarrow\; \exists\, \widetilde{x} \in Q:$

$$-b < \widetilde{x} < -a \;\Rightarrow\; \exists\, x = -\widetilde{x} \in Q:\; a < x < b.$$

Утверждение 3 полностью доказано.

Фиксируем произвольные $x_1 < x_2$, $x_1,\ x_2 \in R$, тогда в силу утверждения 3 существует рациональное число x такое, что $x_1 < x < x_2$, а так как при этом $x \in R$, то существует также рациональное число x' такое, что $x < x' < x_2$. Таким образом, $\forall\, x_1,\ x_2 \in R\ :\ x_1 < x_2\ \ \exists\, x$ и $x' \in Q$ такие, что $x_1 < x < x' < x_2$.

По определению a^x и доказанному возрастанию (убыванию) показательной функции на множестве рациональных чисел при $a > 1$ $(0 < a < 1)$ имеем:

$$a^{x_1} \leqslant a^x < a^{x'} \leqslant a^{x_2} \quad\Rightarrow\quad a^{x_1} < a^{x_2}$$

$$(a^{x_1} \geqslant a^x > a^{x'} \geqslant a^{x_2} \;\Rightarrow\; a^{x_2} < a^{x_1}),$$

что и означает возрастание (убывание) функции $y = a^x$ на всей своей области определения.

IX. Функция $f(x) = a^x$ строго выпукла вниз на всей своей области определения (на промежутке $(-\infty, +\infty)$) при любом $0 < a \neq 1$.

Доказательство. Фиксируем произвольные x_1 и $x_2 \in R$, $\quad x_1 \neq x_2$.

Сравним $\quad f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$ и $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

В силу строгой монотонности функции a^x

$$a^{\frac{x_1}{2}} \neq a^{\frac{x_2}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad 0 < \left(a^{\frac{x_1}{2}} - a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2 .$$

Раскрывая скобки, применяя свойства числовых неравенств и свойства степеней, будем иметь:

$$0 < \left(a^{\frac{x_1}{2}}\right)^2 - 2a^{\frac{x_1}{2}}a^{\frac{x_2}{2}} + \left(a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2 \;\Leftrightarrow\; 2a^{\frac{x_1}{2}}a^{\frac{x_2}{2}} < \left(a^{\frac{x_1}{2}}\right)^2 + \left(a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad a^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2}\ ,$$

тем самым строгая выпуклость вниз функции a^x доказана.

X. Графики:

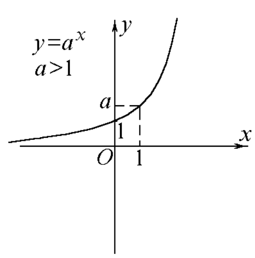

рис. 1.2 а

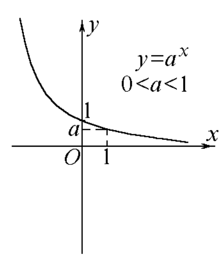

рис. 1.2 б

При $x \to +\infty$, $a^x \to +\infty$ $(a^x \to 0+0)$, если $a > 1$ $(0 < a < 1)$, при $x \to -\infty$, $a^x \to 0+0$ $(a^x \to +\infty)$, если $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

Формулировки соответствующих определений и доказательства будут приведены в курсе математического анализа.

1.7. **Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию. Другие свойства логарифмов**

Определение. Пусть $0 < a \neq 1$, $b > 0$.

Число $\alpha \overset{def}{=} \log_a b$ (*логарифм числа* b *по основанию числа* a), если $a^\alpha = b$.

Существование этого числа доказывается курсе математического анализа, единственность следует из строгой монотонности функции $y = a^x$ при $a > 0$, $a \neq 1$ (см. п. 1.6).

В силу того, что, в частности, при любом действительном a таком, что $0 < a \neq 1$ по определению $a^0 = 1$ и $a^1 = a$ из определения логарифма вытекает $\quad \forall a \in R\ :\ 0 < a \neq 1\ \log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1.$

Приведем простые примеры: $\log_3 9 = 2, \quad \log_9 \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}, \quad \log_2 2^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

1. $a^{\log_a b} = b$ — основное логарифмическое тождество

   (при $0 < a \neq 1,\ b > 0$) $\qquad$ 1. следует из определения логарифма ;
2. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c, \quad 0 < a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$;
3. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad 0 < a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$;
4. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b, \quad 0 < a \neq 1,\ b > 0,\ \alpha \in R$;

   (2 — 4 - логарифмы произведения, частного, степени)
5. формула перехода к другому основанию:

   $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, в частности, при $c = b$ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

   $0 < a \neq 1,\ 0 < c \neq 1,\ b > 0.$

   Отметим и докажем еще и такие свойства логарифмов
6. $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \log_a b, \quad 0 < a \neq 1,\ b > 0,\ \alpha \in R,\ \alpha \neq 0$;
7. $\log_{a^\alpha} b^\beta = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \log_a b, \quad 0 < a \neq 1,\ b > 0,\ \alpha, \beta \in R,\ \alpha \neq 0,$

   в частности, при $\beta = \alpha$ $\log_{a^\alpha} b^\alpha = \log_a b$;
8. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \qquad 0 < b \neq 1,\ a,\ c > 0.$

Свойства 2 — 4 доказываются на основе основного логарифмического тождества 1, утверждения о том, что при любом действительном $a > 0$ и $a \neq 1 \quad a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$, вытекающем из свойства строгой монотонности показательной функции (см. п. 1.6) и свойств степеней

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta, \quad a^{\alpha-\beta} = a^\alpha : a^\beta, \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta},$$

справедливых для любых α и $\beta \in R$ (они доказываются в курсе математического анализа) следующим образом:

$$a^{\log_a bc} = bc = a^{\log_a b} a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c} \Rightarrow 2. ;$$

$$a^{\log_a b:c} = b : c = a^{\log_a b} : a^{\log_a c} = a^{\log_a b - \log_a c} \Rightarrow 3. ;$$

$$a^{\log_a b^\alpha} = b^\alpha = (a^{\log_a b})^\alpha = a^{\alpha \log_a b} \Rightarrow 4. ;$$

Свойство 5 вытекает из свойств 1 и 4 следующим образом:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c (a^{\log_a b}) = \log_c b \Rightarrow 5.$$

Свойство 6 вытекает из свойств 5 и 4 следующим образом:

если $b = 1$, то логарифмы, фигурирующие в левой и правой частях 6., равны нулю; если $0 < b \neq 1$, то поскольку $\log_a b = 0 \Leftrightarrow b = 1$, что вытекает из строгой монотонности логарифмической функции (см. ниже п. 1.8), то, применяя свойства 4 и 5, получим

$$\log_{a^\alpha} b \overset{5.}{=} \frac{1}{\log_b a^\alpha} \overset{4.}{=} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\log_b a} \overset{5.}{=} \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b \Rightarrow 6.$$

Свойство 7 вытекает из свойств 4 и 6 следующим образом:

$$\log_{a^\alpha} b^\beta \overset{6.}{=} \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b^\beta \overset{4.}{=} \frac{\beta}{\alpha} \cdot \log_b a \Rightarrow 7.$$

Свойство 8 вытекает из независимости произведения двух действительных чисел от порядка сомножителей и свойства 4 следующим образом:

$$\log_b c \cdot \log_b a = \log_b a \cdot \log_b c \overset{4.}{\Leftrightarrow} \log_b a^{\log_b c} = \log_b c^{\log_b a} \Leftrightarrow a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow 8.,$$

последний переход $\Leftrightarrow$ осуществлен в силу утверждения:

$$\forall b,\ x,\ y \in R^+,\ b \neq 1 \quad \log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y,$$

вытекающем из строгой монотонности логарифмической функции (см. ниже п. 1.8).

Пусть $b < 0,\ c < 0$.

Что можно сказать о свойствах 2, 3, 4, а также 6 и 7 при $a < 0$?

2. $\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|$;

3. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$;

если в 4. $\alpha = 2k$ — четное, то $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a |b|,\ 0 < a \neq 1,\ b \neq 0$;

если в 6. $\alpha = 2k$ — четное, то $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_{|a|} b,\ a \neq 0,\ a \neq \pm 1,\ b > 0$;

если в 7. $\alpha = 2k,\ \beta = 2p$ — четные, то $\log_{a^\alpha} b^\beta = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \log_{|a|} |b|,\ a \neq 0,$ $a \neq \pm 1,\ b \neq 0.$

Отметим еще два свойства логарифмов.

9. Определение знака логарифма.

Если число и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, то логарифм положителен. Если по разные стороны, то логарифм отрицателен.

Доказательство. Пусть выполняются условия $0 < a \neq 1,\ b > 0$, тогда существует $\log_a b$, и пусть $a > 1, \quad b > 1$. Запишем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ (свойство 1.) Если $\log_a b < 0$, то левая часть последнего равенства меньше единицы, а правая часть – больше единицы и равенство неверно. Если $\log_a b = 0$, то левая часть последнего равенства равна 1, а правая часть – больше единицы, равенство невозможно. Следовательно, $\log_a b > 0$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. Свойство 9 доказано.

10. Сравнение логарифмов. Логарифмирование неравенства.

Если основание логарифма больше единицы, то большему числу отвечает больший логарифм, т.е. если $a > 1$ и $b > c > 0$, то $\log_a b > \log_a c$. Если основание логарифма меньше единицы, то большему числу отвечает меньший логарифм, т.е. из $0 < a < 1$ и $b > c > 0$ следует $\log_a b < \log_a c$.

Доказательство. Воспользуемся свойством монотонности показательной функции: при $a > 1$ функция a^x возрастает, при $0 < a < 1$ функция a^x убывает. Рассмотрим случай $a > 1$. Используя основное логарифмическое тождество и соотношение между b и c, получим $a^{\log_a b} = b > c = a^{\log_a c}$, откуда следует, что $\log_a b > \log_a c$. Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично. Свойство 10 доказано.

Почему в определении $\log_a b \quad 0 < a \neq 1$ и $b > 0$?
Поскольку $\forall\, \alpha \in R$ число a^α определено лишь для $a > 0$ и $a^\alpha > 0$;
$\log_1 b$ не определен при любом $b \neq 1$, так как $\forall \alpha \in R \quad 1^\alpha = 1 \ \Rightarrow\ 1^\alpha \neq b$;
$\log_1 1$ считается не определенным потому, что так как $1^\alpha = 1$ при любом $\alpha \in R$, то по формальному определению логарифма $\log_1 1$ может быть любым действительным числом. По аналогичной причине невозможно однозначно определить логарифм по основанию числа нуль.

1.8. **Свойства логарифмической функции и ее график**

Определение. Функция вида $y = \log_a x$, где $0 < a \neq 1$ — постоянное число, а x — переменная (аргумент), называется *логарифмической* функцией.

I. $D[\log_a x] = (0, +\infty)$, так как $\forall x > 0$ и $\forall a:\ 0 < a \neq 1$
$\exists!\ y:\ a^y = x$, а по определению логарифма $y = \log_a x$ (см. п. 1.7).

II. $E[\log_a x] = (-\infty, +\infty)$, так как $\forall y \in R$ однозначно определено

$$x = a^y \ \Leftrightarrow\ \log_a x = y.$$

III. Из результатов п. II вытекает, что функция $\log_a x \quad (0 < a \neq 1)$ не ограничена ни сверху, ни снизу на своей области определения (промежутке $(0, +\infty)$).

IV. $\max \log_a x$ и $\min \log_a x$ нет.

Это доказывается от противного на основе результатов п. II.

V. Нет четности и нет нечетности, так как $D[\log_a x]$ не симметрична относительно начала координат.

VI. Нет периодичности, так как из приведенного определения периодичности функции вытекает, что у периодической функции область определения не имеет ограниченности ни сверху, ни снизу, а у логарифмической функции она ограничена снизу числом 0.

VII. $\log_a x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$, так как $\forall a \neq 0$, в том числе и $0 < a \neq 1$: $a^0 = 1$.

При $a > 1$ $\log_a x > 0$ на $(1, +\infty)$, $\log_a x < 0$ на $(0, 1)$, это вытекает из возрастания функции $y = \log_a x$ (см. VIII).

При $0 < a < 1$ $\log_a x < 0$ на $(1, +\infty)$, $\log_a x > 0$ на $(0, 1)$, это вытекает из убывания функции $y = \log_a x$ (см. VIII).

VIII. Функция $f(x) = \log_a x$ возрастает (убывает) на всей своей области определения (на промежутке $(0, +\infty)$) если $a > 1 \quad (0 < a < 1)$.

Доказательство. Фиксируем произвольные $x_2 > x_1 > 0$ и положим $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$, тогда $a^{y_1} = a^{\log_a x_1} = x_1 < x_2 = a^{\log_a x_2} = a^{y_2}$.

Пусть $a > 1$, в силу возрастания функции a^x следует $y_1 < y_2$ (в противном случае — $y_1 \geqslant y_2$ мы бы получили, что $x_1 = a^{y_1} \geqslant a^{y_2} = x_2$), следовательно, $\log_a x_1 < \log_a x_2$, а потому при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает.

Пусть $0 < a < 1$ в силу убывания функции a^x следует $y_1 > y_2$ (в противном случае — $y_1 \leqslant y_2$ мы бы получили, что $x_1 = a^{y_1} \leqslant a^{y_2} = x_2$), следовательно, $\log_a x_1 > \log_a x_2$, а потому при $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ убывает.

IX. Функция $f(x) = \log_a x$ строго выпукла вверх (вниз) на всей своей области определения (на промежутке $(0, +\infty)$) если $a > 1 \quad (0 < a < 1)$.

Доказательство. Фиксируем произвольные положительные действительные x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, откуда $(x_1 + x_2)/2 > 0$, тогда

$$(x_2 - x_1)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > 4x_1x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 > x_1x_2 \; .$$

В силу возрастания (убывания) функции $\log_a x$ при $a > 1$ $(0 < a < 1)$ и формул логарифма произведения и степени вытекает:

$$2\log_a \frac{x_1+x_2}{2} = \log_a \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 > (<)$$
$$> (<) \log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \text{откуда}$$
$$\log_a \frac{x_1+x_2}{2} > (<) \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2}\ ,$$

что и означает строгую выпуклость вверх (вниз) логарифмической функции с основанием $a > 1 \quad (0 < a < 1)$, что и требовалось доказать.

X. Графики:

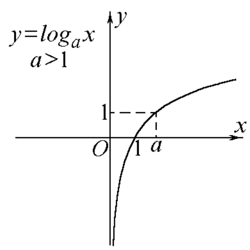

рис. 1.3 а

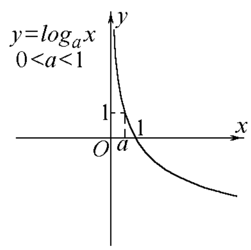

рис. 1.3 б

Если $a > 1$, то при $x \to +\infty$ $(x \to 0+0)$ $\log_a x \to +\infty$ $(\log_a x \to -\infty)$, если $0 < a < 1$, то при $x \to +\infty$ $(x \to 0+0)$ $\log_a x \to -\infty$ $(\log_a x \to +\infty)$.

Формулировки соответствующих определений и доказательства будут приведены в курсе математического анализа.

1.9. Свойства степенной функции с целым показателем и ее график

Определение. Функция вида $y = f(x) = x^n$, где $x \in R$ — переменная, $n \in Z$ — постоянное число, называется *степенной функцией с целым показателем.*

$n = 1$ это частный случай линейной функции, а $n = 2$ — частный случай квадратичной функции. При $n = 0$ $\forall x \neq 0$ $f(x) = 1$, $f(0)$ не определено.

А) Случай $n \geqslant 3$.

I. $D[x^n] = (-\infty, +\infty)$, так как $\forall x \in R$ однозначно определено число x^n, как произведение n чисел, каждое из которых равно x.

II. $E[x^n] = (-\infty, +\infty)$, если $n = 2k-1$, $k \geqslant 2$, $k \in N$,

$E[x^n] = [0, +\infty)$, если $n = 2k$, $k \geqslant 2$, $k \in N$.

Доказательство. $\forall n \in N$, $\forall y_0 \geqslant 0$ существует единственное число $x_0 \geqslant 0 \ :\ x_0 = \sqrt[n]{y_0}$, ${x_0}^n = y_0$. В то же время при $n = 2k$ из свойств операции умножения действительных чисел следует, что $\forall x \in R$ $x^n = x^{2k} \geqslant 0$, при $n = 2k-1$ $\forall$ $y_0 < 0$ существует $x_0 = -\sqrt[n]{|y_0|} \ :\ x_0^n = x_0^{2k-1} = (-\sqrt[n]{|y_0|})^n = (-1)^{2k-1}|y_0| = -|y_0| = y_0$.

III. Из результатов п. II и соответствующих определений вытекает, что на всей ее области определения при нечетном n функция x^n не ограничена ни сверху, ни снизу, а при четном n она ограничена снизу и не ограничена сверху.

IV. Если $n = 2k$, то существует $\min\limits_{x \in R} f(x) = f(0) = 0$, так как $\forall x \in R$: $x^n \geqslant 0$, не существует $\max\limits_{x \in R} f(x)$, что легко доказывается от противного на основе результатов п.II; если же $n = 2k-1$, то из п.II вытекает отсутствие наибольшего и наименьшего значений у функции x^n на всей ее области определения, что также доказывается от противного.

V. $D[x^n] = (-\infty, +\infty)$ симметрична относительно $x_0 = 0$.

Если $n = 2k$, то $\forall x \in R$ $(-x)^n = (-1)^n \cdot x^n = x^n$, то есть $\forall x \in R \Rightarrow f(-x) = f(x)$, следовательно, функция четная.

Если же $n = 2k - 1$, то $\forall x \in R$ $(-x)^n = (-1)^n \cdot x^n = -x^n$, то есть $\forall x \in R \Rightarrow f(-x) = -f(x)$, следовательно, функция нечетная.

VI. $\forall n \in N$ функция $y = x^n$ не периодическая. Предполагая существование числа $T \neq 0$ такого, что $\forall x \in R \Rightarrow (x+T)^n = x^n$, полагая $x = 0$, получим, что $T^n = 0$, а в силу результатов п. VII, будет следовать, что $T = 0$, пришли к противоречию.

VII. Из свойств операции умножения действительных чисел вытекает: если $n = 2k$, то $f(x) = x^n > 0$ на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, а если $n = 2k - 1$, то $f(x) = x^n > 0$ на интервале $(0, +\infty)$ и $f(x) = x^n < 0$ на интервале $(-\infty, 0)$. Так как $\forall n \in N$ при $x = 0 \Rightarrow x^n = 0$, то $x_0 = 0$ — единственный нуль функции.

VIII. Пусть x_1, x_2 — произвольные из действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $x_2 > x_1 \geqslant 0$, тогда $\forall n \in N$ в силу свойств числовых неравенств вытекает ${x_2}^n > {x_1}^n$, следовательно, функция $y = x^n$ возрастает на промежутке $[0, +\infty)$.

Пусть теперь x_1, x_2 — произвольные из действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $-x_1 < -x_2 \leqslant 0 \iff 0 \leqslant x_2 < x_1$.

Тогда при $n = 2k$ в силу четности функции и свойств неравенств $(-x_1)^n = x_1^n > x_2^n = (-x_2)^n$, следовательно, функция $y = x^n$ убывает на промежутке $(-\infty, 0]$,

при $n = 2k-1$ в силу нечетности функции и свойств неравенств $(-x_1)^n = -x_1^n < -x_2^n = (-x_2)^n$, следовательно, функция $y = x^n$ возрастает на промежутке $(-\infty, 0]$. В силу ее возрастания и на промежутке $[0, +\infty)$, она будет возрастающей и на всей области определения $(-\infty, +\infty)$, поскольку случаи $0 \geqslant x_1 < x_2$ и $-x_1 < -x_2 \leqslant 0$ уже рассмотрены, а при $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$, $x_1^n < 0^n = 0 < x_2^n \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in R:\ x_1 < x_2 \Rightarrow \Rightarrow (x_1)^n < (x_2)^n$.

IX. При $n \geqslant 2$ функция x^n строго выпукла вниз на всей своей области определения при n четном; при n нечетном она строго выпукла вниз на промежутке $[0, +\infty)$ и строго выпукла вверх на промежутке $(-\infty, 0]$.

Этот факт *для произвольного* $n > 1$ удается доказать с применением теорем, связанным со знаком второй производной функции, соответствующие теоремы доказываются в курсе математического анализа.

X. Графики функций:

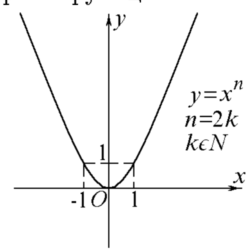

рис. 1.4 а

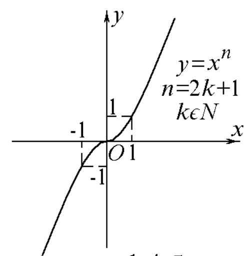

рис. 1.4 б

O(0 ; 0) — точка пересечения графика функции $y = x^n$ с осями Ox и Oy.

Б). Случай $n \leqslant -1$. Положим $n = -m$, где уже $m \in N$.

I. $D[x^n] = D[x^{-m}] = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, так как $\forall x \neq 0\ x^m \neq 0$, а потому $x^n = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$ определено, но при $x = 0 \Rightarrow x^m = 0$, поэтому $x^n = 1/x^m$ не определено.

II. $E[x^n] = E[x^{-m}] = (0, +\infty)$, если $n = -2k,\ k \in N$; $E[x^n] = E[x^{-m}] = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, если $n = -(2k-1),\ k \in N$. Этот случай доказывается аналогично случаю натурального значения n, отметим только, что так как $\forall x \neq 0\ :\ 1/x^m \neq 0$, а потому $y_0 = 0 \notin E[x^n]$.

III. Из результатов п. II следует неограниченность функции x^n ни сверху, ни снизу всей ее области определения, однако в соответствии с промежутками знакопостоянства этой функции она на промежутке $(0, +\infty)$ ограничена снизу и не ограничена сверху, в случае четного n она также ограничена снизу и не ограничена сверху на промежутке $(-\infty, 0)$, в случае нечетного n она ограничена сверху и не ограничена снизу на промежутке $(-\infty, 0)$.

IV. Таким же образом, как и в случае натурального n из п. II вытекает несуществование $\min\limits_{x \in D[f]} f(x)$ при $n = -(2k-1)$ и $\max\limits_{x \in D[f]} f(x)$ при любом $n \leqslant -1$. Это доказывается от противного.

Подробнее остановимся на доказательстве несуществования $\min\limits_{x \in D[f]} f(x)$ при $n = -2k$. Если предположить его существование, то он будет равен некоторому числу $m_0 > 0$. А согласно результатам п. II, в частности, для числа $m_0/2$ существует $x_0'\ :\ f(x_0') = m_0/2 < m_0$, пришли к противоречию.

V. $D[x^n] = D[x^{-m}] = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ симметрична относительно $x_0 = 0$.

Если $n = -2k \Leftrightarrow m = 2k$ $(k \in N)$, то $\forall x \in R$ $(-x)^n = 1/(-x)^m = = 1/(-x)^{2k} = 1/x^{2k} = 1/x^m = x^{-m} = x^n$, то есть $\forall x \in R$, $f(-x) = f(x)$, следовательно, функция четная.

Если же $n = -(2k-1) \Leftrightarrow m = 2k-1$, то $\forall x \in R$ $(-x)^n = 1/(-x)^m = = 1/(-x)^{2k-1} = -1/x^{2k-1} = -1/x^m = -x^{-m} = -x^n$, то есть $\forall x \in R$, $f(-x) = -f(x)$, следовательно, функция нечетная.

VI. Непериодичность функции вытекает из того, что число $x = 0 \notin D[x^n]$, поэтому, предполагая наличие периода $T \neq 0$ у этой функции, мы получим существование, например, числа $x = -T \in D[x^n]$, но число $x + T = 0 \notin D[x^n]$, тем самым, получим противоречие с определением периодической функции.

VII. Из п. II вытекает, что нулей функция не имеет, а интервалы знакопостоянства у нее такие же (в зависимости от четности или нечетности n), что и в случае натурального показателя n.

VIII. Функция $y = x^n$ убывает на промежутке $(0, +\infty)$ при любом $n \leqslant -1$, а также она убывает на промежутке $(-\infty, 0)$ при $n = -(2k-1)$ и возрастает на этом промежутке при $n = -2k$.

Для доказательства фиксируем произвольные $x_2 > x_1 > 0$, так как при этом ${x_2}^m > {x_1}^m > 0$, то в силу свойств числовых неравенств

$$ {x_2}^n = {x_2}^{-m} = \frac{1}{x_2^m} < \frac{1}{x_1^m} = {x_1}^{-m} = {x_1}^n. $$

Далее, рассматривая произвольные числа, обозначаемые за $-x_1$ и $-x_2$, где $-x_1 < -x_2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_2 < x_1$, совершенно аналогично случаю натурального показателя n на основе четности (нечетности) функции $y = x^n$ и свойств числовых неравенств доказывается, что $(-x_1)^n = (x_1)^n < (x_2)^n = = (-x_2)^n$, то есть $(-x_1)^n < (-x_2)^n$ при $n = -2k$ $((-x_1)^n = -(x_1)^x > > -(x_2)^n = (-x_2)^n$, то есть $(-x_1)^n > (-x_2)^n$ при $n = -(2k-1))$, стало быть, функция $y = x^n$ возрастает (убывает) на промежутке $(-\infty, 0)$.

Замечание. Необходимо отметить, что при $n = -(2k-1)$ убывания функции $y = x^n$ на *объединении промежутков* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ нет! Если, к примеру, $x_2 > 0 > x_1 \Rightarrow x_2 > x_1$, то также и ${x_2}^n > 0 > {x_1}^n$, то есть ${x_2}^n > {x_1}^n$.

IX. Функция x^n строго выпукла вниз на промежутке $(0, +\infty)$ при любом целом $n \leqslant -1$, при четном отрицательном n она также строго выпукла вниз на промежутке $(-\infty, 0)$, а при нечетном отрицательном n — строго выпукла вверх на этом промежутке.

Эти факты будут установлены ниже, в п. 1.10.

X. Графики функций:

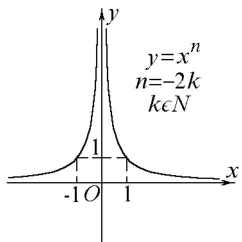

рис. 1.4 в

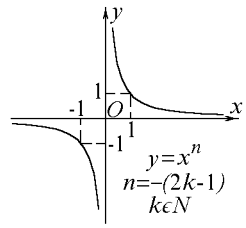

рис. 1.4 г

Отметим еще, что так как число 0 не принадлежит ни к области определения, ни к области значений функции $y = x^n$ в рассматриваемом случае, графики этих функций не имеют точек пересечения с осями координат.

При $n \leqslant -1$ можно обратить внимание на поведение функции при $x \to 0 \pm 0$ и $x \to \pm\infty$. Если $n = -2k$, то соответственно $f(x) \to +\infty$ и $f(x) \to 0 + 0$. Если $n = -(2k - 1)$, то соответственно $f(x) \to \pm\infty$ и $f(x) \to 0 \pm 0$. Знаний формулировок соответствующих определений и доказательств не требуется.

Замечание. В учебной литературе по определению кривые, являющиеся графиками функций $y = x^n$ при $n = 2$ и $n = -1$, называются соответственно *параболой* и *гиперболой.*

Дополнительный материал к разделу "Алгебра"

Материал этого дополнения знать весьма полезно и важно, поскольку он довольно часто используется при решении задач. Знакомство с ним полезно перед более подробным его изучением в курсе математического анализа.

Речь пойдет о понятии сложной функции, проиллюстрированного различными примерами.

Определение сложной функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X, которое (или, быть может, часть его) является областью изменения функции $x = \varphi(t)$, определенной на множестве T. Тогда говорят, что на множестве T определена сложная функция $y = f(\varphi(t))$, являющаяся суперпозицией двух функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$, x считают промежуточным аргументом этой сложной функции.

Отметим, что аналогично можно ввести определение сложной функции, являющейся суперпозицией произвольного конечного количества n (где $n \in N$, $n \geqslant 2$) функций $y = f_n(f_{n-1}(f_{n-2}(...(f_2(f_1(x)))...)))$, где x — независимая переменная, принимающая значения из множества X — области определения как функции $y_1 = f_1(x)$, так и всей сложной функции $y = f_n(f_{n-1}(f_{n-2}(...(f_2(f_1(x)))...)))$.

Для удобства будем считать, что область изменения E_i функции $y_i = f_i(y_{i-1})$ есть область определения D_{i+1} следующей функции $y_{i+1} = f_{i+1}(y_i)$, где $i = 1;\ 2;\ \dots;\ n-1$, $y_0 = x, y_n = y$, y_i $(i = 1;\ 2;\ \dots;\ n-1)$ — промежуточные аргументы этой сложной функции.

Примеры: 1^0. $y = f(\varphi(t)) = \sin t^2$, суперпозиция двух функций, здесь $y = f(x) = \sin x$, $x = \varphi(t) = t^2$, x — промежуточный аргумент;

2^0. $y = f(g(\varphi(t))) = e^{\cos\sqrt{t}}$, суперпозиция трех функций, здесь $y = f(u) = e^u$, $u = g(x) = \cos x$, $x = \varphi(t) = \sqrt{t}$, x, u — промежуточные аргументы.

3^0. $y = \log_2\left(\arcsin\left(\dfrac{x^2}{x^4+1}\right)\right)$, суперпозиция функций $y = f(u) = \log_2 u$, $u = g(v) = \arcsin v$, $v = \varphi(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$, здесь u, v — промежуточные аргументы. Читателям предлагается самостоятельно исследовать области определения и значений всех функций, составляющих данную суперпозицию, в том числе и область изменения функции $y = f(u(v(x))) = f(g(\varphi(x)))$.

Замечание. Отметим, что в примере 1^0 $x \geqslant 0$, хотя функция $y = \sin x$ определена для всех $x \in R$ (этим и объясняется оговорка в скобках "быть может, часть его"); в примере 2^0 $D[x] = [0, +\infty)$ и $E[x] = [0, +\infty)$ и хотя $D[g] = D[\cos] = (-\infty, +\infty)$ можно в данной ситуации рассматривать функцию косинус, определенную лишь на промежутке $[0, +\infty)$. Последнее обстоятельство и объясняет то "удобство", о котором говорилось в определении суперпозиции n функций. Отметим также, что в примере 3^0 функция $v = \varphi(x)$ есть результат выполнения арифметических действий над переменной x (возведения в квадрат и четвертую степень, то есть — умножения, сложения $x^4 + 1$ и деления), при этом можно функцию $v = \varphi(x)$ представить в виде суперпозиции функций: $w = h(x) = x^2$ и $v = \varphi(w) = \dfrac{w}{w^2+1}$, то есть $v = \varphi(h(x))$. Таким образом, количество функций, составляющих суперпозицию, не является, вообще говоря, однозначным.

Далее, рассмотрим вопрос о свойствах степенной функции с произвольным действительным показателем (с этими свойствами полезно познакомиться перед изучением этого вопроса в курсе математического анализа) и графике дробно-линейной функции.

1.10. Свойства степенной функции с действительным показателем и ее график

Определение. Функция вида $y = f(x) = x^\alpha$, где $x \in R$ — переменная, $\alpha \in R$ — постоянное число, называется *степенной функцией с действительным показателем.*

Выше были рассмотрены частные случаи этой функции при $\alpha = n \in Z^-$ и $\alpha = n \in Z^+$, говорилось и о случае $\alpha = n = 0$. Прежде всего мы отметим, что при любом действительном $x > 0$ выражение x^α можно с помощью основного логарифмического тождества, фиксируя произвольное действительное число a такое, что $0 < a \neq 1$, представить в виде $x^\alpha = a^{\log_a x^\alpha} = a^{\alpha \log_a x}$. Следовательно, на основе свойств изученных выше показательной и логарифмической функций на промежутке $(0, +\infty)$ можно считать определенной функцию $y = x^\alpha = a^{\log_a x^\alpha} = a^{\alpha \log_a x}$, тем самым рассматривая ее как суперпозицию трех функций: $y = a^u$, $u = \alpha v$, $v = \log_a x$ (то есть соответственно — показательной, линейной и логарифмической). Таким образом, на промежутке $(0, +\infty)$ при любом фиксированном $\alpha \in R$ можно считать определенной функцию $y = x^\alpha$.

Параллельно будут рассматриваться случаи $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$, которые в свою очередь следует разбить на подслучаи:

а) $\alpha \in R \setminus Q$ (то есть α иррациональное число); $\alpha \in Q$, то есть $\alpha = \dfrac{p}{q}$, где

б) $p = 2m - 1,\ q = 2n,\ \ p = -(2m - 1),\ q = 2n$;

в) $p = 2m,\ q = 2n - 1,\ \ p = -2m,\ q = 2n - 1$;

г) $p = 2m - 1,\ q = 2n - 1,\ \ p = -(2m - 1),\ q = 2n - 1$;

везде m и n фиксированные натуральные числа, причем НОД $(|p|; q) = 1$.

Выше, в конце изложения вопросов о свойствах показательной и логарифмической функций отмечалось (без доказательства) их поведение на границах области определения, то есть поведения при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $x \to 0 + 0$ (стремление к нулю справа, то есть оставаясь больше нуля). Фиксируем (для определенности) произвольное значение $a > 1$, представим на промежутке $(0, +\infty)$ x^α в виде $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$, тогда так как при $x \to +\infty$ $\log_a x \to +\infty$, то при $\alpha > 0 (< 0)$ $\alpha \log_a x \to +\infty(-\infty)$, а потому $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x} \to +\infty\ (0 + 0)$; при $x \to 0 + 0$ $\log_a x \to -\infty$, тогда при $\alpha > 0 (< 0)$ $\alpha \log_a x \to -\infty(+\infty)$, а потому $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x} \to 0 + 0\ (+\infty)$ (точно такие же результаты получаются, если рассматривать случай $0 < a < 1$). Следовательно, мы можем при $\alpha > 0$ естественным образом доопределить функцию $y = x^\alpha$ и при $x = 0$, полагая $\forall \alpha \in R^+ :\ 0^\alpha = 0$. При $\alpha < 0$ мы будем считать функцию $y = x^\alpha$ при $x = 0$ не определенной.

Поскольку при $\forall \alpha \in R \setminus Q$ (случай а)) и $\forall x \in R^-$ выражение x^α на множестве R не определено (то есть $x^\alpha \notin R$), а при $\alpha \in Q$ (случай б)) $x^\alpha = \sqrt[q]{x^p}$ также при $x \in R^-$ на множестве R не определено (при $x < 0$ $x^p < 0$, а $q = 2n$ — четное число), получаем в случаях а) и б)

I. $D[x^\alpha] = [0, +\infty)\ ((0, +\infty))$ при $\alpha > 0\ (\alpha < 0)$.

II. $E[x^\alpha] = [0, +\infty)\ ((0, +\infty))$ при $\alpha > 0\ (\alpha < 0)$.

Этот факт следует из следующих рассуждений: фиксируем произвольное $y_0 \in R^+$, то есть $y_0 > 0$, тогда представляя x^α в виде $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$ $(0 < a \neq 1)$, получаем, исходя из пп. II исследований показательной, линейной и логарифмической функций, $\exists!\ u_0 \in R\ :\ a^{u_0} = y_0$, $\exists!\ v_0 \in R\ :\ \alpha v_0 = u_0\ (v_0 = u_0/\alpha)$, $\exists!\ x_0 \in R^+\ (x_0 > 0)\ :\ \log_a x_0 = v_0\ (x_0 = a^{v_0})$, таким образом, $\forall y_0 \in R^+\ \exists!\ x_0 \in R^+\ :\ x_0^\alpha = a^{\alpha \log_a x_0} = a^{\alpha v_0} = a^{u_0} = y_0$, при этом $\forall x \in R^+\ x^\alpha = a^{\alpha \log_a x} > 0$, так как $E[a^x] = (0, +\infty)$, в то же время так как при $\alpha > 0 \quad 0^\alpha = 0$, окончательно получаем справедливость результата об области значений степенной функции при рассмотренных случаях ее показателя.

III. Соответствующие ограниченности и неограниченности функции вытекают из результатов п. II и IV.

IV. $\max x^\alpha$ нет при $\forall \alpha \in R \setminus \{0\}$, $\min x^\alpha$ нет при $\forall \alpha \in R^-$, а при $\forall \alpha \in R^+ \quad \min x^\alpha = 0^\alpha = 0$.

В случае отсутствия наибольшего и наименьшего значений (то есть при $\alpha < 0$ и отсутствия наибольшего значения при $\alpha > 0$) доказательство проводится в полной аналогии, как и в случае показательной функции $y = a^x$ при $0 < a \neq 1$, существование наименьшего значения функции при $\alpha > 0$ следует из его определения и несуществования отрицательных значений этой функции, установленных в п. II.

V. Функция x^α не является четной и не является нечетной.

Этот факт вытекает не симметричности $D[x^\alpha]$ относительно $x_0 = 0$.

VI. Функция x^α не является периодической.

Этот факт вытекает из того, что $D[x^\alpha]$ является ограниченной снизу числом 0, а в приведенном определении периодической функции предполагается неограниченность с обеих сторон (сверху и снизу) ее области определения, а также — из ее строгой монотонности (см. ниже п. VIII).

VII. Функция x^α не имеет нулей при любом $\alpha < 0$ и имеет единственный нуль $x_0 = 0$ при любом $\alpha > 0$; $\ x^\alpha > 0$ всюду на $(0, +\infty)$ при любом $\alpha \neq 0$.

Эти факты следуют из результатов п. II.

VIII. Функция x^α возрастает на $[0, +\infty)$ при любом $\alpha > 0$ и убывает на $(0, +\infty)$ при любом $\alpha < 0$.

Для доказательства фиксируем произвольные действительные $0 < x_1 < < x_2$, тогда, снова представляя на промежутке $(0, +\infty)\ \ x^\alpha$ в виде $a^{\alpha \log_a x}$ при $a > 1$, в силу возрастания функций a^x и $\log_a x$, а также — свойства 4 числовых неравенств (см. [1], раздел II, п. 2.1, вопрос 3) получаем, что $v_1 = \log_a x_1 < \log_a x_2 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = \alpha \log_a x_1 < (>) \alpha \log_a x_2 = u_2$ при $\alpha > 0 (< 0)$. Следовательно, $x_1^\alpha = y_1 = a^{u_1} < (>) a^{u_2} = y_2 = x_2^\alpha$, то есть x^α возрастает (убывает) на $(0, +\infty)$ при $\alpha > (<) 0$. Так как $\forall n \in R^+\ \ x^\alpha > 0$, то в случае $\alpha > 0$, полагая $0 = x_1 < x_2$, получаем $0 = x_1^\alpha < x_2^\alpha$.

IX. Функция x^α строго выпукла вниз на промежутке $[0, +\infty)$ при $\alpha > 1$ и при $\alpha < 0$, она строго выпукла вверх на этом промежутке при $0 < \alpha < 1$.

Эти факты для $\alpha > 0$ удается доказать с применением теорем, связанным со знаком второй производной функции. Соответствующие теоремы доказываются в курсе математического анализа.

Для $\alpha < 0$ доказательство можно провести методами элементарной математики, опираясь на строгую выпуклость показательной и логарифмической функций. Фиксируем произвольные положительные действительные x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, откуда $(x_1 + x_2)/2 > 0$, тогда в силу строгой выпуклости вверх функции $\log_a x$, строгой выпуклости вниз и возрастания функции a^x при $a > 1$, отрицательности n, основного логарифмического тождества и формулы логарифма степени будем иметь

$$\log_a \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \log_a \frac{x_1 + x_2}{2} < \alpha \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} \ ,$$

откуда

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^\alpha = a^{\log_a \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^\alpha} = a^{\alpha \log_a \frac{x_1+x_2}{2}} < a^{\alpha \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2}} <$$

$$< \frac{a^{\alpha \log_a x_1} + a^{\alpha \log_a x_2}}{2} = \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha}{2} \Rightarrow \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^\alpha < \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha}{2} \ .$$

X. Графики функций: случаи а) и б)

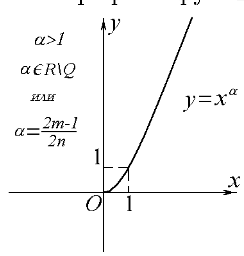

рис. 1.4 д

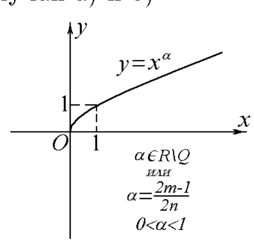

рис. 1.4 е

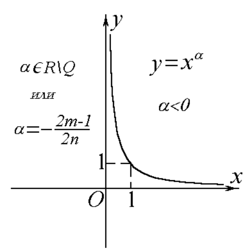

рис. 1.4 ж

O(0 ; 0) - точка пересечения графика функции $y = x^\alpha$ с осями Ox и Oy (в случаях $\alpha > 0$). О поведении этих функций на границах областей определения (в случаях $\alpha < 0$) сказано выше.

Переходим к рассмотрению случаев в) и г).

В случае в) $\quad \forall x \neq 0 \Rightarrow (-x)^p = x^p = |x|^p > 0 \quad p = 2m$, если $\alpha > 0$ и $p = -2m$, если $\alpha < 0$,

а в случае г) $\forall x \neq 0 \Rightarrow (-x)^p = -x^p$ (при $x > 0$ $-x < 0$ и $(-x)^p = -x^p = -|x|^p$, а при $x < 0$ $-x > 0$ и $(-x)^p = |-x|^p = |x|^p = -x^p \Leftrightarrow x^p = -|x|^p$), $p = 2m - 1$, если $\alpha > 0$ и $p = -(2m - 1)$, если $\alpha < 0$.

Если доопределить функции x^α в рассматриваемых случаях показателя α на все отрицательные значения x по правилам: $x^\alpha = |x|^\alpha$ в случае в) и $x^\alpha = -|x|^\alpha$ в случае г) (см., например, учебник [20]), мы естественным образом получим, что в случае в) $\forall x \neq 0 \Rightarrow \sqrt[q]{(-x)^p} = \sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q]{|x|^p} =$ $= |x|^{p/q} > 0$, поэтому вне зависимости от знака x считаем $(-x)^{p/q} \overset{def}{=}$ $= \sqrt[q]{(-x)^p}$ и $x^{p/q} \overset{def}{=} \sqrt[q]{x^p}$, тогда как раз и получатся равенства $(-x)^{p/q} =$ $= x^{p/q} = |x|^{p/q}$, а в случае г) с учетом нечетности числа q $(q = 2n-1)$ $\forall x > 0$ $(-x < 0) \Rightarrow \sqrt[q]{(-x)^p} = \sqrt[q]{-x^p} = -\sqrt[q]{x^p} = -\sqrt[q]{|x|^p} = -|x|^{p/q}$, поэтому если считать $(-x)^{p/q} \overset{def}{=} \sqrt[q]{(-x)^p}$, то как раз и получаем $(-x)^{p/q} =$ $= -|x|^{p/q} = -|(-x)|^{p/q}$, а $\forall x < 0$ $(-x > 0,\ x = -|x|) \Rightarrow \sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q]{-|x|^p} =$ $= -\sqrt[q]{|x|^p} = -|x|^{p/q}$, поэтому если считать $x^{p/q} \overset{def}{=} \sqrt[q]{x^p}$, то как раз и получаем $x^{p/q} = -|x|^{p/q}$.

Замечание. В случае $\alpha > 0$ равенства $x^\alpha = |x|^\alpha$ в случае в) и $x^\alpha = -|x|^\alpha$ в случае г) очевидным образом справедливы и для $x = 0$.

Переходим к формулировкам и обоснованиям свойств функции $y = x^\alpha$ в случаях в) и г).

Согласно проведенному доопределению степенной функции для указанных в рассматриваемых случаях значений показателя α получаем:

I. $D[x^\alpha] = (-\infty, +\infty)$ $((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$ при $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$.

II. $E[x^\alpha] = [0, +\infty)$ $((0, +\infty))$ при $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$ в случае в) ;

$E[x^\alpha] = (-\infty, +\infty)$ $((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$ при $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$ в случае г).

Доказательства. В случае в) все дословно повторяется так, как это проводилось для случаев а) и б), так как при этом $\forall x \in R^-$ $x^\alpha = |x|^\alpha > 0$, то для случая в) все доказано. В случае г) для случая произвольного $y_0 > 0$ доказывается существование единственного $x_0 > 0$ такого, что $x_0^\alpha = y_0$ в точности так же, как и для случаев а) и б). Таким же образом показывается, что при $\alpha > 0$ существует единственное $x_0 = 0$ такое, что $x_0^\alpha = 0$. Фиксируем теперь произвольное $-y_0 < 0$, тогда $y_0 > 0$, так как в случае г) $\forall x \in R^-$ $x^\alpha = -|x|^\alpha < 0$, то для $-y_0$ найдется единственное $-x_0 < 0$ $(x_0 >$ $> 0)$ такое, что $x_0^\alpha = y_0$, а тогда $(-x_0)^\alpha = -|-x_0|^\alpha = -|x_0|^\alpha = -x_0^\alpha = -y_0$.

III. Из результатов п. II и п. IV вытекают ограниченность и неограниченность функции на соответствующих промежутках.

IV. В случае в) $\max x^\alpha$ нет, $\min x^\alpha$ нет при $\alpha \in R^-$, а при $\alpha \in R^+$ $\min x^\alpha = 0^\alpha = 0$.

В случае г) $\max x^\alpha$ и $\min x^\alpha$ нет при $\alpha \in R^+$, при $\alpha \in R^-$ $\max x^\alpha$ и $\min x^\alpha$ нет ни на $(0, +\infty)$, ни на $(-\infty, 0)$.

Доказательство для случая в) проводится по той же схеме, что и в случаях а) и б) (с учетом только того, что $\forall x \in R^-$ $x^\alpha > 0$). В случае г) для

$\alpha > 0$ все вытекает из области значений функции (промежуток $(-\infty, +\infty)$), а для $\alpha < 0$ все доказательства проводятся по той же схеме, что и в случаях а) и б) на промежутке $(0, +\infty)$ (читателям предлагается это провести в качестве упражнения).

V. Функция x^α является четной в случае в) и является нечетной в случае г).

Эти факты вытекают из того, что $D[x^\alpha]$ является симметричной относительно $x_0 = 0$ и в случае в) $\forall x \in D[x^\alpha]$ следует равенство $(-x)^\alpha = = |-x|^\alpha = x^\alpha = x^\alpha$, а в случае г) из проведенных выше, перед замечанием рассуждений как раз и вытекает, что $\forall x \in D[x^\alpha]$ следует равенство $(-x)^\alpha = -x^\alpha$.

VI. Функция x^α не является периодической.

Этот факт легко доказывается от противного: предполагая существование периода $T \neq 0$, мы в случае $\alpha < 0$ получаем, что $x = T \in D[x^\alpha]$, а $x - T = 0 \notin D[x^\alpha]$, тем самым, нарушается первое условие в определении периодичности; в случае $\alpha > 0$ $\quad 0^\alpha = 0$, а $(0+T)^\alpha = T^\alpha \neq 0$, тем самым нарушается второе условие в определении периодичности.

VII. Функция x^α не имеет нулей при любом $\alpha < 0$ и имеет единственный нуль $x_0 = 0$ при любом $\alpha > 0$; $\ x^\alpha > 0$ всюду на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ в случае в) и $x^\alpha > 0 (< 0)$ всюду на $(0, +\infty)$ $((-\infty, 0))$ в случае г).

Эти факты следуют из результатов п. II, а также из определений функций x^α для $x < 0$ в рассматриваемых случаях.

VIII. В случае в) функция x^α возрастает на $[0, +\infty)$ и убывает на $(-\infty, 0]$ при $\alpha > 0$; возрастает на $(-\infty, 0)$ и убывает на $(0, +\infty)$ при $\alpha < 0$.

В случае г) функция x^α возрастает на $(-\infty, +\infty)$ при $\alpha > 0$; убывает на $(-\infty, 0)$ и убывает на $(0, +\infty)$ при $\alpha < 0$.

Доказательства для случая промежутков $[0, +\infty)$ или $(0, +\infty)$ проводятся точно так же, как и для случаев а) и б), а для промежутков $(-\infty, 0]$ или $(-\infty, 0)$ так же, как выше, в случае целых показателей, применяя свойства четности или нечетности функции.

Замечание. Следует обратить внимание на то, что в случае г) убывания функции $y = x^\alpha$ на *объединении промежутков* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ нет!

IX. Относительно выпуклости функции x^α на промежутках $[0, +\infty)$ и $(0, +\infty)$ результаты аналогичны результатам рассмотренных выше случаев а) и б). Для промежутков $(-\infty, 0]$ и $(-\infty, 0)$ в случае четности функции направления выпуклости такие же, как для промежутков $[0, +\infty)$ и $(0, +\infty)$, а в случае нечетности функции направления выпуклости меняются на противоположные (строгая выпуклость вниз заменяется на строгую выпуклость вверх).

Доказательство этих фактов предоставляется читателям.

X. Графики функций: случаи в)

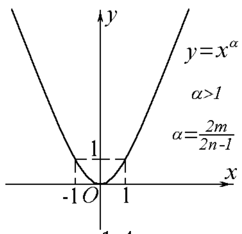

рис. 1.4 з

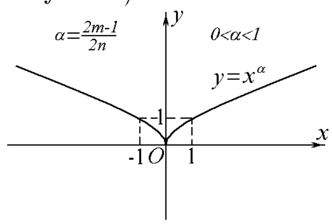

рис. 1.4 и

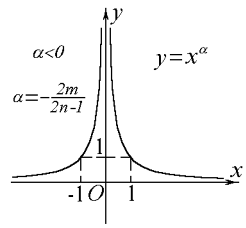

рис. 1.4 к

O(0 ; 0) - точка пересечения графика функции $y = x^\alpha$ с осями Ox и Oy (в случаях $\alpha > 0$). О поведении этих функций на границах областей определения в случаях $\alpha < 0$ (при $x \to 0+0$ и при $x \to +\infty$) сказано выше. Отметим, что в силу четности функций в случаях в) при $\alpha < 0$ если $x \to -\infty$, то $x^\alpha \to 0+0$, а если $x \to 0-0$ (то есть оставаясь меньше нуля), то $x^\alpha \to +\infty$.

X. Графики функций: случаи г)

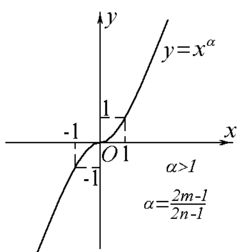

рис. 1.4 л

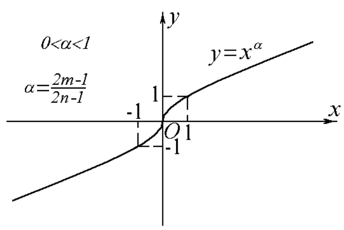

рис. 1.4 м

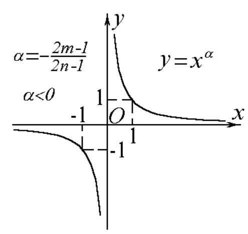

рис. 1.4 н

O(0 ; 0) - точка пересечения графика функции $y = x^\alpha$ с осями Ox и Oy (в случаях $\alpha > 0$). О поведении этих функций на границах областей определения в случаях $\alpha < 0$ (при $x \to 0+0$ и при $x \to +\infty$) сказано выше. Отметим, что в силу четности функций в случаях в) при $\alpha < 0$ если $x \to -\infty$, то $x^\alpha \to 0-0$, а если $x \to 0-0$ (то есть оставаясь меньше нуля), то $x^\alpha \to -\infty$.

Замечание. Завершая изложение вопроса о свойствах степенной функции с действительным показателем, отметим, что в случаях рационального α $\left(\alpha = \dfrac{p}{q}\right)$ требование НОД $(|p|; q) = 1$ является существенным. Так, например, $(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$, однако если считать $(-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} =$ $= \sqrt[6]{1} = 1 \neq -1$, хотя $2/6 = 1/3$. Это означает, что для отрицательных чисел под знаком радикала, вообще говоря, неверно свойство 7 корней (см. выше п. 1.5). Однако поскольку всякую обыкновенную дробь можно заменить равной ей несократимой дробью (у которой НОД модуля числителя и знаменателя равен 1) естественно считать (в случае данного примера)

$(-1)^{2/6} \stackrel{def}{=} (-1)^{1/3} = -1$, тем самым приравнивая $(-1)^{2/6}$ не арифметическому (алгебраическому) значению корня шестой степени из квадрата -1.

1.11. Дробно-линейная функция и ее график

Определение. Дробно-линейной функцией называется функция вида $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $a, b, c, d \in R$ — постоянные числа, причем $c \neq 0$. *3

Отметим, что в частном случае, когда $a = d = 0$, функция принимает вид $y = \dfrac{b}{cx} = \dfrac{k}{x}$, где $k = \dfrac{b}{c}$, а ее свойства и вид графика в полной мере аналогичны изученным выше свойствам функции $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ при $k > 0$.

Осуществим следующее преобразование дробно-линейного выражения

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b}{c(x+d/c)} = \frac{a(x+d/c)-(a/c)d+b}{c(x+d/c)} = \ (x \neq -d/c) \ =$$

$$= \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{x+d/c} = A + \frac{B}{x+\alpha}, \text{ где } A = \frac{a}{c}\ ,\ \alpha = \frac{d}{c}\ ,\ B = \frac{bc-ad}{c^2}\ .$$

Отметим, что при $B = 0 \Leftrightarrow bc = ab$ $\ f(x) \equiv A$ (для всех $x \neq -d/c$), поэтому график такой функции — прямая, параллельная оси Ox с выколотой одной точкой, абсцисса которой равна $-d/c$.

Если же $B \neq 0 \Leftrightarrow bc \neq ab$, то согласно правилам преобразования графиков (см. [1], гл. 6) график дробно-линейной функции строится из графика функции $y = \dfrac{B}{x}$, сдвигая его на $|\alpha|$ единиц вправо (влево) вдоль оси Ox при $\alpha < 0 (> 0)$, а также — на $|A|$ единиц вверх (вниз) вдоль оси Oy при $A > 0 (< 0)$. Если же $\alpha = 0 \Leftrightarrow d = 0$ или $A = 0 \Leftrightarrow a = 0$ то соответствующего сдвига вдоль оси Ox или оси Oy не происходит.

Примеры графиков дробно-линейных функций

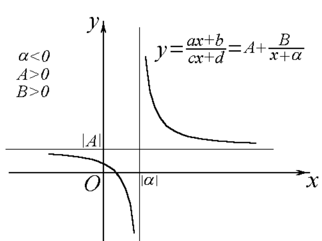

рис. 1.4 о

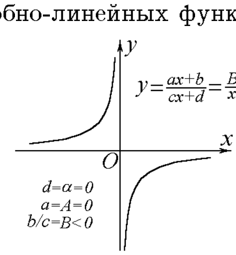

рис. 1.4 п

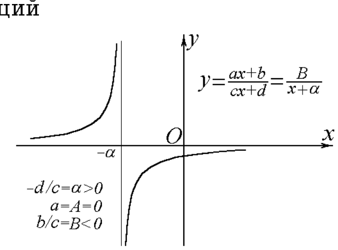

рис. 1.4 р

---

*3 Если $c = 0,\ d \neq 0$, то $y = f(x) = a_0x + b_0$ (где $a_0 = a/d,\ b_0 = b/d$) — линейная функция.