Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Алгебра и геометрия**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические и компьютерные методы решения задач естествознания**

**Математические методы обработки информации и принятия решений**

**Системное программирование и компьютерные науки**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по алгебре и геометрии в объеме, соответствующем профильному уровню подготовки программы по математике средней школы.

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
* **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решения задач в области профессиональной деятельности
* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппара

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. основные понятия, определения и факты аналитической геометрии, общей и линейной алгебры;
2. базовые алгоритмы алгебры;
3. основы теории исследования систем линейных алгебраических уравнений;
4. основы теории конечномерных пространств;
5. основы теории операторов и квадратичных форм в конечномерных пространствах.

**Уметь:**

1. применять на практике общую теорию и базовые алгоритмы решения задач алгебры и геометрии;
2. использовать алгебраический аппарат при решении задач в конечномерных пространствах;
3. анализировать структуру линейных операторов, характеристики квадратичных форм.

**Владеть:**

1. методами аналитической геометрии, общей и линейной алгебры, проблемно-задачной формой представления математических знаний;
2. навыками использования базовых алгоритмов алгебры и их анализа при решении задач.

**4.** Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 14 з.е., в том числе 288 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 216 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),****Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего****(часы**) | В том числе |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем)****Виды контактной работы, часы** | **Самостоятельная работа обучающегося,** **часы**  |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |  |
|  **Первый семестр** |  |  |  |  |  |
| 1.Операции над матрицами. Определитель. Обратная матрица. | **30** | 12 | 12 | **24** | **6** |
| 2.Множества. Бинарное отношение. Отображения. | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 3.Геометрические векторы. Линейные операции. | **6** | 2 | 2 | **4** | **2** |
| 4.Вещественное линейное пространство | **6** | 2 | 2 | **4** | **2** |
| 5.Ранг матрицы | **10** | 3 | 4 | **7** | **3** |
| 6.Системы линейных алгебраических уравнений | **18** | 7 | 6 | **13** | **5** |
| 7.Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 1 | **2** | 0 | 2 | **2** | **0** |
| 8.Текущий контроль успеваемости: коллоквиум | **6** | 0 | 2 | **2** | **4** |
| 9.Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов | **18** | 6 | 6 | **12** | **6** |
| 10.Аффинная система координат. Прямая и плоскость | **28** | 10 | 10 | **20** | **8** |
| 11.Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 2 | **2** | 0 | 2 | **2** | **0** |
| 12.Группы, кольца, поля.  | **28** | 12 | 10 | **22** | **6** |
| 13.Комплексные числа | **16** | 4 | 6 | **10** | **6** |
| 14.Многочлены над произвольным полем | **8** | 6 | 0 | **6** | **2** |
| 15.Линии и поверхности второго порядка | **30** | 6 | 6 | **12** | **18** |
| 16.Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 3 | **2** | 0 | 2 | **2** | **0** |
| Промежуточная аттестация: зачет | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| Промежуточная аттестация: устный экзамен | **36** | 0 | 0 | **0** | **36** |
| **Итого в первом семестре** | **252** | **72** | **72** | **144** | **108** |
|  **Второй семестр** |  |  |  |  |  |
| 1.Линейное пространство над произвольным полем  | **32** | 12 | 10 | **22** | **10** |
| 2.Евклидово и унитарное пространства | **34** | 10 | 8 | **18** | **16** |
| 3.Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 4 | **2** | 0 | 2 | **2** | **0** |
| 4.Линейные операторы в линейных пространствах | **50** | 16 | 20 | **36** | **14** |
| 5.Текущий контроль успеваемости: коллоквиум | **6** | 0 | 2 | **2** | **4** |
| 6.Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 5 | **2** | 0 | 2 | **2** | **0** |
| 7.Линейные операторы в евклидовом и унитарном пространствах. | **34** | 16 | 12 | **28** | **6** |
| 8.Билинейные и квадратичные формы. | **32** | 12 | 10 | **22** | **10** |
| 9.Линейное нормированное пространство. Линейные операторные уравнения | **20** | 6 | 4 | **10** | **10** |
| 10.Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 6 | **2** | 0 | 2 | **2** | **0** |
| Промежуточная аттестация: зачет | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| Промежуточная аттестация: устный экзамен | **36** | 0 | 0 | **0** | **36** |
| **Итого во втором семестре** | **252** | **72** | **72** | **144** | **108** |

**7.** Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**7.1.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

|  |
| --- |
| **Контрольная работа № 1** |
| 1. Может ли определитель матрицы

-го порядка () быть равен 69 и, если да, то при каком значении ?1. Исследовать и найти общее решение системы

в зависимости от значения .1. Найти первый столбец матрицы, обратной к матрице

-го порядка.1. Известно, что векторы линейного пространства линейно независимы. Выяснить, при каких значениях линейно независимы векторы .
2. Пусть — квадратные матрицы одинакового порядка и . Доказать, что присоединённые матрицы удовлетворяют соотношению .
3. Доказать, что если ранг квадратной матрицы равен единице, то существует число такое что .
 |
| **Контрольная работа № 2** |
| 1. Известно, что объём параллелепипеда, построенного на векторах равен 2. Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах и .
2. Найти все векторы , удовлетворяющие равенству , где .
3. В треугольнике известны его вершина и уравнения двух высот и . Составить уравнение стороны .
4. Составить уравнение биссекторной плоскости двугранного угла между плоскостями , в котором лежит точка .
5. Составить уравнение общего перпендикуляра к прямым
6. Центр окружности, описанной около правильного треугольника , расположен в точке . Найти координаты вершин и , если известно, что .
7. Плоский выпуклый четырёхугольник задан своими вершинами в пространстве: . Найти необходимые и достаточные условия того, что заданная точка является его внутренней точкой.
 |
| **Контрольная работа № 3** |
| 1. Решить уравнение .
2. Найти геометрическое место точек, изображающих на комплексной плоскости числа , удовлетворяющие условию

 .1. Пользуясь методом Лагранжа, определить вид линии второго порядка .
2. Составить уравнения касательных к эллипсу , перпендикулярных прямой .
3. Найти смежные классы
	1. мультипликативной группы комплексных чисел, отличных от нуля, по подгруппе положительных действительных чисел;
	2. мультипликативной группы комплексных чисел, отличных от нуля, по подгруппе чисел, равных по модулю единице.
 |
| **Контрольная работа № 4** |
| 1. Найти базисы суммы и пересечения подпространств и , где , , а .
2. Доказать, что множество образует линейное подпространство пространства . Найти два различных дополнительных подпространства к .
3. Построить какой-либо ортонормированный базис линейной оболочки матриц , , .
4. Найти ортогональную проекцию вектора на подпространство

 .1. Определить расстояние от многочлена до многообразия .
2. Доказать, что если две гиперплоскости не пересекаются, то они параллельны.
 |
| **Контрольная работа № 5** |
| 1. Оператор действует в пространстве по правилу . Построить матрицу этого оператора в базисе и указать какие-либо базисы его ядра и образа .
2. Найти все собственные значения и собственные векторы матрицы

 .1. Показать, что матрица диагонализуема, и привести её к диагональной подходящим преобразованием подобия.
2. Найти жорданову форму следующей матрицы и построить соответствующий канонический базис:

 .1. Оператор задан матрицей в базисе пространства со стандартным скалярным произведением. Найти матрицу сопряжённого оператора в этом же базисе .
2. Найти квадратный корень из матрицы .
3. Известно, что операторы удовлетворяют условию: произведение является тождественным оператором в пространстве . Доказать, что если пространства и имеют разную размерность, то произведение не может быть тождественным оператором в пространстве .
 |
| **Контрольная работа № 6** |
| 1. Линейный оператор задан в некотором ортонормированном базисе матрицей

 .Построить ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора и найти его матрицу в построенном базисе.1. Найти канонический вид матрицы

и указать ортогональную матрицу , такую что .1. Пусть – положительно определённый линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве . Доказать, что существует положительное число такое, что для любого вектора справедливо неравенство .
2. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

к каноническому виду и написать этот канонический вид.1. Найти нормальное псевдорешение системы линейных алгебраических уравнений
 |

**Вопросы к коллоквиуму (первый семестр)**

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. Для не сдавших коллоквиум зачёт (и зачётная комиссия) начинается с вопросов по теоретическому материалу коллоквиума. Билет коллоквиума содержит один вопрос из следующего списка:

1. Перестановки.
2. Определитель, свойства определителя.
3. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
4. Разложение определителя по строке (столбцу). Определитель произведения матриц.
5. Обратная матрица. Критерий обратимости.
6. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
7. Ранг матрицы и линейная зависимость её строк (и столбцов).
8. Ранг произведения матриц. Инвариантность ранга относительно элементарных преобразований.
9. Системы линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Правило Крамера.
10. Критерий совместности и определённости системы линейных алгебраических уравнений.
11. Исследование и решение системы линейных алгебраических уравнений общего вида. Общее решение.
12. Эквивалентность систем линейных алгебраических уравнений. Элементарные преобразования систем.
13. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений.
14. Линейное пространство. Арифметическое пространство.
15. Линейная зависимость в линейном пространстве.
16. Базис и размерность линейного пространства.
17. Линейное подпространство и линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Определение и простейшие свойства.
18. Геометрические свойства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений.
19. Геометрические свойства решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений. Общее решение.

**Вопросы к коллоквиуму (второй семестр)**

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. Для не сдавших коллоквиум зачёт (и зачётная комиссия) начинается с вопросов по теоретическому материалу коллоквиума. Билет коллоквиума содержит один вопрос из следующего списка:

1. Линейные операторы. Определение, основные свойства, примеры. Теорема о существовании и единственности оператора по заданным образам базисных векторов.
2. Матрицы линейных операторов. Взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и матрицами.
3. Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц.
4. Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и его образа.
5. Матрицы линейного оператора в различных базисах.
6. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.
7. Образ и ядро линейного оператора.
8. Произведение линейных операторов. Матрица произведения.
9. Обратный оператор. Критерий обратимости.
10. Инвариантные подпространства. Индуцированный оператор.
11. Инвариантные подпространства минимальной размерности (в комплексном и вещественном случаях).
12. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Определение и простейшие свойства. Примеры.
13. Характеристический многочлен линейного оператора. Определение и простейшие свойства.
14. Условие существования собственных векторов линейного оператора. Собственные векторы линейного оператора в комплексном пространстве.
15. Собственное подпространство. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения.
16. Операторы простой структуры. Критерий простой структуры.
17. Треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.
18. Нильпотентный оператор. Определение, простейшие свойства, примеры.
19. Расщепление линейного оператора.
20. Корневые векторы. Канонический базис корневого подпространства.
21. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический базис.
22. Теорема Гамильтона-Кэли.
23. Подобные матрицы. Критерий подобия.

**7.2.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

|  |
| --- |
| **Зачетная работа первого семестра** |
| **Вариант 1 (для проведения в группах)** |
| 1. Вычислить определитель n-го порядка

 ,где .1. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений
2. В аффинной системе координат написать уравнение прямой, проходящей через точку и равноудалённой от точек и .
3. Составить параметрическое уравнение прямой, параллельной прямой

и пересекающей прямые и .1. Построить однородную систему уравнений по заданной фундаментальной системе решений: .
2. Вычислить объём параллелепипеда , зная его вершину и координаты концов выходящий из неё рёбер: .
3. На плоскости заданы две системы координат: и . Вторая система получена из первой поворотом вокруг точки на угол в направлении кратчайшего поворота от к . Найти координаты точки в первой системе координат, если известны её координаты во второй системе координат.
4. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми и .
5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку и удаленной от точки на расстояние 1, а от точки на расстояние 3.
6. Решить уравнение в комплексных числах: .
7. Найти все образующие элементы циклической группы 11-го порядка.
8. Определить тип кривой, заданной уравнением

и найти уравнения осей ее канонической системы координат. |
| **Вариант 2 (для проведения зачетной комиссии)** |
| 1. Вычислить определитель n-го порядка

где .1. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений
2. В аффинной системе координат написать уравнение прямой, проходящей через точку и равноудалённой от точек и .
3. Вычислить ранг матрицы

 .1. Составить параметрическое уравнение прямой, параллельной прямой

и пересекающей прямые и 1. В треугольнике заданы уравнение стороны и медиан , . Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины .
2. Написать уравнение плоскости , проходящей через начало координат перпендикулярно прямой

,найти расстояние от точки до этой плоскости и координаты проекции этой точки на плоскость .1. Определить тип поверхности, заданной уравнением .
2. Найти геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию .
 |
| **Зачетная работа второго семестра** |
| **Вариант 1 (для проведения в группах)** |
| 1. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств и где , , ; , , .
2. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейной оболочки векторов , , , .
3. Найти угол между вектором и линейной оболочкой векторов , , .
4. Найти канонический базис и жорданову форму матрицы

 .1. Доказать, что неоднородная система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда вектор-столбец ортогонален всем решениям сопряженной однородной системы .
2. В пространстве многочленов со стандартным скалярным произведением задан ортогональный оператор с определителем, равным , который переводит многочлен в , а многочлен в . Найти матрицу оператора в базисе .
3. Найти нормальный вид квадратичной формы

и приводящее к нему треугольное преобразование координат.1. Найти нормальное псевдорешение системы уравнений
2. В пространстве введено скалярное произведение

Найти матрицу оператора, сопряженного к оператору дифференцирования, в базисе .1. Доказать, что пространство является прямой суммой подпространств и , и найти проекцию многочлена на параллельно , если , .
 |
| **Вариант 2 (для проведения зачетной комиссии)** |
| 1. Найти базисы , если задано однородной системой

а является ортогональным дополнением к множеству решений системы1. Найти базисы образа и ядра линейного оператора, отображающего матрицы , , , соответственно в матрицы , , , .
2. Построить жорданову форму и канонический базис для матрицы

 .1. Найти расстояние от точки, заданной вектором до линейного аффинного многообразия , заданного системой уравнений
2. Выписать канонический вид и приводящее к этому виду ортогональное преобразование координат для квадратичной формы

.1. Найти двумерное инвариантное подпространство для линейного оператора, действующего в пространстве и заданного в некотором его базисе матрицей

 . |

**Вопросы к экзамену**

Экзамен сдается в устной форме. В экзаменационном билете – два вопроса из приведенных ниже списков по семестрам.

**Первый семестр**

**Линейная алгебра**

1. Операции над матрицами и их свойства.
2. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Приведение к диагональному виду.
3. Перестановки, транспозиции, чётность.
4. Определитель и его свойства как функции столбцов (строк).
5. Определитель транспонированной матрицы.
6. Определитель произведения матриц.
7. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
8. Невырожденные матрицы. Обратные матрицы. Критерий обратимости матрицы.
9. Линейное пространство. Определение и примеры. Арифметическое пространство.
10. Линейная зависимость в линейном пространстве.
11. Базис и размерность линейного пространства.
12. Переход к другому базису, матрица перехода.
13. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
14. Ранг матрицы и линейная зависимость строк и столбцов.
15. Ранг произведения матриц. Ранг матрицы и элементарные преобразования.
16. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.
17. Системы линейных алгебраических уравнений. Эквивалентность систем. Элементарные преобразования систем.
18. Системы с невырожденной матрицей. Правило Крамера.
19. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений. Критерий единственности решения.
20. Исследование системы линейных алгебраических уравнений общего вида. Главные и свободные неизвестные. Общее решение системы.
21. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений. Число арифметических операций в методе Гаусса.
22. Линейное подпространство. Геометрические свойства множества решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение.
23. Линейное многообразие. Геометрические свойства множества решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений. Общее решение.

**Аналитическая геометрия**

1. Направленные отрезки. Свободный вектор.
2. Линейные операции над векторами. Координаты вектора.
3. Проекции вектора. Свойства линейности проекций.
4. Линейная зависимость векторов. Коллинеарные и компланарные векторы.
5. Аффинная система координат. Преобразование координат.
6. Преобразования прямоугольных декартовых координат. Ортогональные матрицы.
7. Скалярное произведение геометрических векторов. Скалярное произведение в прямоугольных декартовых координатах.
8. Векторное произведение векторов.
9. Смешанное произведение векторов.
10. Векторное и смешанное произведения в прямоугольных декартовых координатах.
11. Алгебраические линии и поверхности. Инвариантность порядка линии (поверхности).
12. Параметрические уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве.
13. Общее уравнение прямой на плоскости в аффинной системе координат. Критерий параллельности вектора прямой.
14. Общее уравнение плоскости в пространстве в аффинной системе координат. Критерий параллельности вектора плоскости.
15. Взаимное расположение двух прямых на плоскости и плоскостей в пространстве.
16. Пучок прямых на плоскости и плоскостей в пространстве.
17. Полуплоскости и полупространства.
18. Уравнения прямой в пространстве.
19. Взаимное расположение прямых в пространстве.
20. Метрические задачи на прямую и плоскость в прямоугольных координатах.
21. Общее уравнение линии второго порядка на плоскости. Матричная запись общего уравнения и его квадратичной части.
22. Приведённые уравнения линии второго порядка на плоскости. Метод вращений.
23. Классификация линий второго порядка на плоскости.
24. Эллипс. Фокусы и директрисы.
25. Гипербола. Фокусы и директрисы.
26. Парабола. Фокус и директриса.
27. Общее уравнение поверхности второго порядка в пространстве. Матричная запись общего уравнения и его квадратичной части.
28. Приведённые уравнения поверхности второго порядка. Метод вращений.
29. Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы и цилиндрические поверхности.
30. Прямолинейные образующие алгебраических поверхностей второго порядка.

**Общая алгебра**

1. Декартово произведение множеств и бинарное отношение. Отношение эквивалентности. Фактор-множество.
2. Отображения. Обратное отображение.
3. Алгебраические операции. Обобщённый закон ассоциативности.
4. Группы. Основные свойства.
5. Подгруппы. Симметрическая и знакопеременная группы.
6. Группа невырожденных матриц. Группа невырожденных треугольных матриц. Группа ортогональных матриц.
7. Конечные группы. Теорема Лагранжа.
8. Степени элемента. Циклические группы. Подгруппы циклической группы.
9. Подгруппы, смежные классы, нормальные делители.
10. Изоморфизм групп.
11. Гомоморфизм групп.
12. Кольцо.
13. Поле. Характеристика поля. Алгебраическое расширение поля.
14. Кольцо вычетов. Поле вычетов по простому модулю.
15. Линейное пространство над полем. Число элементов в конечном поле.
16. Поле комплексных чисел. Комплексная плоскость.
17. Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент произведения комплексных чисел.
18. Возведение в степень комплексного числа. Формула Муавра.
19. Извлечение корня из комплексного числа.
20. Группа корней из единицы. Первообразные корни.
21. Кольцо многочленов. Деление с остатком.
22. Наибольший общий делитель, его свойства. Алгоритм Евклида.
23. Значения многочлена и корни. Теорема Безу.
24. Многочлены как формальные выражения и как функции. Эквивалентность двух определений равенства многочленов.
25. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на линейные множители.
26. Каноническое разложение многочлена над полем комплексных чисел. Кратность корня.
27. Каноническое разложение многочленов над полем вещественных чисел.
28. Формулы Виета. Симметрические многочлены.

**Второй семестр**

1. Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.
2. Изоморфизм линейных пространств.
3. Сумма и пересечение линейных пространств.
4. Прямая сумма линейных пространств.
5. Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
6. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.
7. Изометрия.
8. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости.
9. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.
10. Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.
11. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. QR-разложение матрицы.
12. Линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Гиперплоскость в евклидовом и унитарном пространстве.
13. Линейные операторы. Матрица линейного оператора.
14. Матрица линейного оператора при переходе к другому базису. Эквивалентность и подобие матриц.
15. Линейное пространство линейных операторов и матриц.
16. Произведение линейных операторов и его матрица.
17. Ядро и образ линейного оператора. Каноническая пара базисов.
18. Линейные функционалы. Сопряжённое пространство. Линейные функционалы и гиперплоскости.
19. Обратный оператор. Критерии обратимости.
20. Собственные значения и собственные векторы. Операторы простой структуры и диагонализуемые матрицы.
21. Характеристический многочлен линейного оператора. Условие существования собственных значений.
22. Собственное подпространство. Геометрическая и алгебраическая кратности собственных значений.
23. Инвариантные подпространства. Сужение оператора.
24. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.
25. Сдвиг оператора, нильпотентность и обратимость его сужений.
26. Корневые подпространства. Расщепление линейного пространства в прямую сумму корневых подпространств.
27. Жорданов базис и жорданова матрица линейного оператора в комплексном пространстве.
28. Критерий подобия матриц.
29. Теорема Гамильтона-Кэли. Минимальный многочлен.
30. Инвариантные подпространства минимальной размерности.
31. Вещественный аналог жордановой формы.
32. Сопряжённый оператор. Существование и единственность. Матрица сопряжённого оператора.
33. Нормальный оператор и нормальная матрица.
34. Блочно-диагональная форма вещественной нормальной матрицы.
35. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы. Эрмитово разложение линейного оператора.
36. Симметрические операторы и симметрические матрицы.
37. Унитарные операторы и унитарные матрицы.
38. Блочно-диагональная форма ортогональной матрицы.
39. Знакоопределённые операторы и матрицы. Квадратный корень из оператора.
40. Сингулярные числа и сингулярные векторы. Полярное разложение оператора (матрицы).
41. Ортогональные дополнения ядра и образа линейного оператора. Теорема и альтернатива Фредгольма.
42. Билинейные и квадратичные формы. Приведение к каноническому виду. Конгруэнтность и эрмитова конгруэнтность.
43. Закон инерции квадратичных форм.
44. Приведение квадратичной формы к главным осям.
45. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.
46. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
47. Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом и унитарном пространствах.
48. Гиперповерхность второго порядка в евклидовом пространстве. Приведённые уравнения.
49. Нормированное пространство. Нормы Гёльдера.
50. Длина вектора. Тождество параллелограмма и критерий евклидовости нормы.
51. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве.
52. Задача о наилучшем приближении в конечномерном нормированном пространстве.
53. Линейный оператор в нормированных пространствах. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного оператора.
54. Матричные нормы. Унитарно инвариантные нормы.
55. Сингулярное разложение матрицы и обобщённое решение линейных систем.
56. Вариационные (экстремальные) свойства собственных значений самосопряжённого оператора (матрицы).
57. Вариационные (экстремальные) свойства сингулярных чисел.
58. Соотношения разделения собственных значений и сингулярных чисел матриц и подматриц.

*Примеры экзаменационных билетов*:

1. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
2. Метрические задачи на прямую и плоскость в прямоугольных координатах.
3. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства..
4. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.

|  |
| --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)**  |
| ОценкаРО исоответствующие виды оценочных средств  | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания***Коллоквиум,**Экзамен* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения***Контрольная работа, зачет* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки (владения, опыт деятельности)***Экзамен*  | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

|  |
| --- |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** |
| Результаты обучения | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**1. основные понятия и методы матричного анализа;
2. методологию применения понятия вещественного линейного пространства для изучения задач матричного анализа;
3. основы теории линий и поверхностей второго порядка;
4. основы общей алгебры – теории групп, колец и полей;
5. основы теории многочленов над произвольным полем;
6. основы теории операторов в конечномерных линейных пространствах;
7. основы теории билинейных и квадратичных форм в конечномерных пространствах.

**Уметь:** 1. применять на практике алгоритмы матричного анализа и методы вычисления определителей;
2. применять методы векторного анализа для решения геометрических задач;
3. решать задачи на плоскости и в пространстве, связанные с прямыми и плоскостями;
4. решать задачи на плоскости и в пространстве, связанные с линиями и поверхностями второго порядка;
5. решать задачи в конечномерных линейных пространствах над произвольным полем;
6. решать задачи в конечномерных евклидовых и унитарных пространствах;
7. описывать и анализировать свойства линейных операторов в конечномерных линейных пространствах;
8. применять на практике алгоритмы решения задач, связанных с билинейными и квадратичными формами в конечномерном пространстве.

**Владеть:** 1. навыками решения и исследования систем линейных алгебраических уравнений;
2. навыками решения задач координатным методом;
3. приемами решения задач в поле комплексных чисел и в кольце многочленов;
4. навыками построения канонических форм линейных операторов;
5. навыками построения канонического вида квадратичных форм.
 | ОПК-1.Б |
| **Знать:**1. методологию анализа основных моделей, решаемых в матричном анализе;
2. подходы анализа структурных свойств линейных операторов в конечномерных линейных пространствах;
3. классификацию линейных операторов в евклидовых и унитарных пространствах;
4. методологию анализа квадратичных форм в конечномерном пространстве.

**Уметь:** 1. модифицировать алгоритмы и методы решения задач алгебры при переходе к общим числовым полям;
2. модифицировать алгоритмы решения задач в конечномерных линейных пространствах над произвольным полем;
3. анализировать и модифицировать методы решения задач в евклидовых и унитарных пространствах;
4. анализировать и описывать характерные особенности операторы, действующие в евклидовых и унитарных пространствах;
5. модифицировать и анализировать алгоритмы решения задач, связанных с квадратичными формами в конечномерном пространстве.

**Владеть:** 1. навыками анализа и решения линейных операторных уравнений в конечномерных пространствах.
 | ОПК-2.Б |
| **Владеть:** 1. навыками исследования и решения метрических задач в конечномерных линейных пространствах;
2. навыками решения матричных задач с использованием операторных моделей;
3. основами теории нормированных линейных пространств и описания линейных операторов в нормированных пространствах.
 | ПК-2.Б |

**8.** Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Проспект, 2012.
2. Ким Г. Д., Крицков Л. В. Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи, Т.1-2. М.: Планета знаний, 2007, 2009.
3. Воеводин В. В. Линейная алгебра. Лань, 2006.
4. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007.
5. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. Лань, 2006.
6. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Лань, 2010.

Дополнительная литература:

1. Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1964.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2009.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007.
5. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: МЦНМО, 2009.
6. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. Лань, 2008
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Лань, 2011.
8. Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976.
9. Шикин Е. В. Линейные пространства и отображения. М.: Изд-во МГУ, 1987.
10. Шилов Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969.

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

**9.** Язык преподавания - русский.

**10.** Преподаватели:

профессор факультета ВМК МГУ Е.Е. Тыртышников,

доценты факультета ВМК МГУ Г.Д.Ким, В.С. Панферов, Л.В.Крицков, А.Б.Будак, А.И.Фалин, Н.И.Ионкин, В.А.Морозова, Н.Б.Есикова, С.Г.Руднев, И.В.Рублев, Востриков И.В.,

старший преподаватель факультета ВМК МГУ И.Н.Смирнов,

ассистенты факультета ВМК МГУ О.Н.Бобылева, О.С.Лебедева, И.С.Мокроусов, Ю.Р. Нестеренко.

**11.** Авторы программы:

профессора факультета ВМК МГУ В. А. Ильин, Е.Е.Тыртышников, доценты факультета ВМК МГУ Г. Д. Ким, В.С. Панферов, Л.В. Крицков.