А.Г. Белов, В.Я. Галкин

МОМЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОЖНОГО ЗАКОНА ПУАССОНА С ОБОБЩАЮЩИМ ПУАССОНОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Введение. При описании множественных процессов в различных областях естествознания приходится сталкиваться с законом Пуассона, обобщенным пуассоновским же распределением [1,8,13,14]. К таким моделям приводит следующая стохастическая постановка.

Рассмотрим дискретную случайную величину (с.в.)

$$\zeta = \zeta_1 + 2\zeta_2 + \ldots + k\zeta_k,$$

являющуюся взвешенной суммой k независимых пуассоновских с.в. $\zeta_j \sim Po(\lambda_j)$. Характеристическая функция (х.ф.) для ζ имеет вид

$$\varphi_\zeta(t) = Ee^{it\zeta} = \prod_{j=1}^{k} \exp\left\{\lambda_j(e^{ijt}-1)\right\} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(e^{ijt}-1)\right\},$$

а её функция вероятностей (ф.в.) $p_n = P\{\zeta = n\}$ может быть записана в виде (*k-1*)–мерной суммы со связями [1,2]:

$$p_n = e^{-\lambda} \sum_{i_j=0,\ j=k,\ldots,2}^{\left[(n-I_{j+1}^{(k)})/j\right]} \frac{\lambda_1^{\,n-I_2^{(k)}}}{(n-I_2^{(k)})!} \prod_{j=2}^{k} \frac{\lambda_j^{\,i_j}}{i_j!}, \quad n = 0,1,\ldots;$$

здесь приняты обозначения

$$\lambda = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j, \quad I_l^{(j)} = \sum_{\alpha=l}^{j} \alpha i_\alpha$$

для любых целых $l \le j$, $[z]$ – целая часть числа z.

Рассмотрим теперь условную с.в. ξ/ζ, имеющую пуассоновское распределение с параметром $\varepsilon\zeta$, $0 < \varepsilon \le 1$, $\xi/\zeta \sim Po(\varepsilon\zeta)$. Формулы х.ф. и ф.в. для рассматриваемой ниже с.в. ξ соответственно равны

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\xi}(t) &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\exp\{\varepsilon j(e^{it}-1)\}-1)\right\} = \\
&= q_0 \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} y_j (\exp\{\varepsilon j e^{it}\}-1)\right\},
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
q_n &= q_0 \frac{\varepsilon^n}{n!} G_n(y_1,\ldots,y_k) = \\
&= q_0 \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^{n} g_n^{(m)}(y_1,\ldots,y_k), \quad n = 0,1,\ldots,
\end{aligned} \tag{2}
$$

где $q_0 = P\{\xi = 0\} = \exp\left\{-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (1-e^{-\varepsilon j})\right\} = \exp\{y_0 - \lambda\}$, и приняты обозначения $y_j = \lambda_j e^{-\varepsilon j}$, $j = 1,2,\ldots,k$, $y_0 = \sum_{j=1}^{k} y_j$, многочлены $G_n = G_n(y_1,\ldots,y_k)$ степени n [2,3] задаются экспоненциальной производящей функцией (э.п.ф.)

$$
G(t) = G(t;y_1,\ldots,y_k) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} y_j (e^{jt}-1)\right\}, \tag{3}
$$

представимы в виде [3]

$$
\begin{aligned}
G_r &= r! \sum_{I_1^{(r)}=r} \prod_{m=1}^{r} \Big(\sum_{j=1}^{k} j^m \lambda_j\Big)^{i_m} (m!)^{-i_m} (i_m!)^{-1} = \\
&= \sum_{j=0}^{r} \Delta^j 0^r \prod_{m=2}^{k} \sum_{i_m=0}^{\left[(j-I_2^{(m-1)})/m\right]} \frac{\Big(\sum_{l=1}^{k} C_l^m \lambda_l\Big)^{i_m}}{i_m!} \frac{(g_1^{(1)})^{j-I_2^{(k)}}}{(j-I_2^{(k)})!}
\end{aligned} \tag{4}
$$

и удовлетворяют рекуррентным соотношениям для $n=0,1,\ldots$

$$
G_{n+1} = \sum_{j=1}^{k} j y_j \Big(1 + \frac{\partial}{\partial y_j}\Big) G_n, \quad G_0 = 1, \tag{5}
$$

$$
G_{n+1} = \sum_{j=1}^{k} j y_j \sum_{m=0}^{n} C_n^m j^{n-m} G_m = \sum_{l=0}^{n} C_n^l g_{l+1}^{(1)} G_{n-l}, \tag{6}
$$

$$
G_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m G_{n-m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1}) G_m(\lambda_k), \tag{7}
$$

где $\Delta^j 0^r = j!\sigma_r^{(j)} = \frac{d^r}{dt^r}(e^t - 1)^j\Big|_{t=0}$ – числа Моргана, а однородные степени m полиномы $g_n^{(m)}(y_1,\ldots,y_k)$ порождаются э.п.ф. [2, 4, 7]

$$g_m(t) = g_m(t;y_1,\ldots,y_k) = \sum_{n=m}^{\infty} g_n^{(m)} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{m!}\left(\sum_{j=1}^{k} y_j(e^{jt} - 1)\right)^m.$$

В настоящей статье изучены явные выражения и имеющиеся рекуррентности всевозможных моментных характеристик с.в. ξ. Как следствия для $k=1,2$ приведены моменты и рекуррентные соотношения на них соответственно распределений Неймана $Ne(\lambda_1,\varepsilon)$ [8] и Стирлинга-Эрмита $SHe(\varepsilon,\lambda_1,\lambda_2)$ [3, 9, 11, 12].

I. Семиинварианты. Пожалуй, наиболее просто записываемыми из всех моментных характеристик оказываются семиинварианты (обычные κ_r, а также факториальные $(\kappa)_r$ – [5,с.110]). Производящая функция факториальных семиинвариантов $w(t) = \ln \quad P(1+t)$ имеет вид

$$w(t) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(e^{\varepsilon jt} - 1), \tag{8}$$

где $P(z) = Ez^{\xi} = \varphi(e^{i\,t})$ - п.ф. случайной величины ξ . Обращения (8) и явный вид многочленов $g_r^{(1)} = g_r^{(1)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = \sum_{j=1}^{k} j^{\,r}\lambda_j$ [3] дают ($r=1,2,\ldots$)

$$\begin{aligned}(\kappa)_r &= \frac{d^r}{dt^r}w(t)\Big|_{t=0} = \frac{d^r}{dt^r}\ln P(1) = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{d^r}{dt^r}e^{\varepsilon jt}\Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{j=1}^{k}(\varepsilon j)^r\lambda_j \varepsilon^r g_r^{(1)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k).\end{aligned} \tag{9}$$

Следствие. При k=1, т.е. для распределения $Ne(\lambda_1,\varepsilon)$, факториальные семиинварианты имеют вид

$$(\kappa)_r^{(1)} = \varepsilon^r g_r^{(1)}(\lambda_1) = \lambda_1\varepsilon^r, \quad r = 1,2,\ldots \quad ((\kappa)_0^{(1)} = 0),$$

а факториальные семиинварианты распределения $SHe(\varepsilon,\lambda_1,\lambda_2)$ суть

$$(\kappa)_r^{(2)} = \varepsilon^{\,r} g_r^{(1)}(\lambda_1,\lambda_2) = (\lambda_1 + 2^r\lambda_2)\varepsilon^r, \quad r = 1,2,\ldots \quad ((\kappa)_0^{(2)} = 0).$$

Обозначим для $l = 1,2,\ldots$ $(\kappa)_r^{(l)} = \varepsilon^{\,r} g_r^{(1)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_l) = \sum_{j=1}^{l}(\varepsilon j)^r\lambda_j$.

Возможны два типа рекуррентностей на $(\kappa)_r$.

Утверждение 1. $(\kappa)^{(k)}_{r+1}$ линейно выражается через $(\kappa)^{(1)}_r, (\kappa)^{(2)}_r, \ldots, (\kappa)^{(k)}_r$:

$$(\kappa)^{(k)}_{r+1} = \varepsilon\left(k(\kappa)^{(k)}_r - \sum_{l=1}^{k-1}(\kappa)^{(l)}_r\right), \quad r,k = 1,2,\ldots,$$

$$(\kappa)^{(l)}_1 = \varepsilon\sum_{j=1}^{l} j\lambda_j, \quad l = 1,2,\ldots, \quad k.$$

Доказательство. Воспользовавшись справедливостью равенств

$$\sum_{j=1}^{k}\varepsilon j\lambda_j e^{\varepsilon jt} = \varepsilon k\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(e^{\varepsilon jt}-1) + \sum_{j=1}^{k}\varepsilon j\lambda_j - \sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon(k-j)\lambda_j(e^{\varepsilon jt}-1) =$$

$$= \varepsilon k\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(e^{\varepsilon jt}-1) + \sum_{j=1}^{k}\varepsilon j\lambda_j - \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{l=j}^{k-1}\lambda_j(e^{\varepsilon jt}-1) =$$

$$= \varepsilon k\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(e^{\varepsilon jt}-1) + \sum_{j=1}^{k}\varepsilon j\lambda_j - \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{l}\varepsilon\lambda_j(e^{\varepsilon jt}-1),$$

из соотношения (9) имеем

$$(\kappa)^{(k)}_{r+1} = \frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(e^{\varepsilon jt}-1)\bigg|_{t=0} = \frac{d^r}{dt^r}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon j\lambda_j e^{\varepsilon jt}\bigg|_{t=0} =$$

$$= \varepsilon k\frac{d^r}{dt^r}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(e^{\varepsilon jt}-1)\bigg|_{t=0} - \sum_{l=1}^{k-1}\frac{d^r}{dt^r}\sum_{j=1}^{l}\varepsilon\lambda_j(e^{jt}-1)\bigg|_{t=0} =$$

$$= \varepsilon k(\kappa)^{(k)}_r - \varepsilon\sum_{l=1}^{k-1}(\kappa)^{(l)}_r.$$

Утверждение 2. Для $r,k = 1,2,\ldots$

$$(\kappa)^{(k)}_{r+1} = \varepsilon\sum_{j=1}^{k+1} j\lambda_j\frac{\partial}{\partial\lambda_j}(\kappa)^{(k)}_r =$$

$$= \varepsilon(1+\sum_{j=2}^{k}(j-1)\lambda_j\frac{\partial}{\partial\lambda_j})(\kappa)^{(k)}_r, \quad (\kappa)^{(k)}_1 = \varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j$$

легко проверяется.

Следствия. Рекуррентные соотношения на факториальные семиинварианты распределений $Ne(\lambda_1,\varepsilon)$ и $SHe(\varepsilon,\lambda_1,\lambda_2)$ записываются

$$(\kappa)_{r+1}^{(1)} = \varepsilon(\kappa)_r^{(1)} = (\kappa)_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial \lambda_1}(\kappa)_r^{(1)}, \quad r = 1,2,\ldots, \quad (\kappa)_1^{(1)} = \varepsilon\lambda_1;$$

$$(\kappa)_{r+1}^{(2)} = 2\varepsilon(\kappa)_r^{(2)} - \lambda_1\varepsilon^{r+1} = \varepsilon(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2})(\kappa)_r^{(2)}, \quad r = 1,2,\ldots,$$

$$(\kappa)_1^{(2)} = \varepsilon(\lambda_1 + 2\lambda_2).$$

Производящая функция семиинвариантов $s(t) = \ln\varphi(t)$ имеет вид

$$s(t) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\exp\{\varepsilon j(e^{it} - 1)\} - 1).$$

Её обращение для *r=1,2,...* записывается как

$$\kappa_r = (-i)^r \frac{d^r}{dt^r} s(t)\bigg|_{t=0} = (-i)^r \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{d^r}{dt^r} \exp\{\varepsilon j(e^{it} - 1)\}\bigg|_{t=0}.$$

Числа Стирлинга первого ($s_r^{(j)}$) и второго рода ($\sigma_r^{(j)}$) [4, 9; 10,с.43] задают связь обычных κ_r и факториальных семиинвариантов $(\kappa)_r$ [4, 6]:

$$(\kappa)_r = \sum_{j=0}^{r} s_r^{(j)} \kappa_j, \quad \kappa_r = \sum_{j=0}^{r} \sigma_r^{(j)} (\kappa)_j.$$

Тогда для любого *r=1,...,k* имеем

$$\begin{aligned} \kappa_r &= \sum_{m=0}^{r} \sigma_r^{(m)} \sum_{j=1}^{k} (\varepsilon j)^m \lambda_j = \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \sum_{m=0}^{r} \sigma_r^{(m)} (\varepsilon j)^m = \sum_{j=1}^{k} \lambda_r S_r(\varepsilon j), \quad (\kappa_0 = 0), \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$S_r(x) = \sum_{m=0}^{r} \sigma_r^{(m)} x^m = \frac{d^r}{dt^r} \exp\{x(e^t - 1)\}\bigg|_{t=0} \tag{11}$$

– полиномы Стирлинга, для которых справедливы рекуррентные соотношения [2, 3]

$$S_{r+1}(x) = x \sum_{j=0}^{r} C_r^j S_j(x), \; r = 0,1,\ldots, \quad S_0(x) = 1. \tag{12}$$

$$S_{r+1}(x) = x(1 + \frac{d}{dx}) S_r(x), \quad r = 0,1,\ldots, \quad (S_0(x) = 1). \tag{13}$$

Следствия. Семиинварианты распределения $Ne(\lambda_1, \varepsilon)$ имеют вид

$$\kappa_r^{(1)} = \lambda_1 S_r(\varepsilon) = \lambda_1 \sum_{m=1}^{r} \sigma_r^{(m)} \varepsilon^m, \quad r = 1,2,\ldots \quad (\kappa_0^{(1)} = 0),$$

а семиинварианты распределения $SHe(\varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$ суть

$$\kappa_r{}^{(2)} = \lambda_1 S_r(\varepsilon) + \lambda_2 S_r(2\varepsilon) =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \sigma_r^{(m)} \varepsilon^m (\lambda_1 + 2^m \lambda_2), \quad r = 1,2,\ldots \quad (\kappa_0^{(2)} = 0).$$

Докажем рекуррентное соотношение на семиинварианты, связывающее $\kappa_{r+1}^{(k)}$ с

$$\kappa_r^{(k)}, \ \kappa_{r-1}^{(k)}, \ \ldots, \ \kappa_1^{(k)}, \ \kappa_r^{(k-1)}, \kappa_{r-1}^{(k-1)}, \ \ldots, \ \kappa_1^{(k-1)}, \ \ldots, \ \kappa_1^{(1)}.$$

Утверждение 3. Для фиксированного натурального k

$$\kappa_{r+1}^{(k)} = \kappa_1^{(k)} + \varepsilon \sum_{j=1}^{r} C_r^j \Big(k\kappa_j^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} \kappa_j^{(m)}\Big), \quad r = 0,1,\ldots,$$

$$\kappa_1^{(k)} = \varepsilon \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j. \qquad (14)$$

Доказательство. Из (10) и (12) имеем

$$\kappa_{r+1}^{(k)} = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \varepsilon m \sum_{j=0}^{r} C_r^j S_j(\varepsilon m) =$$

$$= \kappa_1^{(k)} + \varepsilon \sum_{j=1}^{r} C_r^j \sum_{m=1}^{k} m\lambda_m S_j(\varepsilon m). \qquad (15)$$

Далее, принимая обозначение $\kappa_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i S_j(\varepsilon i), \quad l = 1,2,\ldots,k,$ проведем следующую выкладку при $k \geq 1$

$$\sum_{m=1}^{k} m\lambda_m S_j(\varepsilon m) = k \sum_{m=1}^{k} \lambda_m S_j(\varepsilon m) - \sum_{i=1}^{k} (k-i)\lambda_i S_j(\varepsilon i) =$$

$$= k\kappa_j^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i S_j(\varepsilon i) \sum_{l=i}^{k-1} 1 =$$

$$= k\kappa_j^{(k)} - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i S_j(\varepsilon i) = k\kappa_j^{(k)} - \sum_{l=1}^{k-1} \kappa_j^{(l)}.$$

Подставив это тождество в (15), приходим к (14).

Следующее дифференциально-рекуррентное соотношение дает κ_{r+1} только через производные по параметрам $\varepsilon, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ от κ_r .

Утверждение 4. При r=1,2,... и фиксированном натуральном k

$$\kappa_{r+1} = \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} + \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \frac{\partial}{\partial\lambda_j}\right)\kappa_r = \qquad (16)$$

$$= \varepsilon\left(1 + \frac{\partial}{\partial\varepsilon} + \sum_{j=2}^{k}(j-1)\lambda_j \frac{\partial}{\partial\lambda_j}\right)\kappa_r, \ \kappa_1 = \varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j.$$

Доказательство. Справедливость (16) следует из (10) и двух вспомогательных представлений:

$$S_{r+1}(\varepsilon j) = \varepsilon\left(j + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)S_r(\varepsilon j), \quad r = 0,1,\dots, \quad (S_0(.) = 1);$$

$$\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j S_r(\varepsilon j) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \frac{\partial}{\partial\lambda_j}\kappa_r = \left(1 + \sum_{j=2}^{k}(j-1)\lambda_j \frac{\partial}{\partial\lambda_j}\right)\kappa_r, \quad r = 1,2,\dots$$

Первое равенство следует из (13), так как при $x = \varepsilon j$ будет

$$S_{r+1}(\varepsilon j) = \varepsilon j\left(1 + \frac{d}{d\varepsilon}\right)S_r(\varepsilon j) = \varepsilon\left(j + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)S_r(\varepsilon j).$$

Для вывода второго достаточно умножить очевидное соотношение $\partial\kappa_r / \partial\lambda_j = S_r(\varepsilon j)$ на $j\lambda_j$ и просуммировать по j от *1* до k ; справедливость последнего равенства легко проверяется.

Следствия. Рекуррентные соотношения на семиинварианты распределений $Ne(\lambda_1, \varepsilon)$ и $SHe(\varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$ записываются в виде (r=1,2,...)

$$\kappa_{r+1}^{(1)} = \varepsilon\left(\lambda_1 + \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j \kappa_{r-j}^{(1)}\right) = \varepsilon\left(1 + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\kappa_r^{(1)}, \quad \kappa_1^{(1)} = \varepsilon\lambda_1;$$

$$\kappa_{r+1}^{(2)} = \kappa_1^{(2)} + \varepsilon\sum_{j=1}^{r} C_r^j\left(2\kappa_j^{(2)} - \lambda_1 S_j(\varepsilon)\right) = \varepsilon\left(1 + \frac{\partial}{\partial\varepsilon} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right)\kappa_r^{(2)},$$

$$\kappa_1^{(2)} = \varepsilon(\lambda_1 + 2\lambda_2).$$

II. Факториальные и биномиальные моменты. Здесь пойдёт речь о факториальных $(\alpha)_r$ и биномиальных B_r моментах распределения (1). Явный вид $(\alpha)_r$ может быть получен из обращения п.ф. факториальных моментов $P(1+t)$:

$$(\alpha)_r = E(\xi)_r = \frac{d^r}{dt^r}P(1+t)\bigg|_{t=0} = \frac{d^r}{dt^r}\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(e^{\varepsilon jt}-1)\right\}\bigg|_{t=0},$$

где $(\xi)_r = \xi(\xi-1)...(\xi-r+1)$.

В самом деле, сделав замену переменной $\tau = \varepsilon t$, будем иметь

$$(\alpha)_r = \varepsilon^r \frac{d^r}{d\tau^r}\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(e^{j\tau}-1)\right\}\bigg|_{\tau=0} = \\ = \varepsilon^r G_r(\lambda_1,...,\lambda_k), \quad r = 0,1,... \tag{17}$$

Следствия. Факториальные моменты распределения $Ne(\lambda_1,\varepsilon)$ суть

$$(\alpha)_r^{(1)} = \varepsilon^r G_r(\lambda_1) = \varepsilon^r S_r(\lambda_1) = \varepsilon^r \sum_{m=0}^{r}\sigma_r^{(m)}\lambda_1^m, \quad r = 0,1,...;$$

факториальные моменты распределения $SHe(\varepsilon,\lambda_1,\lambda_2)$ записываются из (17), (4) как (r=0,1,...)

$$(\alpha)_r^{(2)} = \varepsilon^r G_r(\lambda_1,\lambda_2) = r!\varepsilon^r \sum_{I_1^{(r)}=r}\prod_{m=1}^{r}(\lambda_1+2^m\lambda_2)^{i_m}(m!)^{-i_m}(i_m!)^{-1} =$$

$$= \varepsilon^r \sum_{j=0}^{r}\Delta^j 0^r \sum_{i=0}^{[j/2]}\frac{\lambda_2^i(\lambda_1+2\lambda_2)^{j-2i}}{i!(j-2i)!}.$$

Рекуррентные соотношения на факториальные моменты $(\alpha)_r = (\alpha)_r^{(k)}$, как следует из (17), определяются рекуррентностями (5), (6), (7) на полиномы G_r (множитель ε^r легко учесть, r=0,1,...)

$$(\alpha)_{r+1} = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\sum_{m=0}^{r}C_r^m(\varepsilon j)^{m+1}(\alpha)_{r-m} = \\ = \varepsilon\sum_{j=1}^{k}j\lambda_j(1+\frac{\partial}{\partial\lambda_j})(\alpha)_r, \tag{18}$$

$$(\alpha)_r^{(k)} = \sum_{m=0}^{r}C_r^m(\alpha)_{r-m}^{(k-1)}k^m(\alpha)_m^{(1)}(\lambda_k), \tag{19}$$

где $(\alpha)_m^{(1)}(\lambda_k)$ – факториальные моменты распределения $Ne(\lambda_k,\varepsilon)$, а

$$(\alpha)_{r-m}^{(k-1)} = \varepsilon^{r-m}G_{r-m}(\lambda_1,...,\lambda_{k-1}).$$

Следствия. При всех r=0,1,... факториальные моменты $(\alpha)_r^{(1)}$ распределения Неймана $Ne(\lambda_1,\varepsilon)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(\alpha)_{r+1}^{(1)} = \varepsilon\lambda_1(1+\frac{\partial}{\partial\lambda_1})(\alpha)_r^{(1)} =$$

$$= \varepsilon\lambda_1\sum_{m=0}^{r} C_r^m\varepsilon^m(\alpha)_{r-m}^{(1)} = \varepsilon\lambda_1(\varepsilon+\alpha)^r, \quad \alpha^m = (\alpha)_m^{(1)},$$

а $(\alpha)_r^{(2)}$ распределения Стирлинга-Эрмита $SHe(\varepsilon, \quad \lambda_1,\lambda_2)$ – соотношениям

$$(\alpha)_{r+1}^{(2)} = (\alpha_1^{(2)} + \varepsilon\lambda_1\frac{\partial}{\partial\lambda_1} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial\lambda_2})(\alpha)_r^{(2)} =$$

$$= \varepsilon\sum_{m=0}^{r} C_r^m(\lambda_1 + 2^{m+1}\lambda_2)\varepsilon^m(\alpha)_{r-m}^{(2)},$$

при этом $(\alpha)_r^{(2)}$ следующим образом выражаются через факториальные моменты $(\alpha)_m^{(1)}(\lambda_j)$ распределения $Ne(\lambda_j,\varepsilon)$, $j = 1, \ 2,$

$$(\alpha)_r^{(2)} = \sum_{m=0}^{r} C_r^m(\alpha)_{r-m}^{(1)}(\lambda_1)2^m(\alpha)_m^{(1)}(\lambda_2) = (\alpha(\lambda_1)+2\alpha(\lambda_2))^r,$$

$$\alpha^m(\lambda_j) \equiv (\alpha)_m^{(1)}(\lambda_j).$$

Поскольку для биномиальных моментов $B_r = {(\alpha)_r}/{r!}$, то из предыдущего сразу получаем явный вид B_r и рекуррентные соотношения. Приведем соответствующие результаты.

$$B_r = \frac{\varepsilon^r}{r!}G_r = \sum_{I_1^{(r)}=r}\prod_{m=1}^{r}\varepsilon(\sum_{j=1}^{k} j^m\lambda_j)^{i_m}(m!)^{-i_m}(i_m!)^{-1} =$$

$$= \varepsilon^r\sum_{J=r}\prod_{m=1}^{r} m^{i_m}S_{i_m}(\lambda_m)(i_m!)^{-1}, \quad r = 0,1,... \tag{20}$$

$$rB_r = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\sum_{m=1}^{r}\frac{(\varepsilon j)^m}{(m-1)!}B_{r-m} =$$

$$= \varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j(1+\frac{\partial}{\partial\lambda_j})B_{r-1}, \quad r = 1,2,..., \tag{21}$$

$$B_r^{(k)} = \sum_{m=0}^{r} B_{r-m}^{(k-1)}k^m B_m^{(1)}(\lambda_k), \quad k = 2,3,...,r = 0,1,..., \tag{22}$$

где

$$J = J_1^{(k)},\quad J_p^{(q)} = \sum_{\alpha=p}^{q} i_\alpha,\quad B_i^{(k-1)} = \frac{\varepsilon^i G_i(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1})}{i!},$$

а $B_m^{(1)}(\lambda_k) = \dfrac{\varepsilon^m S_m(\lambda_k)}{m!}$ – биномиальные моменты распределения Неймана от двух параметров $Ne(\lambda_k,\varepsilon)$.

Следствия. Для биномиальных моментов $B_r^{(1)}$ распределения Неймана $Ne(\lambda_1,\varepsilon)$ имеем

$$B_r^{(1)} = \frac{\varepsilon^r S_r(\lambda_1)}{r!} = \frac{\varepsilon^r}{r!}\sum_{m=0}^{r}\sigma_r^{(m)}\lambda_1^m,\quad r = 0,1,\dots,$$

$$rB_r^{(1)} = \lambda_1\sum_{m=1}^{r}\frac{\varepsilon^m}{(m-1)!}B_{r-j}^{(1)} = \varepsilon\lambda_1(1+\frac{\partial}{\partial\lambda_1})B_{r-1}^{(1)},\quad r = 1,2,\dots;$$

а для $B_r^{(2)}$ распределения $SHe(\varepsilon,\lambda_1,\lambda_2)$ –

$$(B)_r^{(2)} = \frac{\varepsilon^r G_r(\lambda_1,\lambda_2)}{r!} = \varepsilon^r\sum_{I_1^{(r)}=r}\prod_{m=1}^{r}(\lambda_1+2^m\lambda_2)^{i_m}(m!)^{-i_m}(i_m!)^{-1} =$$

$$= \frac{\varepsilon^r}{r!}\sum_{j=0}^{r}\Delta^j 0^r\sum_{i=0}^{[j/2]}\frac{\lambda_2^i(\lambda_1+2\lambda_2)^{j-2i}}{i!(j-2i)!},\quad r = 0,1,\dots,$$

$$rB_r^{(2)} = (B_1^{(2)} + \varepsilon\lambda_1\frac{\partial}{\partial\lambda_1} + \varepsilon\lambda_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2})B_{r-1}^{(2)} =$$

$$= \sum_{m=1}^{r}\frac{\varepsilon^m}{(m-1)!}(\lambda_1+2^m\lambda_2)B_{r-m}^{(2)},\quad r = 1,2,\dots,$$

$$B_r^{(2)} = \sum_{m=0}^{r}B_{r-m}^{(1)}(\lambda_1)2^m B_m^{(1)}(\lambda_2),\quad r = 0,1,\dots,$$

где $B_m^{(1)}(\lambda_j) = {\varepsilon^m S_m(\lambda_j)}/{m!}$ – биномиальные моменты распределения Неймана $Ne(\lambda_j,\varepsilon)$, $j = 1,2$ с параметрами λ_1,ε и λ_2,ε соответственно.

III. Начальные моменты. Явный вид начальных моментов α_r получается из производящей функции моментов (п.ф.м.)

$$M(t) = \varphi(t/i) = P(e^t) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\exp\{\varepsilon j(e^t-1)\}-1\right)\right\} \qquad (23)$$

путем её дифференцирования в нуле $\alpha_r = \left.\dfrac{d^r}{dt^r}M(t)\right|_{t=0}$.

При замене $\tau = \varepsilon(e^t - 1)$через индукцию, осуществляя переход от *r* к *r+1* по известной треугольной рекуррентности

$$\sigma_{n+1}^{(m)} = m\sigma_n^{(m)} + \sigma_n^{(m-1)}, \quad 1 \le m \le n, \quad \sigma_0^{(0)} = 1, \tag{24}$$

получим в силу (3)

$$\frac{d^r}{dt^r}M(t) = \sum_{m=0}^{r} \sigma_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{m})}\varepsilon^m e^{mt}\frac{d^m}{d\tau^m}G(\tau), \quad r = 0,1,...$$

Полагая $t = 0$ (так что и $\tau = 0$), из обращения (3) получаем

$$\alpha_r = \sum_{m=0}^{r} \sigma_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{m})}\varepsilon^m G_m(\lambda_1,...,\lambda_k), \quad r = 0,1,... \tag{25}$$

В частности, отсюда и из (20), (21), (17), (18), (10), (14), (9)

$$\alpha_1 = B_1 = (\alpha)_1 = \kappa_1 = (\kappa)_1 = \varepsilon G_1(\lambda_1,...,\lambda_k) = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j S_1(\varepsilon j) =$$

$$= \varepsilon g_1^{(1)}(\lambda_1,...,\lambda_k) = \varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j.$$

Следствия. Начальные моменты $\alpha_r^{(1)}$ распределения Неймана $Ne(\lambda_1,\varepsilon)$ являются многочленами степени 2 r от λ_1,ε

$$\alpha_r^{(1)} = \sum_{m=0}^{r} \sigma_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{m})}\varepsilon^m S_m(\lambda_1) = \sum_{l=0}^{r}\lambda_1^l\sum_{m=l}^{r}\sigma_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{m})}\varepsilon^m\sigma_m^{(l)}, \quad r = 0,1,..., \tag{26}$$

а начальные моменты $\alpha_r^{(2)}$ распределения Стирлинга-Эрмита $SHe(\varepsilon,\lambda_1,\lambda_2)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha_r^{(2)} &= \sum_{m=0}^{r} \sigma_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{m})}\varepsilon^m G_m(\lambda_1,\lambda_2) = \\ &= \sum_{m=0}^{r}\Delta^m 0^r \sum_{I_1^{(\mathrm{m})}=m}\prod_{\mathrm{l}=1}^{\mathrm{m}}\varepsilon(\lambda_1 + 2^l\lambda_2)^{i_l}(l!)^{-i_l}(i_l!)^{-1} = \\ &= \sum_{i=0}^{r}\lambda_1^{\mathrm{i}}\sum_{j=0}^{r-i}\lambda_2^j\sum_{m=j+\mathrm{i}}^{r}\sigma_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{m})}\varepsilon^m\sum_{l=i}^{m-j}C_m^l\sigma_l^{(i)}2^{m-l}\sigma_{m-l}^{(j)}, \quad r = 0,1,...\end{aligned} \tag{27}$$

Рекуррентные соотношения на α_r. Из (10) и известного равенства [6]

$$\alpha_{r+1} = \sum_{j=0}^{r} C_r^j \alpha_{r-j} \kappa_{r+1} = (\alpha_1 + \sum_{j=1}^{r} \kappa_{j+1} \frac{\partial}{\partial \kappa_j}) \alpha_r$$

получим рекуррентное равенство для $r = 0, 1, \ldots$

$$\alpha_{r+1} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \sum_{m=0}^{r} C_r^m S_{m+1}(\varepsilon j) \alpha_{r-m} =$$

$$= \varepsilon \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \sum_{m=0}^{r} C_r^m \sum_{l=0}^{m} \sigma_{m+1}^{(l+1)} (\varepsilon j)^l \alpha_{r-m}$$

и дифференциально-рекуррентное соотношение

$$\alpha_{r+1} = \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j (1 + \frac{\partial}{\partial \lambda_j}) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) \alpha_r =$$

$$= \left(\varepsilon \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j (1 + \frac{\partial}{\partial \lambda_j}) + r \right) \alpha_r - \sum_{m=0}^{r-2} (-1)^{r-m} C_r^m \alpha_{m+1}.$$

Для доказательства воспользуемся (25) и треугольной рекуррентностью (24) ($\sigma_r^{(r+1)} = \sigma_r^{(-1)} = 0,\quad G_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = G_m$), так что

$$\alpha_{r+1} = \varepsilon \sum_{m=1}^{r} m \sigma_r^{(m)} \varepsilon^{m-1} G_m + \sum_{m=1}^{r+1} \sigma_r^{(m-1)} \varepsilon^m G_m, \quad r = 0,1,\ldots$$

Остается заметить, что первое слагаемое здесь есть $\varepsilon \partial\alpha_r / \partial\varepsilon$, а второе $-\varepsilon \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j (1 + \partial / \partial\lambda_j) \alpha_r$. В самом деле, первое – очевидно, а для вывода второго – следует записать из (25) и (5) равенство

$$\partial\alpha_r / \partial\lambda_j = \sum_{m=0}^{r} \sigma_r^{(j)} \varepsilon^j \sum_{l=0}^{m-1} C_m^l j^{m-l} G_l,$$

умножить обе его части на $j\lambda_j$, просуммировать по j от 1 до k, использовать рекуррентность (6) на G_{j+1} и сделать замену $m' = m + 1$.

Доказательство можно провести и через $M(t)$. Именно таким способом выведем второе равенство дифференциально-рекуррентного типа

$$\varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j(1+\frac{\partial}{\partial\lambda_j})\alpha_r = \alpha_1\frac{\partial^r M(0)}{\partial t^r} + \varepsilon\frac{\partial^r}{\partial t^r}\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j\frac{\partial M(0)}{\partial\lambda_j} =$$

$$= \frac{\partial^r M(t)}{\partial t^r}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon j\lambda_j e^{\varepsilon j(e^t-1)+t}e^{-t}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= e^{-t}\frac{\partial^{r+1}M(t)}{\partial t^{r+1}}\Bigg|_{t=0} + \sum_{m=0}^{r-1} C_r^m\frac{\partial^{r-m}e^{-t}}{\partial t^{r-m}}\frac{\partial^{m+1}M(t)}{\partial t^{m+1}}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \alpha_{r+1} + \sum_{m=0}^{r-1} C_r^j(-1)^{r-m}\alpha_{m+1},$$

что, как легко видеть, совпадает с доказываемым.

При выводе рекуррентности по числу k обозначим

$$\alpha_r^{(k)} = \alpha_r,\quad \alpha_r^{(k-1)} = \alpha_r(\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1}) = \frac{\partial^r M^{(k-1)}(0)}{\partial t^r},$$

$$M^{(k-1)}(t) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\exp\left\{\varepsilon j(e^t-1)\right\}-1\right)\right\}.$$

Утверждение 5. Для всех $k = 2,3,\ldots$ и $r = 0,1,\ldots$ имеем

$$\alpha_r^{(k)} = \sum_{m=0}^{r}\lambda_k^m\sum_{l=m}^{r}\sigma_l^{(m)}(\varepsilon k)^l\sum_{j=l}^{r}C_r^j\sigma_j^{(l)}\alpha_{r-j}^{(k-1)}. \tag{28}$$

Доказательство. Действительно, из обращения п.ф.м. (23) имеем

$$\alpha_r^{(k)} = \frac{\partial^r M(t)}{\partial t^r}\Bigg|_{t=0} = \frac{\partial^r M^{(k-1)}(t)}{\partial t^r}e^{\lambda_k\exp\{\varepsilon k(e^t-1)\}-\lambda_k}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r}C_r^j\alpha_{r-j}^{(k-1)}\frac{\partial^j}{\partial t^j}e^{\lambda_k\exp\{\varepsilon k(e^t-1)\}-\lambda_k}\Bigg|_{t=0}.$$

Сделав замену переменной $\tau = \varepsilon k(e^t-1)$, индукцией, также как при доказательстве (25), нетрудно проверить, что для $j = 0,\ 1,\ \ldots$

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j}\exp\left\{\lambda_k\left(\exp\left\{\varepsilon k(e^t-1)\right\}-1\right)\right\} = \sum_{l=0}^{j}\sigma_j^{(l)}(\varepsilon k)^l e^{lt}\frac{\partial^l}{\partial\tau^l}S(\tau),$$

где $S(\tau) = \exp\left\{\lambda_k(e^\tau-1)\right\}$ – э.п.ф. полиномов Стирлинга $S_l(\lambda_k)$ (11). Учитывая, что при $t = 0$ и $\tau = 0$, из (11) имеем

$$\alpha_r^{(k)} = \sum_{j=0}^{r} C_r^j \alpha_{r-j}^{(k-1)} \sum_{l=0}^{j} \sigma_j^{(l)} (\varepsilon k)^l S_l(\lambda_k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} C_r^j \alpha_{r-j}^{(k-1)} \sum_{m=0}^{j} \lambda_k^m \sum_{l=m}^{j} \sigma_j^{(l)} (\varepsilon k)^l \sigma_l^{(m)}.$$

Наконец, сменив еще два раза порядок суммирования, приходим к (28).

Следствия. Начальные моменты $\alpha_r^{(1)}$ распределения $Ne(\lambda_1, \varepsilon)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям $(r = 0,1,...)$

$$\alpha_{r+1}^{(1)} = \lambda_1 \sum_{j=0}^{r} C_r^j S_{j+1}(\varepsilon) \alpha_{r-j}^{(1)} = \varepsilon \lambda_1 \sum_{j=0}^{r} C_r^j \sum_{l=0}^{j} \sigma_{j+1}^{(l+1)} \varepsilon^l \alpha_{r-j}^{(1)} =$$

$$= \left(\alpha_1^{(1)} (1 + \frac{\partial}{\partial \lambda_1}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) \alpha_r^{(1)} = \alpha_1^{(1)} (1 + \frac{\partial}{\partial \lambda_1}) \alpha_r^{(1)} - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{r-j} C_r^j \alpha_{j+1}^{(1)},$$

начальные моменты $\alpha_r^{(2)}$ распределения $SHe(\varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$ – соотношениям

$$\alpha_{r+1}^{(2)} = \sum_{j=0}^{r} C_r^j \left(\lambda_1 S_{j+1}(\varepsilon) + \lambda_2 S_{j+1}(2\varepsilon) \right) \alpha_{r-j}^{(2)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} C_r^j \sum_{l=0}^{j} \sigma_{j+1}^{(l+1)} \varepsilon^{l+1} (\lambda_1 + 2^{l+1} \lambda_2) \alpha_{r-j}^{(2)} =$$

$$= \left(\alpha_1^{(2)} + \varepsilon (\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + 2\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}) \right) \alpha_r^{(2)} =$$

$$= \left(\alpha_1^{(2)} + \varepsilon \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + 2\varepsilon \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \right) \alpha_r^{(2)} - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{r-j} C_r^j \alpha_{j+1}^{(2)}$$

и являются многочленами степени 2 r от $\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon$

$$\alpha_r^{(2)} = \sum_{m=0}^{r} \lambda_2^m \sum_{l=m}^{r} \sigma_l^{(m)} (2\varepsilon)^l \sum_{j=l}^{r} C_r^j \sigma_j^{(l\ )} \alpha_{r-j}^{(1)}, \quad r = 0,1,...,$$

где $\alpha_r^{(1)}$ задается выражением (26); несложными алгебраическими преобразованиями последнее представление сводится к (27).

IV. Центральные моменты. П.ф. $C(t)$ центральных моментов μ_r определяется соотношением [12,с.91]

$$C(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu_r \frac{t^r}{r!} = \exp(-E\xi) M(t).$$

В нашем случае в силу (23) имеем

$$C(t) = \exp(-\alpha_1 t)M(t) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\exp\left\{\varepsilon j(e^t-1)\right\} - \varepsilon jt - 1\right)\right\}. \quad (29)$$

И, следовательно, r –ый центральный момент $\mu_r = \left.\frac{d^r}{dt^r}C(t)\right|_{t=0}$ может быть найден через их связь с α_r и (25), а именно воспользуемся формулой Лейбница

$$\mu_r = \left.\frac{d^r}{dt^r}C(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{d^r}{dt^r}\exp(-\alpha_1 t)M(t)\right|_{t=0} =$$
$$= \left.\sum_{j=0}^{r} C_r^j \frac{d^j}{dt^j}\exp(-\alpha_1 t)\frac{d^{r-j}}{dt^{r-j}}M(t)\right|_{t=0} =$$
$$= \sum_{j=0}^{r} C_r^j(-\alpha_1)^j\alpha_{r-j} = \sum_{j=0}^{r} C_r^j\Big(-\varepsilon\sum_{m=0}^{k} m\lambda_m\Big)^j \sum_{l=0}^{r-j}\sigma_{r-j}^{(l)}\varepsilon^l G_l =$$
$$= \sum_{l=0}^{r} G_l \sum_{j=0}^{r-l}(-G_1)^j C_r^j \sigma_{r-j}^{(l)}\varepsilon^{j+l}. \quad (30)$$

Отсюда и из (9), в частности, получается дисперсия с.в. ξ

$$D\xi = \mu_2 = \kappa_2 = \varepsilon^2 G_2 + \varepsilon G_1 - \varepsilon^2 G_1^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\lambda_j S_2(\varepsilon j) = \varepsilon\sum_{j=1}^{k} j(1+\varepsilon j)\lambda_j. \quad (31)$$

Следствия. Центральные моменты распределений $Ne(\lambda_1,\varepsilon)$ и $SHe(\varepsilon,\ \lambda_1,\lambda_2)$ следующим образом выражаются через соответствующие параметры ($r = 0,1,\ldots$)

$$\mu_r^{(1)} = \sum_{j=0}^{r} C_r^j(-\varepsilon\lambda_1)^j \sum_{l=0}^{r-j}\sigma_{r-j}^{(l)}\varepsilon^l S_l(\lambda_1) = \sum_{m=0}^{r}\sum_{l=m}^{r}\sum_{j=0}^{r-l}(-1)^j C_r^j \sigma_{r-j}^{(l)}\sigma_l^{(m)}\lambda_1^{j+m}\varepsilon^{j+l};$$

$$\mu_r^{(2)} = \sum_{l=0}^{r} G_l(\lambda_1,\lambda_2)\sum_{j=0}^{r-l}(-1)^j C_r^j\sigma_{r-j}^{(l)}\varepsilon^{j+l}(\lambda_1+2\lambda_2)^j =$$
$$= (-\varepsilon)^r\sum_{m=0}^{r}\sum_{l=m}^{r}\sum_{j=l}^{r}(-1)^j C_r^j\sigma_r^{(l)}\sigma_l^{(m)}\varepsilon^{l-j}m!\sum_{i=0}^{[m/2]}\frac{\lambda_2^i(\lambda_1+2\lambda_2)^{r-j+m-2i}}{i!(m-2i)!}.$$

Перейдем к выводу рекуррентностей на μ_r. Подставляя (9) в известное [6] рекуррентное соотношение

$$\mu_{r+1} = \sum_{j=1}^{r} C_r^j \mu_{r-j} \kappa_{j+1} = r\mu_2 \mu_{r-1} + \sum_{j=2}^{r} \kappa_{j+1} \frac{\partial}{\partial \kappa_j} \mu_r,$$

простым преобразованием получим при $r = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned}\mu_{r+1} &= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \sum_{m=1}^{r} C_r^m S_{m+1}(\varepsilon j) \mu_{r-m} = \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{l=0}^{m} \sigma_{m+1}^{(l+1)} (\varepsilon j)^l \mu_{r-m}.\end{aligned} \qquad (32)$$

Утверждение 6. Дифференциально-рекуррентные соотношения на μ_r записываются в двух формах (вторая – не содержит производной по ε, $r = 0,1,\ldots$):

$$\begin{aligned}\mu_{r+1} &= r\mu_2 \mu_{r-1} + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) \mu_r = \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \left(\varepsilon j r \mu_{r-1} + \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \mu_r - \sum_{m=0}^{r-1} (-1)^{r-m} C_r^m \mu_m \right) + \\ &+ \sum_{m=2}^{r} (-1)^{r-m} C_r^{m-1} \mu_m.\end{aligned} \qquad (33)$$

Доказательство. Введем дифференциальный оператор $D_\lambda = \varepsilon \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j}$. Записав производные по параметрам в виде

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \mu_r = \frac{\partial^r}{\partial t^r} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} C(0) = \frac{\partial^r}{\partial t^r} C(t) \left(\exp\{\varepsilon j (e^t - 1)\} - \varepsilon j t - 1 \right) \Big|_{t=0},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mu_r = \frac{\partial^r}{\partial t^r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} C(0) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \frac{\partial^r}{\partial t^r} C(t) \left(\exp\{\varepsilon j (e^t - 1)\} (e^t - 1) - t \right) \Big|_{t=0},$$

имеем

$$\begin{aligned}&\left(D_\lambda + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) \mu_r = \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \left(\frac{\partial^r}{\partial t^r} C(t) \left(\exp\{\varepsilon j (e^t - 1) + t\} - 1 \right) - (1 + \varepsilon j) \frac{\partial^r}{\partial t^r} t C(t) \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \mu_{r+1} - \mu_2 C_r^1 \frac{\partial^{r-1} C(0)}{\partial t^{r-1}}\end{aligned}$$

(последнее равенство следует из

$$\varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \frac{\partial^r C(t)}{\partial t^r}\left(\exp\left\{\varepsilon j(e^t-1)+t\right\}-1\right)\Big|_{t=0} = \frac{\partial^r}{\partial t^r}\frac{\partial C(0)}{\partial t} = \mu_{r+1},$$

формулы Лейбница и (31)). Первое соотношение (33) доказано.
Далее, так как

$$D_\lambda \mu_r = \varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \frac{\partial^r}{\partial t^r} C(t)\left(\exp\left\{\varepsilon j(e^t-1)+t\right\}e^{-t}-1-\varepsilon jt\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \varepsilon\sum_{j=1}^{k} j \quad \lambda_j \frac{\partial^r}{\partial t^r}\left(e^{-t}C(t)\left(e^{\varepsilon j(e^t-1)+t}-1\right)+(e^{-t}-1)C(t)-\varepsilon jtC(t)\right)\Big|_{t=0},$$

то дифференцирование по формуле Лейбница с последующим $t = 0$ дает

$$D_\lambda \mu_r = \sum_{m=0}^{r} C_r^m (-1)^{r-m} \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}} C(0) +$$

$$+\alpha_1\left(\sum_{m=0}^{r} C_r^m(-1)^{r-m}\mu_m - \mu_r\right) - \varepsilon^2\sum_{j=1}^{k} j^2\lambda_j C_r^1 \mu_{r-1},$$

т.е. после группировки соответствующих членов в правой части, –

$$D_\lambda \mu_r = \mu_{r+1} + \sum_{m=0}^{r-1} C_r^m(-1)^{r-m}\mu_{m+1} +$$

$$+\alpha_1\sum_{m=0}^{r-2} C_r^m(-1)^{r-m}\mu_m - r\varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j(1+\varepsilon j)\mu_{r-1}.$$

Отсюда, воспользовавшись (31) и определением D_λ, можем записать

$$\mu_{r+1} = r\mu_2\mu_{r-1} + \varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}\mu_r - \sum_{m=0}^{r-2} C_r^m(-1)^{r-m}\mu_m\right) +$$

$$+\sum_{m=2}^{r} C_r^{m-1}(-1)^{r-m}\mu_m,$$

что, как легко видеть, совпадает со вторым соотношением (33).

Следствия. Первое рекуррентное соотношение (33), справедливое при всех целых неотрицательных r, по существу «действует», начиная с $r = 2$. Так что для центральных моментов распределения с учетом (31) последовательно будет

$$\mu_3 = \varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j(1+3\varepsilon j+\varepsilon^2 j^2),$$

$$\mu_4 = 3\mu_2^2 + \varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j(1+7\varepsilon j+6\varepsilon^2 j^2+\varepsilon^3 j^3),$$

$$\mu_5 = 10\mu_2\mu_3 + \varepsilon\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j(1+15\varepsilon j+25\varepsilon^2 j^2+10\varepsilon^3 j^3+\varepsilon^4 j^4).$$

Рекуррентность по числу k центральных моментов

$$\mu_r^{(j)} = \mu_r(\varepsilon,\lambda_1,\ldots,\lambda_j) = \frac{\partial^r C_j(0)}{\partial t^r},$$
$$C_j(t) = C(t;\varepsilon,\lambda_1,\ldots,\lambda_j) =$$
$$= \exp\left\{\sum_{l=1}^{j}\lambda_l\left(\exp\left\{\varepsilon l(e^t-1)\right\}-\varepsilon lt-1\right)\right\},\quad j=\overline{1,k}$$

выводится аналогично (28).

Утверждение 7. Для всех $k = 2,3,\ldots$ и $r = 0,\ 1,\ \ldots$

$$\mu_r^{(k)} = \sum_{j=0}^{r} C_r^j\mu_{r-j}^{(k-1)}\sum_{m=0}^{j}\lambda_k^m\sum_{l=m}^{j}\sigma_l^{(m)}(\varepsilon k)^l\sum_{n=l}^{j}(-\varepsilon k\lambda_k)^{j-n}C_j^n\sigma_n^{(l)} =$$
$$= \sum_{n=0}^{r}\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=m}^{n}\sum_{j=n}^{r}(-1)^{j-n}C_r^jC_j^n\sigma_l^{(m)}\sigma_n^{(l)}(\varepsilon k)^{j+l-n}\lambda_k^{j+m-n}\mu_{r-j}^{(k-1)}. \quad (34)$$

Доказательство. Из обращения п.ф. (29) и формулы Лейбница

$$\mu_r^{(k)} = \frac{\partial^r}{\partial t^r}C_k(0) = \frac{\partial^r}{\partial t^r}C_{k-1}(t)\exp\left\{\lambda_k\left(\exp\left\{\varepsilon k(e^t-1)\right\}-\varepsilon kt-1\right)\right\}\Big|_{t=0} =$$
$$= \sum_{j=0}^{r} C_r^j\mu_{r-j}^{(k-1)}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\exp\left\{\lambda_k\left(e^{\varepsilon k(e^t-1)}-\varepsilon kt-1\right)\right\}\Big|_{t=0} =$$
$$= \sum_{j=0}^{r} C_r^j\mu_{r-j}^{(k-1)}\frac{\partial^j C(0;\varepsilon,0,\ldots,0,\lambda_k)}{\partial t^j}.$$

Следовательно, из (30) последний сомножитель равен

$$\mu_j(\varepsilon,0,\ldots,0,\lambda_k) = \frac{\partial^j C(0;\varepsilon,0,\ldots,0,\lambda_k)}{\partial t^j} =$$
$$= \sum_{l=0}^{j}\varepsilon^l G_l(\lambda_k)\sum_{n=l}^{j}(-\varepsilon G_1(\lambda_k))^{j-n}C_j^n\sigma_n^{(l)}.$$

Пользуясь тем, что $G_l(\lambda_k) = k^l S_l(\lambda_k)$ и явным видом $S_l(\lambda_k)$, получим

$$\mu_j(\varepsilon,0,\dots,0,\lambda_k) = \sum_{m=0}^{j} \lambda_k^m \sum_{l=m}^{j} \sigma_l^{(m)} (\varepsilon k)^l \sum_{n=l}^{j} (-\varepsilon k \lambda_k)^{j-n} C_j^n \sigma_n^{(l)},$$

т.е. первую часть утверждения, а сменив все порядки сумм, - и вторую.

Следствия. Для центральных моментов распределений $Ne(\lambda_1,\varepsilon)$ *и* $SHe(\varepsilon,\lambda_1,\lambda_2)$ имеют место рекуррентные соотношения

$$\mu_{r+1}^{(1)} = \varepsilon\lambda_1 \sum_{j=1}^{r} C_r^j \sum_{l=0}^{j} \sigma_{j+1}^{(l+1)} \varepsilon^l \mu_{r-j}^{(1)} = \varepsilon\left(\lambda_1(1+\varepsilon) r \mu_{r-1}^{(1)} + (\lambda_1 \frac{\partial}{\partial\lambda_1} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon})\mu_r^{(1)}\right) =$$

$$= \varepsilon\lambda_1\left(\varepsilon r \mu_{r-1}^{(1)} + \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\mu_r^{(1)} - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{r-j} C_r^j \mu_j^{(1)}\right) + \sum_{j=2}^{r} (-1)^{r-j} C_r^{j-1} \mu_j^{(1)},$$

$$\mu_{r+1}^{(2)} = \sum_{j=1}^{r} C_r^j \sum_{l=0}^{j} \sigma_{j+1}^{(l+1)} \varepsilon^{\,l+1} (\lambda_1 + 2^{l+1}\lambda_2) \mu_{r-j}^{(2)} =$$

$$= \varepsilon\left\{\left(\lambda_1(1+\varepsilon) + 2r\lambda_2(1+2\varepsilon)\right) r \mu_{r-1}^{(2)} + (\lambda_1 \frac{\partial}{\partial\lambda_1} + 2\lambda_2 \frac{\partial}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon})\mu_r^{(2)}\right\} =$$

$$= \varepsilon\left(\alpha_1^{(2)} + 2\varepsilon\lambda_2\right) r \mu_{r-1}^{(2)} + \varepsilon(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial\lambda_1} + 2\lambda_2 \frac{\partial}{\partial\lambda_2})\mu_r^{(2)} -$$

$$-\alpha_1^{(2)} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{r-j} C_r^j \mu_j^{(2)} + \sum_{j=2}^{r} (-1)^{r-j} C_r^{j-1} \mu_j^{(2)}, \quad r = 0,1,\dots$$

Литература

1. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. О предельном распределении при регистрации продуктов множественных реакций // Обработка и интерпретация результатов наблюдений. М.: Изд-во МГУ, 1981. С.27-42.
2. Белов А.Г., Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Вероятностно-статистические задачи при экспериментальном разделении множественных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1985.
3. Галкин В.Я. Функция вероятностей одного обобщеннопуассоновского распределения и специальные полиномы // Численные методы в математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1996. С.160-169.
4. Грехем Г., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: "Мир", 1998. С.287.

5. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Теория распределений. – М.: Наука. 1966
6. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. О моментных характеристиках распределений. В кн.: *"Методы математического моделирования: Труды факультета ВМиК"*. М.: Диалог-МГУ. 1998 г. С.
7. Wolfram, S. "Mathematica: A System for Doing Mathematica by Computer". Addison-Wesley, Reading, MA. 1991
8. Neyman J. (1939) On a new class of "contagious" distributions, applicable in entomology and bacteriology. *Ann. Of Math. Statist.*, vol.10, p.35-57.
9. Справочник по специальным функциям // Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука. 1979
10. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963
11. Johnson, N.L., Kotz , S. (1969) Distributions in Statistics: Discrete Distributions. Boston, Houghton Mifflin Comp.
12. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: методы обработки данных. М.: Мир, 1980.
13. Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Обобщенные процессы риска. М.: МАКС-Пресс, 2000.
14. Bening V., Korolev V. Generalized Poisson Models and their Applications in Insurance and Finance. VSP, Utrecht, 2002.

УДК 519.6

Дмитриев В.И., Сальников Р.В. Итерационный метод решения интегральных уравнений первого рода // Прикладная математика и информатика №15, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2003.

Предложен новый итерационный метод решения интегральных уравнений первого рода. На ряде примеров для типовых ядер интегрального уравнения показана эффективность метода.

Ил.: 5. Библиогр.: 2 назв.

Ключевые слова: итерационный метод, интегральные уравнения.

УДК 517.957

Ильинский А.С. Обоснование спектрального метода расчета постоянных распространения волноводов, микрополосковых и щелевых линий // Прикладная математика и информатика №15, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2003.

Дано обоснование спектрального метода расчета постоянных распространения нормальных волн в экранированных волноводах с нерегулярной формой поперечного сечения и неоднородным заполнением. Задача сведена к нелинейной спектральной задаче для оператор-функций в Гильбертовом пространстве. Установлены теоремы существования точек спектра и дано обоснование метода усечения.

Ил.: 1. Библиогр.: 7 назв.

Ключевые слова: спектральный метод, электромагнитные волны, нормальные волны.

УДК 519.956.4, 519.633

Разгулин А.В., Саввина С.С. О численной оптимизации двумерного преобразования аргументов в функционально-дифференциальном уравнении диффузии // Прикладная математика и информатика №15, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2003.

В работе рассматривается задача оптимизации двумерного преобразования $\mathbf{g}(\mathbf{x}):\overline{\Omega}\to\overline{\Omega}$ пространственных аргументов искомой функции начально-краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения диффузии

$$\partial_t u + u - D\Delta u = F_{\mathbf{g}}(u),$$

где правая часть задается обобщенной суперпозицией $F(s)\in C^2(\overline{R})$ и преобразования аргументов $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ в виде функционала $\left\langle F_{\mathbf{g}}(u),\varphi\right\rangle = \int\limits_{\overline{\Omega}} F(u(\mathbf{x},t))\,\varphi(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}$, определенного на пространстве непрерывных

пробных функций $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Качество оптимизации оценивается с помощью интегрального функционала

$$J(\mathbf{g}) = \int_{Q_T} \rho(\mathbf{x},t) \mid u(\mathbf{x},t;\mathbf{g}) - u_1(\mathbf{x},t) \mid^2 \, d\mathbf{x}\, dt, \qquad Q_T = \overline{\Omega} \times [0,T].$$

Для построения минимизирующей последовательности в задаче минимизации $J(\mathbf{g}) \to \inf\limits_{G}$ на множестве $G = \{\mathbf{g} \in L_2(\Omega) : \mathbf{g}(\overline{\Omega}) \subseteq \overline{\Omega}\}$ поточечно ограниченных преобразований используется метод проекции градиента в сочетании со специальными проекционно-разностными аппроксимациями прямой и сопряженной начально-краевых задач, которые учитывают возможную необратимость преобразования аргументов и его обобщенный способ задания. Результаты численной оптимизации обсуждаются на двух примерах построения локализованных целевых функций $u_1(\mathbf{x},t)$.

Ил.: 4. Библиогр.: 13 назв.

Ключевые слова: оптимизация, функционально-дифференциальные уравнения диффузии, преобразование аргументов, градиентный метод, проекционно-разностная схема, нелинейные оптические системы.

УДК 533.6

Садков Ю.Н. Численное моделирование сверхзвуковых осесимметричных газовых струй // Прикладная математика и информатика №15, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2003.

Проведено численное исследование колебаний свободных сверхзвуковых струй на основе осесимметричной модели уравнений Эйлера . Применена разностная.схема сквозного счета третьего порядка точности с добавлением искусственной вязкости. Изучены течения струй, истекающих из звукового сопла с нерасчетностями в интервале от 1.2 до 2. Проведены сравнения с результатами физических экспериментов.

Ил.: 8. Библиогр.: 4 назв.

Ключевые слова: сверхзвуковые струи, автоколебания, численное моделирование.

УДК 519.63

Алаторцев А.В., Кузьмин Р.Н., Проворова О.Г., Савенкова Н.П. Математическое моделирование магнитно-гидродинамических процессов в алюминиевом электролизёре // Прикладная математика и информатика №15, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2003.

Рассматривается задача моделирования процесса электролиза алюминия в конкретных электролизных ваннах. Проводится математическое моделирование физического процесса, учитывающее особенности конструкции конкретной ванны, в том числе состояние настыли на дне ванны. Математическая модель использует информационные возможности уравнения Навье-Стокса, записанного в средах металла и электролита. Система уравнений многомерная, позволяет учитывать магнитно-гидродинамические процессы в двух средах и взаимодействие сред. Задача решается численным методом. В результате расчета моделируется динамика поверхности раздела двух сред и распределение скоростей и токов в средних слоях обеих сред. Проводится сравнение результатов с результатами физического эксперимента.

Ил.: 17. Библиогр.: 5 назв.

Ключевые слова: алюминий, электролиз, гидродинамика, моделирование, разностный метод.

УДК 519.68: 681.513.7

Гуров С.И. Оценки надёжности алгоритмов классификации. I. Введение в проблему. Точечные частотные оценки // Прикладная математика и информатика №15, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2003.

Работа посвящена проблеме оценки надёжности распознающих алгоритмов. В данной статье (первой из 3-х подготовленных) рассмотрены методы математической статистики, применимые к задаче точечного оценивания надёжности классификаторов при частотном подходе. Данные оценки, что является особенно важным, применимы к важному практическому случаю малого числа прецедентов.

Библиогр.: 42 назв.

Ключевые слова: Распознавание образов, надёжность, точечная оценка, малая выборка.

УДК 519.718.7

Вороненко А.А. Об оценке длины проверяющего теста для некоторых бесповторных функций // Прикладная математика и информатика №15, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2003.

Для заданной бесповторной функции $f(x_1,...,x_n)$, существенно зависящей от всех своих переменных, ставится задача оценки длины проверяющего теста на множестве всех бесповторных функций, зависящих от переменных $x_1,...,x_n$ произвольным образом. Ранее автором был получен порядок соответствующей функции Шеннона вида $\theta(n^2)$. В настоящей работе построены примеры последовательностей бесповторных функций $f(x_1,...,x_n)$, длины минимальных тестов для которых растут произвольным образом быстрее линейной функции, но не быстрее, чем $\frac{n^2}{2}$.

Ил.: 3. Табл.: 1. Библиогр.: 6 назв.

Ключевые слова: тест, проверяющий тест, длина теста, бесповторная функция, корневое дерево, каноническое дерево.

УДК 519.6

Калашникова М.И. Теоретико- экспериментальные регрессии (ТЭР) // Прикладная математика и информатика №15, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2003.

В работе рассматривается метод построения линейных регрессий от нескольких переменных со специальным базисом. Предполагается, что наряду с экспериментальными данными задана табличная функция, являющаяся приближением искомой регрессионной зависимости и используемая для расчета специального базиса. Рассмотрен также случай смешанного базиса, часть функций которого являются специальными, остальная часть - обычными функциями, например, многочленами. Указана возможность проведения процедуры оптимального планирования на основе рассмотренных регрессий.

Библиогр.: 12 назв.

Ключевые слова: линейная регрессия, оптимальное планирование.

УДК 519.233.24

Белов А.Г., Галкин В.Я. Моментные характеристики сложного закона Пуассона с обобщающим пуассоновским распределением // Прикладная математика и информатика №15, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2003.

Для сложного закона Пуассона, обобщенного пуассоновским же распределением, указаны явные представления моментных характеристик (обыкновенные и факториальные семиинварианты, начальные, факториальные, биномиальные и центральные моменты), доказаны различного рода рекуррентные соотношения в конечно-разностных и дифференциальных формах. Применяется для численного построения моментных характеристик при решении прямых и обратных задач методами типа моментных.

Библиогр.: 14 назв.

Ключевые слова: сложное распределение, моментные характеристики, рекуррентные соотношения.