А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, А.Г. Свешников

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДОВ С НЕОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ[1]

В данной работе рассматривается подход, позволяющий исследовать проблему возбуждения волновода для диэлектрической и магнитной проницаемостей произвольного вида.

Волновод представляет собой цилиндр $Q = (x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, \infty)$ с идеально-проводящими стенками. Сечение волновода - произвольная область с кусочно-гладкой границей. Считаем, что токи, и возбуждаемое ими поле, имеют гармоническую зависимость от времени $e^{-i\omega t}$. Требуется найти электромагнтное поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла в цилиндре Q

$$\nabla \times E = ikB \quad \nabla \times H = -ikD + \frac{4\pi}{c}j \tag{1}$$

$$\nabla D = 4\pi\rho \quad \nabla B = 0, \tag{2}$$

где $k = \frac{\omega}{c}, D = \varepsilon E, B = \mu H$. Тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости имеют зависимость только от поперечных координат x, y. Считаем, что тензоры ε, μ эрмитовы, положительно определены, кусочно-непрерывны и имеют вид:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \\ \varepsilon_{12}^* & \varepsilon_{22} & \\ & & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \\ \mu_{12}^* & \mu_{22} & \\ & & \mu_{33} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{3} |\xi_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{i,j}\xi_i\xi_j^* \leq \beta \sum_{i=1}^{3} |\xi_i|^2,$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{3} |\xi_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{3} \mu_{i,j}\xi_i\xi_j^* \leq \beta \sum_{i=1}^{3} |\xi_i|^2, \forall \xi \in R^3$$

На границе цилиндра поставим условия, соответствующие идеально-проводящей стенке

$$E \times n|_{\partial Q} = 0 \quad Bn|_{\partial Q} = 0 \tag{3}$$

На поверхностях разрыва S диэлектрической и магнитной проницаемостей поставим условия сопряжения

$$[Dn]|_S = 0 \quad [E \times n]|_S = 0 \quad [Bn]|_S = 0 \quad [H \times n]|_S = 0 \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект N 00-01-00111.

Считаем, что токи и заряды $j = j(x, y, z), \rho = \rho(x, y, z)$, возбуждающие поле, являются заданными функциями, локализованными в конечной области $(x, y) \in \Omega' \subset \Omega, z \in [z_1, z_2]$, и удовлетворяющими уравнению непрерывности, имеющему после сокращения на временной множитель вид:

$$div j - i\omega\rho = 0. \tag{5}$$

Перейдем к изложению предлагаемого метода. Запишем систему уравнений Максвелла в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon^{-1})_{11} & (\varepsilon^{-1})_{12} & \\ (\varepsilon^{-1})^*_{12} & (\varepsilon^{-1})_{22} & \\ & & \mu_{33} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ H_z \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu^{-1})_{11} & (\mu^{-1})_{12} & \\ (\mu^{-1})^*_{12} & (\mu^{-1})_{22} & \\ & & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ E_z \end{pmatrix} + \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} -j_y \\ j_x \\ \rho \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu^{-1}B)_y - \frac{\partial}{\partial y}(\mu^{-1}B)_x + ik\varepsilon_{33}E_z = \frac{4\pi}{c}j_z \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon^{-1}D)_y - \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon^{-1}D)_x + ik\mu_{33}H_z = 0 \tag{9}$$

В качестве основной системы уравнений выступают уравнения (6-7)

Введем обозначения:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} (\varepsilon^{-1})_{11} & (\varepsilon^{-1})_{12} & \\ (\varepsilon^{-1})^*_{12} & (\varepsilon^{-1})_{22} & \\ & & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad d_2 = \begin{pmatrix} (\mu^{-1})_{11} & (\mu^{-1})_{12} & \\ (\mu^{-1})^*_{12} & (\mu^{-1})_{22} & \\ & & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$A_1 = (B_x, B_y, E_z)^T \quad A_2 = (D_x, D_y, H_z)^T \tag{12}$$

$$J = \frac{4\pi}{c}(-j_y, j_x, -c\rho) \tag{13}$$

Запишем в обозначениях (10)-(13) уравнения (6)-(7) в виде

$$a_1 A_1 = d_1 \frac{\partial}{\partial z} A_2 \tag{14}$$

$$a_2 A_2 = d_2 \frac{\partial}{\partial z} A_1 + J \tag{15}$$

Уравнения (14)-(15) будут основным предметом рассмотрения.

Рассмотрим задачу о возбуждении волновода (1)-(4) .

Решение системы (14)-(15) можно свести к рассмотрению одного уравнения путем введения нового неизвестного вектора A. Рассмотрим уравнение

$$a_2 d_1^{-1} a_1 A = d_2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + J \tag{16}$$

с краевыми условиями и условиями сопряжения

$$A_\perp n|_{\partial\Omega} = 0, \qquad A_z|_{\partial\Omega} = 0 \tag{17}$$

$$[A_\perp n]|_S = 0, [A_z]|_S = 0, [\mu_{33}^{-1} div A_\perp]|_S = 0, \qquad [\varepsilon(gradA_z + ik(A \times e_z))n]|_S = 0 \tag{18}$$

Зная решение этого уравнения можно определить решения уравнений (14)-(15) по формулам

$$A_1 = \frac{\partial A}{\partial z} \tag{19}$$

$$A_2 = d_1^{-1} a_1 A \tag{20}$$

Задачу (16)-(18) необходимо дополнить условиями излучения. Отметим, что в области не занятой токами, поиск решения сводится к спектральной задаче для уравнения:

$$a_2 d_1^{-1} a_1 A = -\gamma^2 d_2 A, \tag{21}$$

с соответствующими краевыми условиями и условиями сопряжения [см.4].

Задачу (21) можно рассматривать в пространстве

$$W = (A_\perp \in H_0(div), A_z \in \dot{H}^1)$$

Отметим следующую особенность задачи (21), рассматриваемой в W. Множество векторов вида $(rot\phi, ik\phi)^T$ являются решением задачи, отвечающими нулевому собственному значению. Таким образом у задачи (21) существует бесконечномерное ядро. В то же время корневые векторы задачи, отвечающие ненулевым собственным значениям γ_n^2 удовлетворяют, как легко убедиться, уравнению

$$(\mu^{-1} A_\perp, rot\phi)_{L_2} + ik(\varepsilon_{33} A_z, \phi)_{L_2} = 0, \forall\phi \in \dot{H}^1 \tag{22}$$

Данное уравнение представляет собой обобщенную запись одного из уравнений Максвелла, не использованного при постановке задачи. Введем пространство

$$V = (A_\perp \in H_0(div), A_z \in \dot{H}^1, (\mu^{-1} A_\perp, rot\phi)_{L_2} + ik(\varepsilon_{33} A_z, \phi)_{L_2} = 0, \forall\phi \in \dot{H}^1)$$

Будем рассматривать далее спектральную задачу в пространстве V. Норма пространства V определяется следующим образом

$$||A||_V^2 = ||A_\perp||_{H(div)}^2 + ||A_z||_{H^1}^2$$

Как было показано в [4,5,8] справедлива

Теорема 1. *Система корневых векторов полна в пространстве* V.

Кроме того справедливы утверждения.

Все собственные значения, кроме может быть конечного числа, лежат в секторе $|arg(\gamma_{max}^2 - \gamma^2)| < \beta$, где β сколь угодно мало, γ_{max}^2 - некоторая константа. Существует лишь конечное число вещественных положительных γ_n^2.

Поставим следующие условия излучения. Пусть A представим при $z \le z_1, z \ge z_2$ в виде

$$A = \sum_{n=1,N} a_{\pm n} A_n(x,y) e^{\pm i\gamma_n z} + \overline{A}, \tag{23}$$

где $\overline{A} \in L_2$.

Следует заметить, что в силу наличия в общем случае бегущих волн, условие принадлежности решения пространству L_2 не может быть использовано, поскольку при произвольном токе задача не разрешима в пространстве L_2. Обобщенным решением задачи (16)-(18),(23) будем называть вектор $A(x,y,z), A \in W$, удовлетворяющий уравнению

$$a(A,\widetilde{A}) + b(A,\widetilde{A}) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A,\widetilde{A}) + (J,\widetilde{A})_{L_2}, \forall \widetilde{A}(x,y) \in W \tag{24}$$

и условиям (23).

Наложим на ток J следующие требования. Считаем, что $J \in C(Q), suppJ = \Omega' \times [z_1, z_2], \Omega' \subset \Omega$ и ток J удовлетворяет уравнению неразрывности, которое запишем в обобщенном виде:

$$\int_{z_1}^{z_2} ((J_\perp, rot\phi)_{L_2} + (J_z, \phi)_{L_2}) dz = 0, \forall \phi \in \dot{H}^1$$

При предположении о том, что частота электромагнитного поля не совпадает с частотой отсечки, множество собственных значений задачи (21) состоит из нулевого собственного значения, которому соответствуют собственные векторы вида $N = (rot\phi, ik\phi)^T, \forall \phi \in \dot{H}^1$

и ненулевых собственных значений, которым соответствуют корневые векторы, принадлежащие пространству V.

Отметим, что вектор J не удовлетворяет условию (22) Будем использовать следующий метод построения решения $A \in W$, удовлетворяющего уравнению (24), которое запишем в виде:

$$a(A, \widetilde{A}) + b(A, \widetilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \widetilde{A}) + c(d_2^{-1} J, \widetilde{A}), \forall \widetilde{A} \in W. \qquad (25)$$

и условиям излучения (23).

Представим вектор J в виде суммы двух слагаемых

$$J = J_1 + J_2,$$

где J_1 удовлетворяет условию (22), J_2– принадлежит ядру спектральной задачи (2.27), рассматриваемой в пространстве W. Возможность подобного представления доказана в [4,6]. Разобьем исследование задачи для уравнения (25) на три задачи: Найти $A \in W$ удовлетворяющее уравнению:

$$a(A, \widetilde{A}) + b(A, \widetilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \widetilde{A}) + c(d_2^{-1} J_2, \widetilde{A}), \forall \widetilde{A} \in W \qquad (26)$$

с условиями при $z \le z_1, z \ge z_2$:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0, z \le z_1, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = 0, z \ge z_2.$$

Данные условия соответствуют тому, что при $z \le z_1, z \ge z_2$ поле $\frac{\partial A}{\partial z} = A_1$ обращается в нуль, поскольку ток J_2 не принадлежит пространству V и возбуждает поле в ближней зоне.

Ток J_1 представим в виде суммы:

$$J_1 = J_1^N + \overline{J}_1$$

Ток J_1^N представляет собой проекцию вектора J_1 на конечномерное пространство собственных векторов, которые будем обозначать A_n, отвечающих бегущим волнам. Собственные векторы сопряженной задачи будем обозначать $A^n = \nu d_2^{-1} A_n$, где матрица

$$\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_1^N = \sum_{n=1}^{N} (J_1, A^n)_{L_2} A_n$$

Для вектора J_1^N будем рассматривать задачу

$$a(A,\widetilde{A})+b(A,\widetilde{A})=\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(A,\widetilde{A})+c(d_2^{-1}J_1^N,\widetilde{A}),\forall\widetilde{A}\in W \qquad (27)$$

с условиями излучения при $z\leq z_1, z\geq z_2$:

$$A=\sum_{n=1}^{N}a_{\pm n}A_n e^{i\gamma_n z}$$

Решение данной задачи сводится к решению конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ток $\overline{J}_1$ удовлетворяет условиям ортогональности

$$c(\overline{J}_1,A^n)=0, n=1,N$$

При этих условиях на правую часть существует решение уравнения

$$a(A,\widetilde{A})+b(A,\widetilde{A})=\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(A,\widetilde{A})+c(d_2^{-1}\overline{J}_1,\widetilde{A}),\forall\widetilde{A}\in W, \qquad (28)$$

удовлетворяющее условиям

$$A\in W, A\in L_2.$$

Сумма решений этих трех задач (26),(27),(28) будет удовлетворять уравнению (24) и условиям излучения (23)

Приступим к строгому построению решения поставленных задач. Приведем следующую теорему о разложении произвольного векторного поля [см.4,6].

Теорема 2. *Пусть Ω - область с липшиц-непрерывной границей.* $A\in L_2(\Omega),(\mu A_\perp n)|_{\partial\Omega}=0, A_z|_{\partial\Omega}=0.$ *Тогда найдутся* $\phi\in\dot{H}^1$, *и* $F\in H(div)\oplus H^1$, *такие что*

$$A=\begin{pmatrix}\mu^{-1} & \\ & \varepsilon_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}rot\phi\\ ik\phi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-ik\mathcal{J} & grad\\ -div & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_\perp\\ F_z\end{pmatrix}$$

или

$$A=d_2(rot\phi,ik\phi)^T+a_2F$$

Отметим, что $d_2^{-1}a_2F$ удовлетворяет (22).

Рассмотрим уравнение

$$a(A,\widetilde{A})+b(A,\widetilde{A})=\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(A,\widetilde{A})+c(d_2^{-1}J,\widetilde{A})$$

Представим вектор J, который по условию удовлетворяет $\mu Jn|_{\partial\Omega} = 0, J_z|_{\partial\Omega} = 0$ в виде

$$J = d_2(rot\phi, ik\phi)^T + a_2 F \tag{29}$$

Тогда

$$d_2^{-1} J = (rot\phi, ik\phi)^T + d_2^{-1} a_2 F,$$

причем $d_2^{-1} a_2 F$ удовлетворяет (22) По построению $(rot\phi, ik\phi) \in W$. Действительно, поскольку $\phi|_{\partial\Omega} = 0$, то $rot\phi n|_{\partial\Omega} = 0$, и $rot\phi \in H(div)$. Вектор $d_2^{-1} a_2 F$ удовлетворяет условиям $d_2^{-1} a_2 F n|_{\partial\Omega} = 0, (d_2^{-1} a_2 F)_z|_{\partial\Omega} = 0$ в силу равенства (29). Обозначим

$$J_1 = a_2 F, \quad J_2 = d_2(rot\phi, ik\phi)$$

Рассмотрим первую задачу. Найти $A \in W$, удовлетворяющий задаче

$$a(A, \widetilde{A}) + b(A, \widetilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \widetilde{A}) + c(d_2^{-1} J_2, \widetilde{A}), \forall \widetilde{A} \in W \tag{30}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}|_{z \le z_1} = 0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}|_{z \ge z_2} = 0 \tag{32}$$

Ищем A в виде $A = (rot\psi, ik\psi)$. По существу нам требуется найти $\frac{\partial A}{\partial z}$, чем мы и ограничимся. Имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \widetilde{A}) + c(d_2^{-1} J_2, \widetilde{A}) = 0, \forall \widetilde{A} \in W. \tag{33}$$

Таким образом, получим

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\int_{z_1}^{z} d_2^{-1} J_2 dz = -\int_{z_1}^{z} (rot\phi, ik\phi) dz$$

Покажем, что выполняется условие $\frac{\partial A}{\partial z}|_{z \ge z_2} = 0$ и задача не является переопределенной. Действительно, $\frac{\partial A}{\partial z} = (rot\psi, ik\psi)$ где $\psi = \int_{z_1}^{z} \phi dz$ Т.к. $\forall \widetilde{\phi}(x, y) \in \dot{H}^1$

$$(\mu^{-1} rot\psi, rot\widetilde{\phi}) - k^2(\varepsilon_{33}\psi, \widetilde{\phi}) = \int_{z_1}^{z} (\mu^{-1} rot\phi, rot\widetilde{\phi})_{L_2} - k^2(\varepsilon_{33}\phi, \widetilde{\phi})_{L_2}) dz =$$

$$\int_{z_1}^{z} ((J_\perp, rot\widetilde{\phi})_{L_2} + ik(J_z, \widetilde{\phi})_{L_2})) dz = \frac{4\pi}{c} \int_{z_1}^{z} ((\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y}), \widetilde{\phi})_{L_2} - i\omega(\rho, \widetilde{\phi})_{L_2}) dz = \frac{4\pi}{c} \int_{z_1}^{z} (\frac{\partial j_z}{\partial z}, \widetilde{\phi})_{L_2} dz = 0$$

в силу того, что $j_z = 0$ при $z \geq z_2$ и $div_\perp j - i\omega\rho = -\frac{\partial j_z}{\partial z}$ Таким образом

$$(\mu^{-1} rot\psi, rot\widetilde{\phi})_{L_2} - k^2(\varepsilon_{33}\psi, \widetilde{\phi})_{L_2} = 0, \forall\phi \in \dot{H}^1. \tag{34}$$

В силу того, что $\psi \in \dot{H}^1(\Omega)$ и k^2 не совпадает с частотой отсечки [см. 4], имеем $\psi = 0, \forall z \geq z_2$ и отсюда $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$, как предел справа $\forall z \geq z_2$. Следовательно, найдено решение задачи.

Перейдем к рассмотрению задачи относительно вектора J_1. Система корневых векторов задачи

$$a(A, \widetilde{A}) + b(A, \widetilde{A}) = -\gamma^2 c(A, \widetilde{A}), \forall\widetilde{A} \in V$$

полна в пространстве V. Представим пространство V в виде суммы пространства V_N - линейной оболочки собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\gamma_n^2 > 0$ и V_1 - замыкания линейной оболочки остальных корневых векторов $V = V_N + V_1$. Представим вектор J_1 в виде $J_1 = J_1^N + \overline{J}_1$, где

$$J_1^N = \sum_{n=1}^{N} (J_1, A^n)_{L_2} A_n$$

Кроме того,

$$(J_1, A^n)_{L_2} = (J, A^n)_{L_2} - (d_2(rot\phi, ik\phi)^T, A^n)_{L_2}$$

Перейдем ко второй задаче поиска вектора $A \in V_N$ вида

$$A = \sum_{n=1}^{N} Z_n(z) A_n(x, y),$$

удовлетворяющий уравнению

$$a(A, \widetilde{A}) + b(A, \widetilde{A}) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \widetilde{A}) + c(d_2^{-1} J_1^N, \widetilde{A}), \forall A \in W \tag{35}$$

и условиям излучения

$$A = \sum_{n=1}^{N} a_{+n} A_n(x, y) e^{i\gamma_n z}, z \geq z_2 \tag{36}$$

$$A = \sum_{n=1}^{N} a_{-n} A_n(x, y) e^{-i\gamma_n z}, z \leq z_1 \tag{37}$$

Учитывая, что векторы $A_n(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$(A_n, A^m) = 0, \gamma_n \neq \gamma_m,$$

где $A^m = \nu d_2 A_n$ получим следующие краевые условия

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \sum_{n=1}^{N} i\gamma_n (A, A^n)_{L_2} A_n, z \geq z_2$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\sum_{n=1}^{N} i\gamma_n (A, A^n)_{L_2} A_n, z \leq z_1$$

Отсюда для нахождения функций Z_n получим уравнения

$$Z_n'' + \gamma_n^2 Z_n = J_n(z) \quad (38)$$

$$(Z_n' - i\gamma_n Z_n)|_{z=z_2} = 0 \quad (39)$$

$$(Z_n' + i\gamma_n Z_n)|_{z=z_1} = 0 \quad (40)$$

В результате определяется $Z_n(z)$ Таким образом может быть построено решение задачи.

Рассмотрим теперь третью задачу, когда в качестве правой части выступает $\overline{J}_1$. В силу того, что $(\overline{J}_1, A^n) = 0, n = 1, \ldots N$, вектор $\overline{J}_1 \in V_1$

$$a(A, \widetilde{A}) + b(A, \widetilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \widetilde{A}) + c(d_2^{-1} J_1, \widetilde{A}), \forall \widetilde{A} \in W \quad (41)$$

При этом будем искать $A \in L_2(V; -\infty, \infty), \frac{\partial A}{\partial z} \in L_2(V; -\infty, \infty)$ Если уравнение удовлетворяется $\forall \widetilde{A} \in V_1$, то оно удовлетворяется $\forall \widetilde{A} \in W$. Действительно, V_1 является замыканием линейной оболочки корневых векторов задачи (21), удовлетворяющих условиям $(J_1, A^n)_{L_2} = 0, n = 1, \ldots N$. При этом, если A является решением задачи и элементом пространства V_1, то $\frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \widetilde{A}) = 0, \forall \widetilde{A} \in V_1^{\perp}$, где $V_1^{\perp}$ - ортогональное дополнение пространства V_1 до пространства W относительно скалярного произведения, порождаемого $c(A, \widetilde{A})$. Поскольку векторы A_n - плотны в пространстве V_1 и

$$a(A_n, \widetilde{A}) + b(A_n, \widetilde{A}) = -\gamma_n^2 c(A_n, \widetilde{A}) = 0, \forall \widetilde{A} \in V_1^{\perp},$$

то

$$a(A, \widetilde{A}) + b(A, \widetilde{A}) = 0, \forall \widetilde{A} \in V_1^{\perp}.$$

Вектор $\overline{J}_1$ по построению удовлетворяет условиям

$$c(d_2^{-1} \overline{J}_1, \widetilde{A}) = 0, \forall \widetilde{A} \in V_1^{\perp}$$

Таким образом, решение задачи,рассматриваемой в пространстве V_1 удовлетворяет задаче в пространстве W, т.е. именно в том пространстве, в котором рассматривается задача. Будем рассматривать далее уравнение в пространстве V_1.

Предположим, что решение задачи существует. Применяя к уравнению (41) преобразование Фурье, приходим к задаче

$$(I+C)A^F = -\gamma^2 H A^F + J_1^F \tag{42}$$

Определим вектор A следующим образом

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma_z}(I+C+\gamma^2 H)^{-1})^{-1} H J_1^F(x,y,\gamma)d\gamma \tag{43}$$

Ограниченность резольвенты и, следовательно, возможность такого определения вектора A доказана в [4].

Вектор $A \in V_1$ является решением задачи

$$((I+C)A,\widetilde{A})_V = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(HA,\widetilde{A})_V + (HJ_1,\widetilde{A})_V, \forall \widetilde{A} \in V_1 \tag{44}$$

Действительно,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} HA = -\int_{\infty}^{-\infty} \gamma^2 e^{i\gamma_z} H(I+C+\gamma^2 H)^{-1} H J_1^F d\gamma A =$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} e^{i\gamma_z} H J_1^F(x,y,\gamma)d\gamma - \int_{\infty}^{-\infty} e^{i\gamma_z}(I+C)(I+C+\gamma^2 H)^{-1} H J_1^F d\gamma =$$

$$HJ_1(x,y,z) - (I+C)A(x,y,z)$$

Таким образом, определено решение третьей задачи. Итак, доказано существование решений задач (30)-(32),(35)-(37),(41), а тем самым и решения исходной задачи (25) с условиями излучения (23), что при сделанных предположениях решает задачу возбуждения волновода с произвольным неоднородным в поперечном сечении заполнением.

Литература

1. Краснушкин П.Е., Моисеев Е. И. О возбуждении вынужденных колебаний в слоистом радиоволноводе. ДАН, 264, N 5, 1123-1127, 1982.

2. Смирнов Ю.Г. Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений. Дифференциальные уравнения, 1991, т.27, N 1, с.140-147.

3. А.Л.Делицын. О проблеме применения метода конечных элементов к задаче вычисления мод волноводов // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1999. т. 39. N 2. С. 315-322.

4. А.Н.Боголюбов, А.Л.Делицын, А.Г.Свешников // О задаче возбуждения волновода с неоднородным заполнением // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1999. т. 39. N 11.

5. А.Н.Боголюбов, А.Л.Делицын, А.Г.Свешников. О полноте корневых векторов радиоволновода // Доклады РАН. 1999. т. 369. N 4. С. 1-3.

6. А.Н.Боголюбов, А.Л.Делицын, А.Г.Свешников. Об условиях разрешимости задачи возбуждения волновода // Доклады РАН. 2000.

7. А.Н.Боголюбов, А.Л.Делицын, А.Г.Свешников. О задаче возбуждения бегущих волн в радиоволноводе током // Радиотехника и электроника. 2000.

8. А.Л.Делицын. Об одном подходе к задаче о полноте системы собственных и присоединенных волн волновода // Дифференциальные уравнения 2000. 5.