

*А.Я. Буничева, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский,
А.Б. Хруленко.*

Математическое моделирование некоторых прикладных задач гемодинамики

Введение.

Настоящая работа связана с обсуждением некоторых фундаментальных вопросов математического моделирования в медицине и содержит описание примеров конкретных результатов аналитического и численного исследования задач гемодинамики. Эти исследования проводились на базе программного комплекса CVSS, предназначенного для моделирования течения крови в системе кровообращения организма в целом и в ее фрагментах под действием периодически сокращающегося сердца и внешних факторов различного типа.

Математическое исследование сердечно – сосудистой системы является одной из актуальных проблем современной фундаментальной медицины и количество работ в этой области постоянно растет (представление о направлениях исследований могут дать, например, работы [1-15]). В работах [15-25] предложена замкнутая иерархическая нелокальная математическая модель кровеносной системы на графе эластичных сосудов и ее программная реализация в виде программного комплекса CVSS. В этих работах особое внимание обращается на влияние различных органов (сердца, почки и др.) на давление в кровеносной системе и изучается влияние разнообразных факторов, связанных с изменением функциональных характеристик сосудов, на состояние системы в целом и способов компенсации нарушений системы кровообращения. В моделях и программном комплексе имеется возможность учета переноса вместе с кровью различного рода веществ (фракций крови, химических соединений и т.д.), оказывающих существенное воздействие на функционирование сердечно-сосудистой системы.

При исследовании нелинейных моделей важную роль играют точные и приближенные аналитические решения задач, хотя бы и в упрощенной постановке. Эти решения могут использоваться как тесты для верификации методик численного решения задач. Вместе с тем они представляют большой самостоятельный интерес с позиции изучения качественной структуры и общих свойств гемодинамических течений. В частности, авторами решена задача о распространении пульсовых волн давления и скорости по артериальной части кровеносной системы и установлены качественные критерии эволюции амплитуды таких волн в зависимости от параметров сосудов [21,22]. В данной работе кратко описан метод построения точных решений линеаризованных уравнений гемодинамики на гра-

фе, анализ этих решений и конкретный пример применения развитой аналитической теории для решения прикладных задач медицины.

В работе приведены примеры математического моделирования кровотока в большом круге кровообращения под действием периодически сокращающегося сердца, которые воспроизводят ряд основных физиологических закономерностей работы кровеносной системы в целом. Результаты численных расчетов показывают, что важную роль в формировании величины артериального давления играют свойства так называемых резистивных сосудов и фильтрационная функция почки.

В качестве одного из примеров практического применения математического моделирования в гемодинамике приводятся расчеты исследования эффекта «обкрадывания» кровоснабжения тканей головного мозга при временном пережатии (окклюзии) подключичной артерии.

Авторы признательны академику А.А. Самарскому за поддержку работы, академику О.М. Белоцерковскому и чл.-корр. РАН А.С.Холодову за внимание и помощь; благодарят проф. В.Б. Кошелева за содержательные обсуждения, а также проф. В.А. Лазарева, проф. А.Р. Шахновича, В.А. Шахновича, Г.И. Кунцевич за полезные советы и любезно предоставленные материалы.

§1. Математическая модель и ее реализация

В основу математического описания движения крови в сердечно-сосудистой системе положены законы сохранения массы и импульса (количество движения).

Сосуды будем считать достаточно протяженными по сравнению со своими поперечными размерами, что позволяет проводить их рассмотрение в квазиодномерном приближении [25].

Используемый в работе термин “кровь” подразумевает несжимаемую жидкость, у которой плотность и коэффициент кинематической вязкости совпадают с соответствующими параметрами крови человека.

Движение крови в изолированном кровеносном сосуде в квазиодномерном приближении описывается системой уравнений гемодинамики [15-18]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial US}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = F_{mp} + F_{sp}, \quad (1.2)$$

$$S = S(P). \quad (1.3)$$

Здесь S – площадь поперечного сечения сосуда, $U(x,t)$ – скорость

движения крови вдоль сосуда, $P(x, t)$ - давление крови в кровеносном сосуде, t - время, x - локальная пространственная координата, в качестве которой выбрана длина дуги вдоль оси сосуда, ρ - плотность крови ($\rho = const$).

Сила трения потока крови о стенки сосуда в данной работе полагалась равной $F_{\text{тр}} = -8\pi\nu U/S$, где ν - коэффициент кинематической вязкости крови. Гравитационные силы $F_{\text{гр}}$ в данной работе не учитывались.

Зависимость $S = S(P)$ отражает упруго-механические свойства сосудов в приближении эластичной тонкой изотропной оболочки. Конкретный вид $S(P)$ определяется типом рассматриваемого сосуда. Наиболее характерная зависимость показана на рис.1, при этом важно отметить монотонность графика функции $S(p)$: $dS/dp \geq 0$. Как было показано в [16,17] квазилинейная система (1.1)-(1.3) при $dS/dp > 0$ имеет гиперболический тип и испытывает вырождения на участках, где dS/dp обращается в нуль.

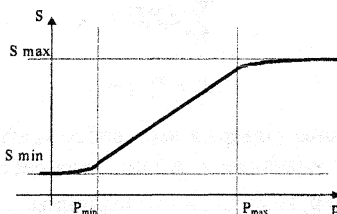


Рис.1

В данной работе в основном использован простейший модельный вид зависимости $S(P)$:

$$S(P) = \begin{cases} S_{\max}, & P > P_{\max} \\ S_{\min} + \frac{S_{\max} - S_{\min}}{P_{\max} - P_{\min}} (P - P_{\min}), & P_{\min} \leq P \leq P_{\max} \\ S_{\min}, & P < P_{\min} \end{cases} \quad (1.4)$$

Сердечно-сосудистая система представляет собой совокупность функциональных элементов: сердца, мышечных тканей или тканей отдельных органов, а также сосудов, кровоснабжающих эти органы или ткани.

Для целей математического моделирования формально сопоставим сердечно-сосудистой системе некоторый граф, состоящий из набора за-

нумерованных ребер и вершин и передающий топологию строения кровеносной системы человека.

В таком графе ребра соответствуют магистральным сосудам или жгутам одностипных более мелких сосудов (микроциркуляторное русло). Каждое ребро графа определяется двумя связанными с ним вершинами, характеризующими начало и конец ребра (сосуда).

Для того, чтобы замкнуть систему уравнений (1.1)-(1.3) на графе сосудов в вершинах графа необходимо задать условия сопряжения или граничные условия.

Вершины графа можно разделить на внутренние и граничные. Внутренние вершины связаны с двумя и более ребрами графа. В зависимости от элемента кровеносной системы, который они моделируют, будем различать внутренние вершины двух типов.

В вершинах графа первого типа, соответствующих участкам ветвления кровеносных сосудов, предполагаются выполненными равенства (условия сопряжения), выражающие закон сохранения массы и непрерывности давлений:

$$\sum_i z_i S_i U_i = 0,$$

$$P_i = P_j, \quad i \neq j,$$

где индексы i и j равны номерам всех ребер графа, связанных с рассматриваемой вершиной. Значение z_i равно 1 для ребер, входящих в вершину и z_i равно -1 для ребер, выходящих из вершины.

В ряде расчетов вместо условия равенства давлений P_i использовалось условие непрерывности интеграла Бернулли $B_i = \frac{U_i^2}{2} + \frac{P_i}{\rho}$.

В вершинах графа второго типа, соответствующих участкам фильтрации крови через капиллярную сеть мышечной ткани или отдельные органы, предполагаются выполненными соотношения, выражающие закон сохранения массы и закон фильтрации Дарси:

$$z_i S_i U_i + z_j S_j U_j = 0, \quad z_i S_i U_i = k_d (P_i - P_j),$$

где индексы i и j равны номерам двух ребер, связанных с рассматриваемой вершиной, k_d - коэффициент фильтрации через данную ткань.

Каждая из граничных вершин графа, число которых не менее двух, связана только с одним ребром. Они соответствуют входу и выходу системы и могут моделировать, например, работу сердца. Нагнетательная функция сердца может моделироваться заданием в вершине, функционально соответствующей началу восходящего отдела аорты, зависимости от времени потока крови

$$SU = q_a(t),$$

согласованной с величиной сердечного выброса.

В вершине, соответствующей венозному синусу сердца, может быть, например, задано давление $P = P_v(t)$.

В случае рассмотрения какого-либо фрагмента кровеносной системы граничные вершины графа нуждаются в отдельном описании.

Микроциркуляторное русло формируют в основном три типа микрососудов: артериолы (приносящие сосуды), сеть капилляров (сосуды, в которых осуществляется транкапиллярный обмен) и венулы (отводящие сосуды).

Определяющие параметры течения крови, такие как скорость, давление, формируются в норме в каждый момент времени нагнетательной функцией сердца, просветом (сечением) и эластичностью сосудов, свойствами капилляров тканей, а также работой почек.

Параметры сердечного выброса, сечения и эластичности сосудов различных типов зависят от большого количества факторов – нервной и гуморальной регуляции, тонуса сосудов, местных метаболитов и т.д. Проявление этих факторов приводит к изменению сечений и эластичности сосудов, а изменение нагнетательной функции сердца – к изменению сердечного выброса и его частоты.

В данной работе рассматривается течение в сердечно-сосудистой системе с фиксированными свойствами сосудов, тканей (множества капилляров) и заданным сердечным выбросом.

С математической точки зрения задача сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа на произвольном графе с нелокальными граничными условиями, дополненной нелинейными алгебраическими и интегральными соотношениями.

Для решения указанного класса задач предложены и разработаны эффективные вычислительные методы и алгоритмы, ориентированные на возможные вариации постановок задач [15-18,20].

Для численного исследования конкретных задач на основе построенных моделей разработан и реализован программный комплекс CVSS, позволяющий пользователю проводить в интерактивном режиме моделирование течения крови в выбранном из базы данных или самостоятельно построенном графе сосудов, изменять в процессе расчета параметры сосудов и органов, вводить дополнительные элементы с заданными параметрами, изменять топологию графа системы. Наряду со средствами визуализации и управления в режиме on-line, комплекс снабжен встроенными пре- и пост-процессорами для построения графа, задания начальных данных и анализа проведенного расчета.

§2. Решение системы ЛГД уравнений на графе сосудов

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим граф отвечающий большому кругу кровообращения и состоящий из n ребер соединяющих m вершин. Введем нумерацию ребер натуральными числами от 1 до n , а вершин числами от 1 до m . Обозначим через l_i , $i = 1, \dots, n$ длину ребра графа. Введем на каждом ребре свою систему координат так, что один конец ребра имеет координату $x_i = 0$, а другой конец ребра имеет координату $x_i = l_i$, $i = 1, \dots, n$. Направление координатной оси на ребре примем за направление этого ребра.

Будем предполагать, что на каждом ребре графа выполнены ЛГД уравнения [19], представляющие собой линеаризованные уравнение неразрывности и закон сохранения количества движения (1.2), представленные в виде [17]

$$\begin{aligned} p_{i,t} + \bar{u}_i p_{i,x_i} + \rho \bar{c}_i^2 u_{i,x_i} &= 0, \\ u_{i,t} + \frac{1}{\rho} p_{i,x_i} + \bar{u}_i u_{i,x_i} &= 0, \quad 0 < x_i < l_i, \quad t > 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.1)$$

и выполнены заданные начальные условия для функций $p_i(x_i, t)$ и $u_i(x_i, t)$ на ребрах:

$$\begin{aligned} p_i(x_i, 0) &= \varphi_i(x_i), \\ u_i(x_i, 0) &= \psi_i(x_i), \quad 0 \leq x_i \leq l_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь t – время, x_i – пространственная координата, в качестве которой выбрана длина дуги вдоль оси сосуда с номером i , $p_i(x_i, t)$ – отклонение давления в сосудах с номером i от стационарного значения давления $\bar{p}_i = \text{const}$, $u_i(x_i, t)$ – отклонение скорости течения от стационарного значения $\bar{u}_i = \text{const}$.

В системе уравнений (2.1) и далее используются обозначения

$$\bar{c}_i = \sqrt{\frac{\bar{s}_i}{\rho \bar{\theta}_i}}, \quad \bar{s}_i = S_i(\bar{p}_i), \quad \bar{\theta}_i = \left. \frac{dS_i(P_i)}{dP_i} \right|_{P_i = \bar{p}_i}, \quad (\bar{\theta}_i > 0),$$

где $S_i(\bar{p}_i + p_i(x_i, t))$ – заданная функция, определяющая линейную зависимость площади поперечного сечения сосуда от давления в сосудах.

Величина $\bar{C}_i$ является скоростью распространения малых возмущений в соответствующем сосудах и по аналогии с газовой динамикой далее будет называться «скоростью звука».

Функции $\varphi_i(x_i)$ и $\psi_i(x_i)$ – заданные начальные возмущения стационарного значения давления и скорости, соответственно. Стационарное течение будем считать дозвуковым, т.е. $|\bar{u}_i| < \bar{c}_i$.

Рассмотрим произвольную вершину графа с номером k . Введем для каждого ребра, соединенного с k вершиной графа, параметр z_i , которому соответствует арифметический знак “+” для ребер входящих в k вершину и знак “-” для ребер выходящих из k вершины графа.

Пусть также в каждой вершине графа выполнены некоторые дополнительные условия сопряжения на функции $p_i(x_i, t)$, $u_i(x_i, t)$. Так, если вершина графа с номером k является внутренней вершиной графа, то значения функций $p_i(x_i, t)$ и $u_i(x_i, t)$ в граничных точках ребер, соединяющихся в данной вершине, связаны между собой соотношениями:

$$\sum_{i \in \Omega(k)} z_i (\bar{s}_i u_i(x_{i, \text{сп}}, t) + \bar{\theta}_i \bar{u}_i p_i(x_{i, \text{сп}}, t)) = 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i p_i(x_{i, \text{сп}}, t) + \bar{\beta}_i u_i(x_{i, \text{сп}}, t) &= \bar{\alpha}_j p_j(x_{j, \text{сп}}, t) + \bar{\beta}_j u_j(x_{j, \text{сп}}, t), \\ t &\geq 0, \quad \forall i, j \in \Omega(k). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь, $\Omega(k)$ – множество всех номеров ребер, соединяющихся в k вершине графа; переменная $x_{i, \text{сп}}$ равна либо 0, либо l_i и совпадает со значением координаты граничной точки i ребра, соединенного с k вершиной графа.

Соотношение (2.3) является результатом линеаризации условия

$$\sum_{i \in \Omega(k)} z_i S_i(\bar{p}_i + p_i(x_{i, \text{сп}}, t))(\bar{u}_i + u_i(x_{i, \text{сп}}, t)) = 0,$$

выражающего закон сохранения потока вещества в вершине графа [17].

Соотношения (2.4) появляются при линеаризации условий вида

$$\begin{aligned} g_i(\bar{p}_i + p_i(x_{i, \text{сп}}, t), \bar{u}_i + u_i(x_{i, \text{сп}}, t)) &= g_j(\bar{p}_j + p_j(x_{j, \text{сп}}, t), \bar{u}_j + u_j(x_{j, \text{сп}}, t)), \\ \forall i, j &\in \Omega(k), \end{aligned}$$

где g_i – заданные функции.

Так, например, если на границах сосудов, входящих в вершину графа, выполняется условие непрерывности давления [17], то функции $g_i = \bar{p}_i + p_i(x_{i, \text{сп}}, t)$, $\forall i \in \Omega(k)$. Тогда коэффициенты $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i$ в (2.4) имеют следующие значения

$$\bar{\alpha}_i = 1, \quad \bar{\beta}_i = 0, \quad \forall i \in \Omega(k). \quad (2.5)$$

Если на границах сосудов, входящих в вершину графа, выполняется условие непрерывности интеграла Бернулли [17], то

$$g_i = \frac{(\bar{u}_i + u_i(x_{i, \text{сп}}, t))^2}{2} + \frac{\bar{p}_i + p_i(x_{i, \text{сп}}, t)}{\rho}, \quad \forall i \in \Omega(k)$$

и тогда коэффициенты в (2.4) имеют вид

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{\rho}, \quad \bar{\beta}_i = \bar{u}_i, \quad \forall i \in \Omega(k) \quad (2.6)$$

В случае, если вершина графа соответствует участку фильтрации через ткань [1], то

$$\begin{cases} g_i = -z_i S_i (\bar{p}_i + p_i(x_{i, \text{сп}}, t)) (\bar{u}_i + u_i(x_{i, \text{сп}}, t)) + k_D (\bar{p}_i + p_i(x_{i, \text{сп}}, t)), \\ g_j = k_D (\bar{p}_j + p_j(x_{j, \text{сп}}, t)), \end{cases}$$

где k_D - коэффициент тканевой фильтрации.

При этом коэффициенты $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i$ в (2.4) равны:

$$\bar{\alpha}_i = k_D - z_i \bar{\theta}_i \bar{u}_i, \quad \bar{\beta}_i = -z_i \bar{S}_i, \quad \bar{\alpha}_j = k_D, \quad \bar{\beta}_j = 0. \quad (2.7)$$

В случае если k вершина графа является граничной, то в точке $x_{i, \text{сп}}$ ребра с номером i , соединенного с k вершиной, задается некоторое граничное условие, например, задано изменение давления

$$p_i(x_{i, \text{сп}}, t) = \mu(t), \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

Совокупность соотношений (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) и (2.8) представляют собой рассматриваемую задачу.

2. Решение задачи.

Рассмотрим произвольную вершину графа с номером k и произвольное ребро с номером i , соединенное с k вершиной графа.

Общее решение ЛГД уравнений (2.1) имеет вид [19]:

$$\begin{aligned} p_i(x_i, t) &= z_i \frac{\rho}{2} \bar{c}_i \left(f_i^{z_i}(x_i - \bar{\lambda}_i^{z_i} t) - f_i^{-z_i}(x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t) \right), \\ u_i(x_i, t) &= \frac{1}{2} \left(f_i^{z_i}(x_i - \bar{\lambda}_i^{z_i} t) + f_i^{-z_i}(x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t) \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\bar{\lambda}_i^{z_i} = \bar{u}_i + z_i \bar{c}_i$, $\bar{\lambda}_i^{-z_i} = \bar{u}_i - z_i \bar{c}_i$,

т.е. является суперпозицией двух бегущих волн произвольного вида $f_i^{z_i}(x_i - \bar{\lambda}_i^{z_i} t)$ и $f_i^{-z_i}(x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t)$.

Отметим, что при $0 \leq x_i \leq l_i$, $t \geq 0$ в случае дозвукового стационарного течения аргумент функции $f_i^{z_i}(y_i)$ принимает значения в интервале $z_i y_i \leq x_{i, \text{сп}}$, а аргумент функции $f_i^{-z_i}(y_i)$ - в интервале $z_i y_i \geq x_{i, \text{сп}} - l_i$.

Из начальных условий (2.2) и соотношений (2.9) следует, что при значениях аргумента лежащих в интервале

$$x_{i, \text{зп.}} - l_i \leq z_i y_i \leq x_{i, \text{зп.}}, \quad i \in \Omega(k), \quad (2.10)$$

функции $f_i^{z_i}(y_i)$, $f_i^{-z_i}(y_i)$ выражаются через начальные условия (2.2) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_i^{z_i}(y_i) &= z_i \frac{\varphi_i(y_i)}{\rho \bar{c}_i} + \psi_i(y_i), \\ f_i^{-z_i}(y_i) &= -z_i \frac{\varphi_i(y_i)}{\rho \bar{c}_i} + \psi_i(y_i). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В работе [21] было показано, что волна $f_i^{-z_i}$, распространяющаяся по i ребру графа в направлении от его k вершины, представляет собой суперпозицию волн $f_j^{z_j}$ ($j \in \Omega(k)$), бегущих по ребрам графа по направлению к его k вершине:

$$\begin{aligned} f_i^{-z_i}(y_i) &= \sum_{j \in \Omega(k)} \kappa_{j \rightarrow i}^u f_j^{z_j} \left(x_{j, \text{зп.}} - \frac{\bar{\lambda}_j^{z_j}}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}} (x_{i, \text{зп.}} - y_i) \right) + \\ &+ G_i \left(-\frac{1}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}} (x_{i, \text{зп.}} - y_i) \right), \quad \forall i \in \Omega(k), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $G_i = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ вершина является внутренней вершиной графа,} \\ F_i, & \text{если } k \text{ вершина является граничной вершиной графа.} \end{cases}$

Вид функции F_i выбирается в соответствие заданным граничным условием. Так, например, если задано изменение давления, то

$$F_i(t) = -\frac{2z_i}{\rho \bar{c}_i} \mu(t).$$

В формуле (2.12) введены следующие обозначения:

$$\kappa_{i \rightarrow j}^u = \frac{\rho \bar{\alpha}_i \bar{c}_i + z_i \bar{\beta}_i}{\rho \bar{\alpha}_i \bar{c}_i - z_i \bar{\beta}_i} - \frac{2 \bar{s}_i (\rho \bar{\alpha}_i \bar{c}_i - \bar{\beta}_i \bar{m}_i)}{(\rho \bar{\alpha}_i \bar{c}_i - z_i \bar{\beta}_i)^2 \sum_{l \in \Omega(k)} \frac{\bar{s}_l (1 - z_l \bar{m}_l)}{\rho \bar{\alpha}_l \bar{c}_l - z_l \bar{\beta}_l}}, \quad (2.13)$$

$$\kappa_{j \rightarrow i}^u = - \frac{2 z_j z_i \bar{s}_j (\rho \bar{\alpha}_j \bar{c}_j - \bar{\beta}_j \bar{m}_j)}{(\rho \bar{\alpha}_i \bar{c}_i - z_i \bar{\beta}_i) (\rho \bar{\alpha}_j \bar{c}_j - z_j \bar{\beta}_j) \sum_{l \in \Omega(k)} \frac{\bar{s}_l (1 - z_l \bar{m}_l)}{\rho \bar{\alpha}_l \bar{c}_l - z_l \bar{\beta}_l}}. \quad (2.14)$$

Здесь, $\bar{m}_i = \frac{\bar{u}_i}{\bar{c}_i}$.

В случае, когда аргументы функций $f_j^{z_j}$, стоящих в правой части формулы (2.12), удовлетворяют неравенству (2.10), т.е.

$$x_{j, \text{зп.}} - l_j \leq z_j \left(x_{j, \text{зп.}} - \frac{\bar{\lambda}_j^{z_j}}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}} (x_{i, \text{зп.}} - y_i) \right) \leq x_{j, \text{зп.}}, \quad \forall j \in \Omega(k), \quad (2.15)$$

функция $f_i^{-z_i}$ в (2.12) оказывается выраженной через начальные данные для давления и скорости на всех сосудах, соединяющихся в k вершине графа.

Неравенства (2.15) эквивалентны следующим соотношениям:

$$x_{i, \text{зп.}} \leq z_i y_i \leq x_{i, \text{зп.}} - z_i \bar{\lambda}_i^{-z_i} \frac{z_j}{\bar{\lambda}_j^{z_j}}, \quad \forall j \in \Omega(k). \quad (2.16)$$

Можно показать, что неравенства (2.16), будут выполненными, при условии:

$$x_{i, \text{зп.}} \leq z_i y_i \leq x_{i, \text{зп.}} - z_i \bar{\lambda}_i^{-z_i} T, \quad (2.17)$$

где

$$T = \min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{l_j}{\bar{c}_j \pm \bar{u}_j} \right), \quad (2.18)$$

Таким образом, объединяя формулы (2.11), (2.12), (2.17), (2.18) получаем:

$$f_i^{-z_i}(x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t) = \begin{cases} -\frac{z_i}{\rho \bar{c}_i} \varphi_i(x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t) + \psi_i(x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t), \\ \text{если } x_{i, \text{зп.}} - l_i \leq z_i(x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t) \leq x_{i, \text{зп.}}; \\ \sum_{j \in \Omega(k)} \kappa_{j \rightarrow i}^u \left(\frac{z_j}{\rho \bar{c}_j} \varphi_j \left(x_{j, \text{зп.}} - \frac{\bar{\lambda}_j^{z_j}}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}} (x_{i, \text{зп.}} - (x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t)) \right) \right) + \\ + \psi_j \left(x_{j, \text{зп.}} - \frac{\bar{\lambda}_j^{z_j}}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}} (x_{i, \text{зп.}} - (x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t)) \right) \Bigg) + \\ + G_i \left(\frac{1}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}} (x_{i, \text{зп.}} - (x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t)) \right), \\ \text{если } x_{i, \text{зп.}} < z_i(x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t) \leq x_{i, \text{зп.}} - z_i \bar{\lambda}_i^{-z_i} T, \\ \forall i \in \Omega(k), \quad k = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (2.19)$$

Формулы (2.19) определяют функции $f_i^{-z_i}(x_i - \bar{\lambda}_i^{-z_i} t)$, $i = 1, \dots, n$, в области $x_i \in [0, l_i]$, $t \in [0, T]$.

Подставляя формулы (2.19) в (2.9), получаем решение задачи (2.1) – (2.5) при $t \in [0, T]$.

Если примем $p_i(x_i, T)$, $u_i(x_i, T)$ за новые начальные данные задачи (2.1) – (2.5), то получим, что формулы (2.9), (2.19) определяют решение исходной задачи уже на временном промежутке $t \in [T, 2T]$. Повторяя эту операцию далее, можно получить решение задачи (2.1) – (2.4) на любой сколь угодно большой момент времени.

3. Транспортные коэффициенты.

Введенные в рассмотрение коэффициенты $\kappa_{i \rightarrow i}^u$ и $\kappa_{j \rightarrow i}^u$ (см. формулы (2.13), (2.14)) допускают следующую трактовку. Как видно из формулы (2.9) отклонение скорости течения $u_i(x_i, t)$ от стационарного значения $\bar{u}_i$ представляет собой суперпозицию двух бегущих волн, одна из которых $f_i^{z_i}$ распространяется по i ребру графа по направлению к его k вершине, а другая $f_i^{-z_i}$ – в противоположном направлении. Далее волны $f_i^{z_i}$ и $f_i^{-z_i}$ везде будем называть волнами скорости. Из формулы (2.12) следует, что волна скорости $f_i^{-z_i}$, распространяющаяся по i ребру графа в направлении от его k вершины, представляет собой суперпозицию волн скорости $f_j^{z_j}$, распространяющихся по ребрам графа, входящим в k вершину графа, по направлению к его k вершине. При этом коэффициент $\kappa_{j \rightarrow i}^u$ ($i \neq j$) показывает во сколько раз изменилась амплитуда волны скорости при ее прохождении через k вершину графа из j ребра в i ребро, а коэффициент $\kappa_{i \rightarrow i}^u$ характеризует изменение амплитуды волны скорости, распространяющейся по i ребру, после ее отражения от k вершины графа.

Заметим, что согласно формуле (2.9) отклонение давления $p_i(x_i, t)$ от стационарного значения $\bar{p}_i$, также представляет собой суперпозицию двух бегущих волн (будем называть их волнами давления), одна из которых распространяется по i ребру графа в направлении от его k вершины и имеет вид $-z_i \rho \bar{c}_i f_i^{-z_i}$, а другая, распространяющаяся по направлению к его k вершине, имеет вид $z_i \rho \bar{c}_i f_i^{z_i}$, где $f_i^{-z_i}$ и $f_i^{z_i}$ рассмотренные ранее волны скорости. Таким образом, амплитуда волны давления, распространяющейся по i ребру, при ее отражении от k вершины графа изменяется с коэффициентом $\kappa_{i \rightarrow i}^p$ равным

$$\kappa_{i \rightarrow i}^p = -\kappa_{i \rightarrow i}^u, \quad (2.20)$$

а амплитуда волны давления при ее прохождении через k вершину графа из j ребра в i ребро изменяется с коэффициентом $\kappa_{j \rightarrow i}^p$ равным

$$\kappa_{j \rightarrow i}^p = -z_j z_i \frac{\bar{c}_i}{\bar{c}_j} \kappa_{j \rightarrow i}^u. \quad (2.21)$$

В дальнейшем коэффициенты $\kappa_{i \rightarrow i}^p$ и $\kappa_{i \rightarrow i}^u$ будем называть коэффициентами отражения волны давления и, соответственно, волны скорости от вершины графа в ребре с номером i , а коэффициенты $\kappa_{j \rightarrow i}^p$ и $\kappa_{j \rightarrow i}^u$ — коэффициентами прохождения волны давления и, соответственно, волны скорости через вершину графа из j ребра в i ребро. Всю совокупность коэффициентов $\kappa_{i \rightarrow i}^p$, $\kappa_{j \rightarrow i}^p$, $\kappa_{i \rightarrow i}^u$ и $\kappa_{j \rightarrow i}^u$ назовем транспортными коэффициентами.

§3. Свойства транспортных коэффициентов.

Введем обозначения:

$$R_{s, li} = \frac{\bar{s}_i}{\bar{s}_l}, \quad R_{\theta, li} = \frac{\bar{\theta}_l}{\bar{\theta}_i}. \quad (3.1)$$

Параметр $R_{s, li}$ показывает во сколько раз различаются стационарные значения площадей сечений l сосуда и i сосуда.

Напомним, что величина $\bar{\theta}_i = \left. \frac{dS_i(P_i)}{dP_i} \right|_{P_i = \bar{P}_i}$ характеризует скорость изменения сечения сосуда при изменении давления в нем. Чем больше значение $\bar{\theta}_i$, тем на большую величину изменится сечение сосуда при одном и том же изменении давления в нем. Величину $\bar{\theta}_i$ можно считать характеристикой эластичности сосуда.

Таким образом, параметр $R_{\theta, li}$ определяет отношение эластичностей l сосуда и i сосуда.

Полагая, что на границе ветвления сосудов выполнено условие непрерывности давления и используя для транспортных коэффициентов $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i$ формулы (2.5), а также введенные обозначения (3.1), выражения для коэффициентов отражения и прохождения волны давления (2.20), (2.21) можно преобразовать к виду:

$$\kappa_{i \rightarrow i}^p = \frac{2}{\sum_{l \in \Omega(k)} (1 - z_l \bar{m}_l) \sqrt{R_{s, li} R_{\theta, li}}} - 1, \quad \forall i \in \Omega(k), \quad (3.2)$$

$$\kappa_{i \rightarrow j}^p = \frac{2}{\sum_{l \in \Omega(k)} (1 - z_l \bar{m}_l) \sqrt{R_{s, li} R_{\theta, li}}}, \quad \forall i, j \in \Omega(k), \quad i \neq j. \quad (3.3)$$

Из формул (3.2) и (3.3) следует, что для коэффициентов отражения

и прохождения волны давления справедливы утверждения:

- 1) Коэффициенты $\kappa_{i \rightarrow j}^p > 0$, то есть волна давления проходит из i сосуда в j сосуд не изменяя своей фазы.
- 2) Коэффициенты отражения и прохождения волны давления связаны между собой следующим образом:

$$\kappa_{i \rightarrow j}^p = 1 + \kappa_{i \rightarrow i}^p.$$

- 3) Коэффициент прохождения волны давления из i сосуда в j сосуд равен коэффициенту прохождения из i сосуда в l сосуд (для любых j и l соединяющихся в одной вершине и отличных от i), т.е. $\kappa_{i \rightarrow j}^p = \kappa_{i \rightarrow l}^p$.
- 4) Коэффициент прохождения волны давления из i сосуда в j сосуд связан с коэффициентом прохождения волны давления из j сосуда в i сосуд следующим образом:

$$\kappa_{i \rightarrow j}^p = \sqrt{R_{s,ij} R_{\theta,ij}} \kappa_{j \rightarrow i}^p.$$

Отметим, что отношение коэффициента $\kappa_{i \rightarrow j}^p$ к коэффициенту $\kappa_{j \rightarrow i}^p$ есть постоянная величина, зависящая только от свойств i и j сосуда и не зависящая от свойств других сосудов, входящих в вершину ветвления.

Для случаев если на границе сосудов, входящих в участок ветвления, выполняется условие непрерывности интеграла Бернулли или если вершина графа представляет собой участок тканевой фильтрации, вид транспортных коэффициентов приведен в работе [21]. В этой же работе исследованы и общие свойства транспортных коэффициентов.

§4. Математическое моделирование неспецифического аортоартериита.

1. Расчет стационарного течения в сосудах большого круга кровообращения.

Будем большой круг кровообращения описывать графом, нумерация ребер которого указана в соответствии с рисунком 2.

В граничной вершине, из которой выходит ребро 1, задан постоянный поток жидкости равный $Q = 100$ мл/с, а в граничной вершине, в которую входит ребро 55, задается постоянное давление равное $P = 5$ мм.рт.ст. Параметры ребер графа взяты в соответствии с работой [18].

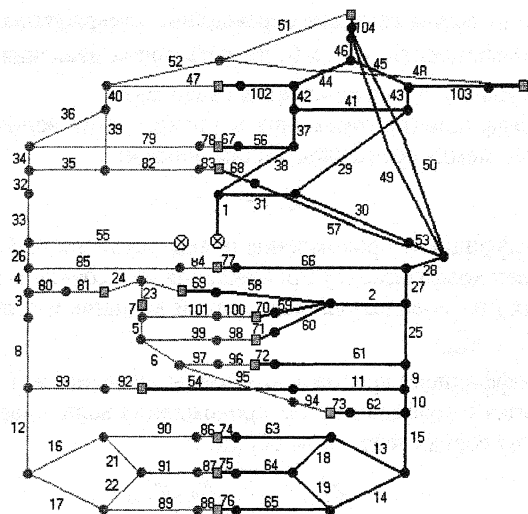


Рис.2

Стационарное течение в сосудах большого круга кровообращения рассчитывалось с помощью программного комплекса CVSS10. При этом коэффициент кинематической вязкости жидкости полагался равным $\nu = 0.04 \text{ см}^2/\text{с}$ [17]. Начальные данные на графе выбирались согласно [18] кусочно-постоянными.

В процессе расчета происходит перестройка течения, которое за время, соответствующее 15-20 периодов нормального сердечного цикла человека, выходит на стационарный режим. Так как расчеты проводились с кинематической вязкостью отличной от нуля, то значения параметров установившегося стационарного режима течения в каждом сосуде зависят от пространственной координаты. Графики этих зависимостей имеют близкий к линейному вид, причем перепад давления (скорости) вдоль каждого из сосудов артериальной части составляет около 0.1% от среднего значения давления (соответственно, скорости) в этом сосуде. Параметры стационарных режимов течения для графа, изображенного на рисунке 2, в случае выполнения на границе сосудов, входящих в вершины ветвления, условия непрерывности давления или условия непрерывности интеграла Бернулли приведены в работе [33].

Для установившегося стационарного режима течения были вычислены транспортные коэффициенты, полный набор значений которых приведен в работе [33] для артериальной части большого круга кровообращения человека.

Вычисления показали, что отличие в значениях параметров стацио-

нарного режима течения, установившегося в артериальной части большого круга кровообращения, для случаев непрерывности на границе сосудов давления и интеграла Бернулли, составляет величину порядка 15% относительно значения самих параметров.

При этом более 60% всех транспортных коэффициентов отличаются друг от друга менее чем на 5%. И только, порядка 2% транспортных коэффициентов, вычисленных при условии непрерывности интеграла Бернулли на границе сосудов, заметно отличаются (от 15% до 25%) от соответствующих значений транспортных коэффициентов, вычисленных при условии непрерывности давления на границе сосудов.

2. Общие принципы моделирования синдромов неспецифического аортоартериита.

Неспецифический аортоартериит представляет собой системное сосудистое заболевание, связанное с поражением ряда крупных сосудов артериальной части системы кровообращения [26-28]. Поэтому, при математическом моделировании неспецифического аортоартериита необходим учет определенного вида поражения участков аорты и ряда магистральных артерий.

Известно, что при поражении сосуда неспецифическим аортоартериитом происходит разрушение мышечно-эластичного каркаса сосуда и стенка сосуда становится ригидной (тонкой) [27]. Также возможно стенозирование (сужение) просвета сосуда [27]. Поэтому моделирование поражения сосуда заключается в изменении характеристик сосуда, т.е. функции $S = S(P)$ [18]. Это изменение должно приводить к уменьшению значения величины $\bar{\theta} = \left. \frac{dS(P)}{dP} \right|_{P=\bar{P}}$ пораженного сосуда, которая является ха-

рактеристикой эластичности сосуда, а в случае если наблюдается и стенозирование просвета сосуда – и к уменьшению стационарного значения величины $\bar{s} = S(\bar{P})$. Для того чтобы проследить динамику развития болезни значение величин $\bar{s}$, $\bar{\theta}$ пораженного сосуда необходимо варьировать в достаточно широком диапазоне. Например, известно, что пораженный сосуд может быть практически нерастяжимым ($\bar{\theta} \rightarrow 0$), а стенозирование просвета пораженного сосуда может достигать более 90% [27].

Моделировались такие синдромы неспецифического аортоартериита как: синдром стенозирования нисходящей грудной аорты (или коарктационный синдром), синдром поражения бифуркации аорты и синдром поражения ветвей дуги аорты. Из анатомических вариантов поражения аорты рассматривались два наиболее часто встречаемых на практике – стенозирующий и деформирующий.

При стенозирующем и деформирующем вариантах поражения аорты полагалось, что неспецифический аортоартериит поражает отдельные

отделы аорты и отходящие от пораженных отделов артерии. Отличие этих двух вариантов поражения аорты заключается в том, что при стенозирующем варианте все пораженные аортоартериитом сосуды сужаются, а при деформирующем сужаются только артерии, отходящие от пораженных отделов аорты, просвет же самой аорты не изменяется [27].

При моделировании синдромов неспецифического аортоартериита предполагалось, что пораженный сосуд равномерно сужен на всем своем протяжении. Величина эластичности пораженного сосуда ($\bar{\theta}$) предполагалась постоянной вдоль сосуда. Также считалось, что степень изменения эластичности пораженного сосуда, т.е. отношение $\frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_н}$, где $\bar{\theta}$ – текущая

эластичность пораженного сосуда, а $\bar{\theta}_н$ – эластичность того же сосуда в норме, одинаковая у всех пораженных аортоартериитом сосудов. Значение величины стенозирования просвета пораженного аортоартериитом сосуда полагалось одинаковым для всех пораженных сосудов.

Математическое моделирование неспецифического аортоартериита включало в себя следующие этапы.

Учитывая клиническую картину заболевания, задавались поражения конкретного вида, соответствующие различным синдромам неспецифического аортоартериита. Далее, с помощью программного комплекса CVSS10, рассчитывался установившийся стационарный режим течения в пораженном аортоартериитом большом круге кровеносной системы. Затем по формулам (3.2) – (3.3) вычислялись транспортные коэффициенты, позволяющие спрогнозировать распространение пульсовой волны (волны давления) по пораженной неспецифическим аортоартериитом кровеносной системе и сравнить полученные результаты с клиническими данными. Такой подход позволяет сопоставить данные и симптоматику заболевания. Это делает возможным в дальнейшем по клиническим симптомам заболевания судить о характере и степени поражения сосудов.

При моделировании полагалось, что в вершинах графа, соответствующих участкам ветвления сосудов, выполняется условие непрерывности давления.

3. Моделирование синдрома стенозирования нисходящей грудной аорты (коарктационного синдрома)

Особенности моделирования коарктационного синдрома заключаются в следующем.

При синдроме стенозирования нисходящей грудной аорты происходит поражение нисходящей грудной аорты (ребро 28) вплоть до уровня диафрагмы (ребро 2), а также артерий отходящих от пораженной аорты (ребра 2, 66) [27]. На графе большого круга кровообращения, представ-

ленного на рисунке 2, это соответствует поражению сосудов, соответствующих ребрам графа с номерами 2, 25, 27, 28, 66. Возможно также поражение проксимального сегмента (ближняя к сердцу часть сосуда) брюшной аорты (ребра 9, 10) с ее ветвями (ребра 11, 61).

Результаты математического моделирования коарктационного синдрома представлены двумя сериями расчетов. В первой серии расчетов моделировался стенозирующий вариант поражения грудной аорты. Во второй серии расчетов – деформирующий. Расчеты проводились с целью выяснения влияния степени стенозирования и изменения эластичности пораженных сосудов на величину пульсации давления в бедренной артерии (ребро 63).

В дальнейшем на всех рисунках приведенных в этом параграфе по оси ординат откладывается изменение в процентах величины пульсации давления (амплитуды пульсовой волны) в бедренной артерии (ребро 63) при коарктационном синдроме (A_{63}) относительно величины пульсации

давления в бедренной артерии в норме ($A_{63, н.}$), т.е. $A = \frac{A_{63} - A_{63, н.}}{A_{63, н.}} 100\%$.

По оси абсцисс на рисунках 3, 5 откладывается отношение эластичности пораженного аортоартериитом сосуда ($\bar{\theta}_i$) к эластичности того же сосуда в норме ($\bar{\theta}_{i, н.}$), т.е. $R = \frac{\bar{\theta}_i}{\bar{\theta}_{i, н.}}$, где i – номера любого из пораженных сосудов.

На рисунках 4, 6 по оси абсцисс откладывается H – степень стенозирования просвета пораженного аортоартериитом сосуда в процентах от площади поперечного сечения того же сосуда в норме, т.е.

$H = \frac{\bar{s}_n - \bar{s}}{\bar{s}_n} 100\%$, где $\bar{s}$ – текущая площадь поперечного сечения сосуда,

а $\bar{s}_n$ – площадь поперечного сечения того же сосуда в норме.

а) Моделирование стенозирующего варианта поражения аорты.

Расчеты, моделирующие стенозирующий вариант поражения грудной аорты (сужены просветы всех пораженных аортоартериитом сосудов – ребра 2, 25, 27, 28, 66), показали, что чем более сильно выражена степень деструкции (распад) мышечных и эластичных структур стенок пораженных сосудов R (т.е. чем менее эластичными становятся сосуды), тем слабее становится величина пульсации давления в бедренной артерии. Этот факт остается справедливым при любой степени стенозирования просвета пораженных сосудов (рис. 3). Отметим, что при полном разрушении мышечно-эластичного каркаса пораженных сосудов ($R=0$) наблюдается полное пропадание пульса в бедренной артерии.

Степень стенозирования просвета сосудов H также оказывает пря-

мое влияние на величину уменьшения пульсации давления — чем сильнее окклюзия (сужение просвета) пораженных сосудов, тем меньше величина пульсации давления в бедренной артерии (рис. 4). Из результатов расчетов следует (рис. 3, 4), что при стенозирующем варианте поражения грудной аорты величина пульсации давления в бедренной артерии будет меньше величины пульсации давления в бедренной артерии в норме вне зависимости от степени стенозирования и характера деструкции эластичных структур пораженных сосудов.

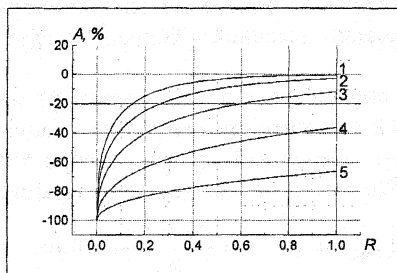


Рис. 3.

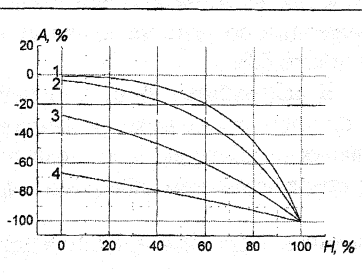


Рис. 4.

На рисунках 3 и 4 представлены результаты расчетов для случая поражения сосудов, соответствующих ребрам 2, 25, 27, 28, 66. В расчетах полагалось, что просветы всех пораженных сосудов стенозируют на H и степень изменения эластичности всех пораженных сосудов одинакова и равна R .

На рисунке 3 маркером "1" отмечены результаты расчетов с $H=0\%$. Маркеру "2" соответствует случай $H=25\%$. Маркеру "3" — случай $H=50\%$. Маркеру "4" — случай $H=75\%$. Маркеру "5" — случай $H=90\%$.

На рисунке 4 маркером "1" отмечены результаты расчетов с $R=1$. Маркеру "2" соответствует случай $R=0,5$. Маркеру "3" — случай $R=0,1$. Маркеру "4" — случай $R=0,01$.

б) Моделирование деформирующего варианта поражения аорты.

Расчеты, моделирующие деформирующий вариант поражения грудной аорты (сужены просветы только артерий отходящих от пораженных отделов аорты — ребра 2, 66), также как и в случае стенозирующего варианта, показали, что прогрессирование степени деструкции эластичных структур пораженных сосудов также приводит к ослаблению величины пульсации давления в бедренной артерии (рис. 5). Этот факт остается справедливым для любой степени стенозирования просвета артерий отходящих от пораженной аорты (ребра 2, 66). Однако при деформирующем варианте поражения, в отличие от стенозирующего варианта, степень стенозирования просвета артерий, отходящих от пораженной аорты, оказывает обратное влияние на величину пульсации давления в бедренной артерии — чем сильнее окклюзия артерий отходящих от пораженной аорты,

тем больше величина пульсации давления в бедренной артерии (рис. 6). Заметим, что если деструкция эластичных структур стенок пораженных сосудов выражена не слишком сильно, то величина пульсации давления в бедренной артерии при деформирующем варианте поражения может быть даже больше, чем величина пульсации давления в бедренной артерии в норме (рис. 5). Тем не менее прогрессирование разрушения мышечных и эластичных структур стенок сосудов приводит к пропаданию пульса в бедренной артерии.

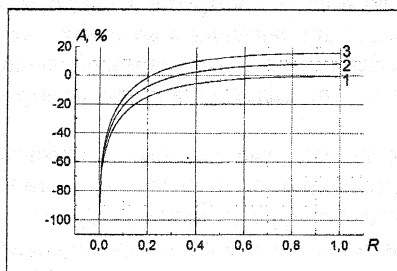


Рис. 5.

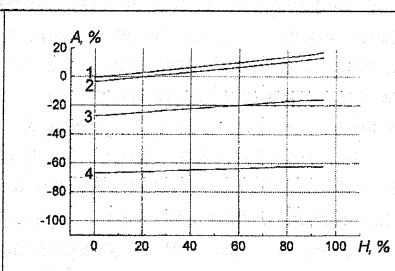


Рис. 6.

На рисунках 5 и 6 представлены результаты расчетов для случая поражения сосудов, соответствующих ребрам 2, 25, 27, 28, 66. В расчетах полагалось, что просветы пораженных сосудов, соответствующих ребрам 66, 2, стенозируют на H , а в сосудах, соответствующих ребрам 25, 27, 28 стеноз не наблюдается. Степень изменения эластичности всех пораженных сосудов одинакова и равна R .

На рисунке 5 маркером "1" отмечены результаты расчетов с $H=0\%$. Маркеру "2" соответствует случай $H=50\%$, а маркеру "3" — случай $H=90\%$.

На рисунке 6 маркером "1" отмечены результаты расчетов с $R=1$. Маркеру "2" соответствует случай $R=0.5$. Маркеру "3" — случай $R=0.1$. Маркеру "4" — случай $R=0.01$.

Таким образом расчеты показали, что прогрессирование неспецифического аортоартериита, как в случае стенозирующего, так и в случае деформирующего варианта поражения грудной аорты, приводит к уменьшению величины пульсации давления в бедренной артерии. Причем при стенозирующем варианте поражения грудной аорты ослабление пульсации давления в бедренной артерии проявляется сильнее, чем при деформирующем варианте поражения [33].

В случае, когда в поражение аортоартериитом вовлекается проксимальный сегмент брюшной аорты с ее ветвями (ребра 9, 10, 11, 61) качественно картина ослабления пульсации давления в бедренной артерии и для стенозирующего и для деформирующего варианта поражения аорты практически не изменяется [33].

4. Выводы.

Более подробное описание моделирования коарктационного синдрома, а также результаты моделирования синдрома поражения бифуркации аорты и синдрома поражения ветвей дуги аорты содержится в работе [33].

Общий вывод моделирования этих синдромов заключается в том, что при поражении неспецифическим аортоартериитом сосудов пульсовая волна проходя через пораженные сосуды будет претерпевать уменьшение своей амплитуды. В результате этого во всех рассмотренных синдромах наблюдается ослабление величины пульсации давления в артериях нижних конечностей. А при синдроме поражения ветвей дуги аорты наблюдается также и ослабление величины пульсации давления в артериях верхних конечностей и сонных артериях.

Важно отметить, что результаты, полученные при математическом моделировании неспецифического аортоартериита, качественно согласуются с встречающимися в медицинской литературе данными [26-28].

Вместе с тем при моделировании были получены и количественные зависимости симптоматики заболевания от степени поражения сосудистой системы. Учитывая, что проведение осмотра конечностей больного позволяет установить факт недостаточности притока крови конечностям, а значит и сделать предположение о степени стенозирования просвета сосудов, найденные количественные связи позволяют по наблюдаемым клиническим симптомам заболевания сделать предположение о характере разрушения мышечно-эластичного каркаса сосуда и уточнить степень стенозирования просвета пораженных сосудов.

§5. Численное моделирование циркуляции крови в большом круге кровообращения.

В настоящем параграфе приводится описание некоторых результатов численного решения задач, связанных с исследованием ряда важных свойств гемодинамического течения в большом круге кровообращения.

В численном расчете воспроизведена квазипериодическая по времени динамика распределения давления и скорости во всех основных сосудистых руслах кровеносной системы, которая вполне удовлетворительно согласуется с известными физиологическими фактами.

Численные расчеты проиллюстрировали влияние резистивных сосудов на формирование величины артериального давления, а также их роль в осуществлении активизации функционирования групп мышц при увеличении физической нагрузки.

На основе численного моделирования проведено рассмотрение од-

ного из возможных механизмов функциональной почечной регуляции артериального давления в двух характерных случаях: при изменении величины регулирующего почечного давления и при поступлении дополнительного количества жидкости в организм.

1. Описание графа большого круга кровообращения человека.

Большой круг кровообращения начинается с левого желудочка сердца, играющего роль насоса и выбрасывающего во время систолы кровь в аорту. От аорты отходят артерии распределяющие кровотоки по сосудистым руслам, несущим кровь к органам или мышечным тканям. После прохождения капиллярной сети тканей мышц или отдельных органов кровь собирается в вены, по которым поступает в правое предсердие, заканчивающее большой круг кровообращения.

На рис. 2 приведена структура графа основных системообразующих элементов большого круга кровообращения человека. Ребра графа, отмеченные черным цветом, соответствуют сосудам артериальной части системы, а ребра, отмеченные серым цветом – сосудам венозной части. Вершины, отмеченные на рис. 2 серыми квадратами, соответствуют капиллярным руслам мышечных тканей или отдельных органов. Вершины, отмеченные кружком, соответствуют участкам сочленения нескольких сосудов. Граничные вершины графа обозначены кружком с крестиком.

На приведенном графе граничная вершина, связанная с ребром 1, моделирует левый желудочек сердца. Граничная вершина, соответствующая правому предсердию, связана с ребром 55.

Укажем на графе вершины, моделирующие капиллярные сети основных функциональных элементов организма человека. В скобках отметим номера ребер артериальной части связанные с вершиной, моделирующей соответствующую капиллярную сеть. Итак, в граф включены вершины, моделирующие верхние конечности (67, 68), нижние конечности (74, 76), почки (54), печень (69), желудок (70), селезенку (71), кишечник (73, 72), ткани головного мозга (102,103,104), ткани малого таза (75), ткани грудного и плечевого поясов (77).

2. Численное исследование гемодинамики большого круга кровообращения.

Стационарные граничные условия. Маршрут.

Для начала любого расчета необходимо задать начальные данные и параметры сосудов, согласованные с известными медицинскими сведениями [29-31] и не противоречащие жестким условиям функционирования системы кровообращения. Необходимо отметить, что такая процедура нетривиальна и требует отдельного рассмотрения. Обсуждение последовательности задания начальных данных для каждой группы ребер и вершин, а также используемые в расчетах конкретные данные приведены в

[18].

Для анализа результатов численных расчетов кроме периодических граничных условий, моделирующих работу сердца, важно оценивать также фоновое течение крови, т.е. течение со стационарными граничными условиями. Поэтому сначала рассмотрим случай, когда в систему из левого желудочка сердца поступает постоянный во времени поток крови. При этом в вершине, соответствующей правому предсердию поддерживается постоянное давление. В результате в системе устанавливается стационарный режим.

Весьма затруднительно представить для рассмотрения результаты численных расчетов на всех ребрах графа одновременно. Для упрощения анализа расчетов весь граф сердечно – сосудистой системы может быть формально разбит на маршруты от аорты до венозного синуса сердца. Каждый такой маршрут содержит: 1) граничную вершину, 2) ребра графа, относящиеся к артериальной части, 3) вершину, соответствующую мышечной ткани или органу, 4) ребра графа, относящиеся к венозной части системы и, наконец, 5) граничную вершину, соответствующую правому предсердию. Кроме того, каждый маршрут, как правило, содержит эффективный резистивный сосуд. Некоторые из таких маршрутов содержат более одной вершины фильтрации через ткань. Характерным примером маршрута на графе, приведенном на рис. 2, может служить последовательность ребер 1, 38, 56, 67, 78, 79, 34, 32, 33, 55. Указанный маршрут проходит от левого желудочка сердца до правого предсердия через мышечные ткани левой верхней конечности. Схематично изменение давления вдоль маршрута приведено на рис.7

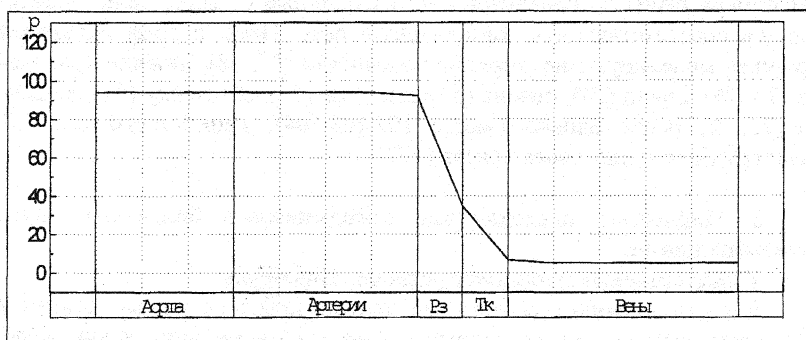


Рис.7

Здесь для обозначения частей выделенного маршрута используются следующие обозначения: Рз – резистивный сосуд, Тк – вершина фильтра-

ции через ткань. Для удобства восприятия вершина фильтрации крови через ткань заменена на рис.7 интервалом.

Как видно из рис.7, наибольшее изменение давления осуществляется вдоль резистивных сосудов и на участках фильтрации крови через сеть капилляров ткани, в то время как в магистральных сосудах происходит незначительное снижение фонового давления. Как показали расчеты, представленное на рис.7 изменение давления является характерным практически для любого маршрута графа.

Установившийся периодический режим.

Приведем типичные результаты численных расчетов с нестационарными граничными условиями. При этом на входе в систему (левый желудочек сердца) задавался периодически изменяющийся расход крови, моделирующий нагнетательную функцию сердца в норме [18], а на выходе из системы (венозный синус сердца) задавалось постоянное давление.

Прежде всего отметим, что через время порядка 5 - 10 периодов работы сердца после начала расчета течение крови приобретает установившийся квазипериодический характер.

Далее при обсуждении результатов численных расчетов под систолическим давлением в сосуде или на его участке будем подразумевать максимальное давление за период работы сердца, под диастолическим давлением – минимальное давление за сердечный цикл, а под пульсовым давлением будем иметь в виду диапазон изменения давления за период работы сердца, по сути, разность систолического и диастолического давлений.

Временные развертки изменения давления и скорости в фиксированной близкой к началу точке восходящей аорты (сосуд 1) показаны на рис.8.

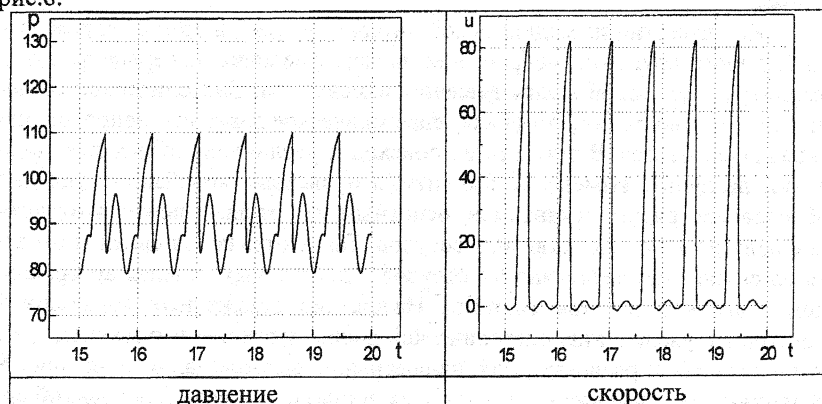


Рис.8

Как показывают результаты численных расчетов, величина давления в аорте в данном случае колеблется в пределах 80 – 110 мм.рт.ст., таким образом пульсовое давление составляет величину порядка 30 мм.рт.ст. Рассмотрим изменение величины давления в восходящей аорте за один период сердечного сокращения. В начале периода систолы в аорте наблюдается быстрое увеличение давления и скорости до максимального значения за период сердечного сокращения. После закрытия аортального клапана и начала диастолы на графике наблюдается инцизура (кратковременный быстрый спад давления). Такой спад давления обусловлен расслаблением левого желудочка и обратным током крови в аорте. Далее после некоторого повторного увеличения давления следует его уменьшение до минимального значения.

Во время систолы в восходящей аорте наблюдается резкое увеличение линейной скорости кровотока, а затем в начале диастолы наблюдается спад скорости. Отметим, что при переходе из артериальной части в венозную, пульсирующий кровоток постепенно сменяется постоянным. Численный расчет воспроизвел характерное для резистивных сосудов снижение пульсовых колебаний давления. Так в конце резистивного сосуда разность между систолическим и диастолическим давлением не достигает и 10 мм.рт.ст. После прохождения сети капилляров, линейная скорость значительно снижается и составляет, например, в вене верхней конечности величину порядка 7 см/с. Давление в венах не превосходит 15 мм.рт.ст., а в полых венах давление близко к 5 мм.рт.ст. Пульсовые колебания давления в венозной части незначительны. При движении к правому желудочку сердца скорость крови несколько возрастает.

Изменение амплитуды волны давления по мере удаления от сердца.

Как известно из медицинской литературы [29], в артериальной части большого круга кровообращения по мере удаления от сердца форма и амплитуда пульсовой волны давления изменяются. Систолическое давление постепенно растет, тогда как, диастолическое давление, напротив, несколько снижается. В результате происходит увеличение пульсовых колебаний давления. Изменение амплитуды пульсовых колебаний давления обусловлено рядом механизмов, основным из которых является отражение волн на участках ветвления сосудов. Такие отражения связаны отчасти со снижением эластичности сосудов в дистальных отделах артериальной части кровеносной системы. Наложение отраженных волн может приводить к увеличению систолической волны давления, что наблюдалось и в численных расчетах. Для иллюстрации вышесказанного на рис. 9 сравниваются давление в аорте (тонкая линия) и давление в бедренной артерии (жирная линия), полученные в численном расчете. Более детально динамика эволюции волн давления и скорости обсуждается в [32].

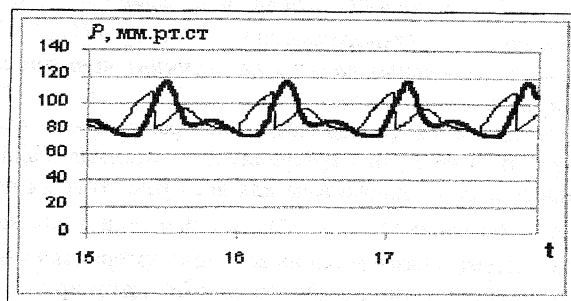


Рис.9

3. Исследование влияния группы резистивных сосудов на величину артериального давления.

Одним из важных элементов сердечно-сосудистой системы являются прекапиллярные сосуды (артериолы). В конечных разветвлениях артерий (артериолах), образующих жгуты, давление резко падает на небольшом по протяженности участке сосудистой сети, достигая 30 – 35 мм.рт.ст. в конце артериол. Такое снижение давления связано с высоким гидродинамическим сопротивлением этих сосудов. Тем самым, данный тип сосудов оказывает существенное влияние на величину артериального давления в системе кровообращения, что необходимо учитывать при математическом моделировании.

В силу большого количества артериол в графе сердечно-сосудистой системы целесообразно каждый отдельный жгут таких прекапиллярных сосудов моделировать одним эффективным резистивным сосудом. Примером таких эффективных сосудов в графе, приведенном на рис.2, являются ребра с номерами 67-76.

Обозначим характерное изменение давления вдоль такого отдельно выделенного модельного резистивного сосуда Δp_R . Это изменение давления приближенно можно оценить с помощью формулы Пуазейля:

$$\Delta p_R = \frac{8\nu\rho l q}{s^2}$$

где ν - коэффициент кинематической вязкости, ρ - плотность крови, l - длина эффективного резистивного сосуда, q - объемная скорость кровотока, s - площадь поперечного сечения эффективного сосуда. Отметим, что в сердечно-сосудистой системе изменение величины Δp_R соответствует изменению периферического сопротивления системы.

Величина Δp_R использовалась как отправная для задания основных параметров каждого модельного резистивного сосуда [18].

Влияние резистивных сосудов на величину артериального давления в случае стационарного течения.

Рассмотрим вклад группы модельных резистивных сосудов в процесс формирования величины артериального давления. Задав начальный перепад давления Δp_R одинаковым для всех резистивных сосудов, рассмотрим, как изменение значения Δp_R одновременно для всех резистивных сосудов системы сказывается на величине артериального давления.

Сначала рассмотрим течение крови в большом круге кровообращения при задании стационарных граничных условий.

На рис. 10 приведено изменение давления вдоль выделенного маршрута графа (рассмотренного ранее на рис. 7) для различных начальных значений Δp_R .

Сплошной линией отмечен “опорный” профиль давления в случае, когда начальное Δp_R бралось равным 50 мм.рт.ст, пунктирной линией отмечен профиль давления в случае, когда Δp_R равно 60 мм.рт.ст., а штриховой линией отмечен профиль давления в случае $\Delta p_R = 40$ мм.рт.ст.

Как видно из рис.10, изменение давления в венозной части и на ткани практически не зависит от величины Δp_R . В то же время при рассматриваемых граничных условиях сопротивление резистивных сосудов оказывает определяющее влияние на величину давления в сосудах артериальной части. Таким образом, изменяя качество модельных резистивных сосудов (величину Δp_R) можно варьировать давление в магистральных артериальных сосудах.

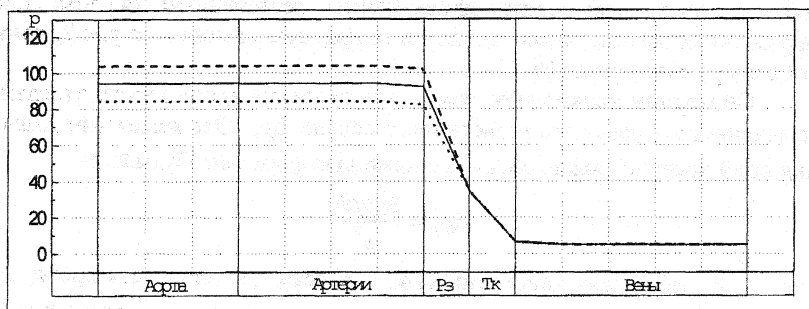


Рис.10

Влияние резистивных сосудов на величину артериального и пульсового давления.

Рассмотрим теперь течение крови под действием периодически сокращающегося сердца. Рис. 11 демонстрирует влияние Δp_R на величину давления в начале аорты при установлении периодического режима. Жирной линией отмечено систолическое давление, а тонкой серой линией – диастолическое. Для сравнения тонкой линией обозначено давление, установившегося стационарного режима, в случае задания стационарных граничных условий. На рис.12 демонстрируется зависимость пульсового давления (разности между систолическим и диастолическим давлением) в начале аорты от величины перепада давления на резистивных сосудах Δp_R .

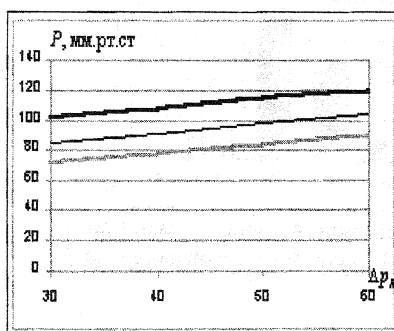


Рис. 11

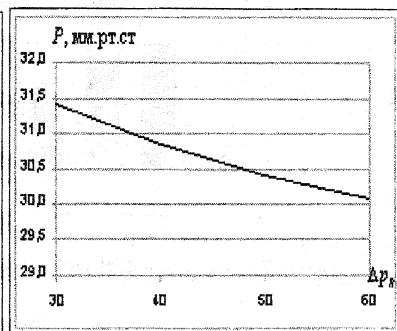


Рис.12

Таким образом, результаты расчетов показывают, что при увеличении периферического сопротивления (т.е. увеличении величины Δp_R) давление в магистральных сосудах существенно возрастает. Зависимость носит практически линейный характер. При этом с увеличением сопротивления в резистивных сосудах систолическое давление растет медленнее, чем диастолическое. В меньшей степени Δp_R влияет на величину пульсового давления. Как видно из приведенного графика, при увеличении периферического сопротивления величина пульсового давления в аорте снижается незначительно.

Моделирование физической нагрузки.

Одним из интересных прикладных вопросов моделирования сердечно-сосудистой системы является изучение перераспределения кровотоков при физической нагрузке на конечности. В этом случае предположительно происходит расширение артериол, кровоснабжающих мышцы конечностей, подвергающихся нагрузке [29]. В «работающих» тканях

мышц при этом отмечается увеличение кровотока. В большинстве остальных тканей мышц и отдельных органов влияние нагрузки приводит к снижению кровотока.

Для моделирования физической нагрузки на нижние конечности снижалась величина перепада давления Δp_R вдоль резистивных сосудов ног. Как показывают результаты численных расчетов, поток в тканях, подвергающихся нагрузке действительно увеличивается. Рис. 13 демонстрирует как изменяется величина потока через некоторые ткани в покое и при нагрузке на нижние конечности. Серые столбцы характеризуют поток через ткань в состоянии покоя, а черные – в состоянии нагрузки.

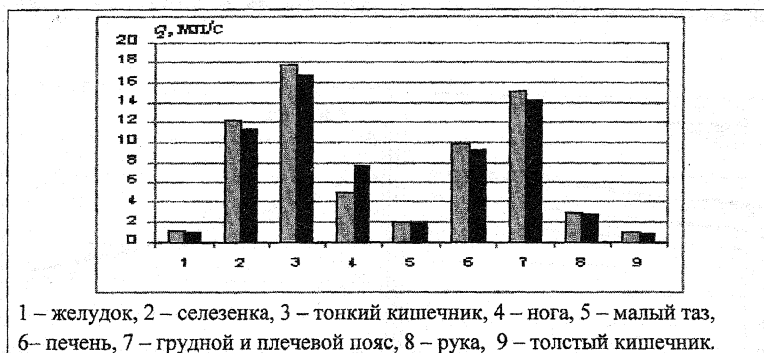


Рис. 13

Как видно из приведенной диаграммы, в тканях нижних конечностей происходит увеличение кровотока и компенсаторное снижение кровотока в других органах и тканях.

В заключении данного раздела отметим, что известные качественные закономерности циркуляции крови в кровеносной системе, такие как характер эволюции формы и амплитуды волны давления, влияние резистивных сосудов, перераспределение кровотока при мышечной нагрузке достоверно воспроизводятся при математическом моделировании сердечно-сосудистой системы. Количественные показатели течения, такие как давление, скорость, объемная скорость кровотока также согласуются с физиологически нормальным уровнем работы сердечно-сосудистой системы человека.

4. Моделирование работы почки в процессе регуляции артериального давления.

Общие физиологические закономерности.

Перейдем к рассмотрению еще одного механизма регуляции артериального давления и объема циркулирующей крови (ОЦК). Фильтраци-

онная функция почек играет существенную роль в механизме регуляции артериального давления. Следует отметить, что влияние на почечную систему регуляции оказывают также гуморальные (например, антидиуретический гормон, альдостерон) и некоторые другие факторы. В этой работе рассматривается только фильтрационная функция почек. Это обусловлено тем, что в условиях нормального кровотока в почечных артериях (без резкого повышения или значительного снижения артериального давления) влияние гуморальной регуляции учитывается эластическими свойствами артерий. Поэтому гуморальной реакцией почки на небольшие отклонения от исходных значений давления можно пренебречь. Отметим, что почечная система контроля за объемом жидкости относится к регуляторным механизмам длительного действия.

Будем полагать, что в сосуды брюшной области поступает жидкость из желудочно-кишечного тракта. Обозначим $q_{жкт}$ - объемную скорость поступления этой жидкости в кровеносную систему.

Будем говорить, что кровеносная система находится в равновесном состоянии, если количество поступающей жидкости в единицу времени равно количеству жидкости, выводимой почками. Пусть при этом $q_{поч}^*$ - количество жидкости, выделяемой почками в единицу времени (объемная скорость), а $p_{поч}^*$ - среднее давление, соответствующее такому расходу. Таким образом, $p_{поч}^*$ - давление, на которое «ориентируется» почка.

Отметим, что объем циркулирующей крови, в рамках данной модели, фиксирован и может изменяться только в результате смещения равновесия между поступлением жидкости и выделением жидкости почками.

Характерно, что даже очень небольшое повышение артериального давления по сравнению с равновесным уровнем сопровождается существенным увеличением выделения жидкости почками. Так при возрастании среднего давления $\langle p \rangle$ в почечной артерии на 1 мм.рт.ст. по сравнению с равновесным давлением $p_{поч}^*$ почечная экскреция повышается на 100 % [29,32]. Падение артериального давления ниже равновесного уровня $p_{поч}^*$ сопровождается резким уменьшением выделения жидкости почками, вплоть до его полного прекращения.

Процесс регуляции артериального давления состоит в том, что изменение выделения жидкости почками приводит к изменению ОЦК, которое в свою очередь ведет к возвращению системного давления к исходному уровню.

В норме поступление и выведение жидкости проходит с характерной объемной скоростью равной в среднем 1500 мл/сут. [29,32], что составляет примерно 1 мл/мин или 0,017 мл/с. Такую объемную скорость выделения жидкости почками, а следовательно и потребления жидкости,

обозначим $q_{опорн}^*$. Среднее почечное давление, соответствующее нормальному равновесному состоянию будем обозначать $p_{опорн}^*$.

Моделирование фильтрационной функции почки.

Уравнения для вершины, моделирующей почку, несколько отличаются от рассмотренных выше уравнений для вершин фильтрации крови через обычную ткань. В физиологически нормальном состоянии $p_{поч}^*$ совпадает с $p_{опорн}^*$. Поток жидкости $q_{поч}(t)$, выделяемой в процессе работы почки, зависит от разности текущего среднего по времени значения давления в почечной артерии $\langle p \rangle$ и параметра почки $p_{поч}^*$.

В настоящей работе для потока выделяемой жидкости $q_{поч}$ использовалась следующая зависимость от $\langle p \rangle$:

$$q_{поч} = q_{поч}^* \exp(\langle p \rangle - p_{поч}^*) \quad (4.1)$$

Таким образом, в вершине, моделирующей почку, справедливы следующие уравнения:

$$z_1 s_1 u_1 + z_2 s_2 u_2 = q_{поч}, \quad z_1 u_1 s_1 = k_d (p_1 - p_2) \quad (4.2)$$

Индексом 1 обозначены величины, отнесенные к ребру, соответствующему артериальному резистивному сосуду, а индексом 2 обозначены величины, отнесенные к ребру, моделирующему почечную вену. Содержательный смысл величин z_1, z_2 пояснен ранее.

Модель сердца.

В большинстве приведенных далее расчетов использовалась нелинейная самосогласованная модель двухкамерного сердца [18].

Сердечный выброс зависит от объема крови, притекающего в сердце во время диастолы, и составляет в среднем 80 мл, минимальный объем сердца – 50 мл, максимально возможный объем наполнения сердца составляет 200 мл, длительность сердечного сокращения – 0,8 с, из которых систола составляет 0,25 с.

Моделирование увеличения давления в почечной артерии.

Рассмотрим систему, находящуюся в равновесном состоянии, т.е. систему, в которой выполнено: $\langle p \rangle = p_{опорн}^* = p_{поч}^*$, $q_{поч}^* = q_{опорн}^*$. Предположим далее, что по некоторым причинам среднее давление в почечной артерии $\langle p \rangle$ стало превосходить давление $p_{поч}^*$, характерное для почки.

Как было показано ранее, одним из эффективных способов повышения артериального давления является изменение периферического сопротивления. При увеличении величины Δp_R для резистивных сосудов давление в предшествующих магистральных сосудах артериальной части системы увеличивается. В приведенных ниже расчетах производилось

именно увеличение величины Δp_R , что и приводило к увеличению среднего почечного давления на величину порядка 6 мм.рт.ст., при этом давление в аорте возрастало на величину порядка 5 мм.рт.ст.. Параметры почки $p_{поч}^*$, $q_{поч}^*$ в приведенном расчете не изменялись.

Результаты численных расчетов показали следующее. Процесс нормализации давления можно условно разбить на две фазы, характеризующиеся разной скоростью изменения параметров системы. Первая фаза соответствует быстрому изменению параметров. На рис.14 приведены графики изменения основных параметров в первые 200 с. расчета (на первой фазе). Как и следовало ожидать, увеличение артериального давления (рис. 14а) повлекло за собой увеличение среднего почечного давления (рис.14б), которое в свою очередь привело к резкому увеличению почечной экскреции (рис.14в) и, как следствие, к быстрому уменьшению объема циркулирующей крови (рис.14г). Такое резкое уменьшение объема способствовало снижению артериального и почечного давления, а следовательно и объемной скорости вывода жидкости, почкой.

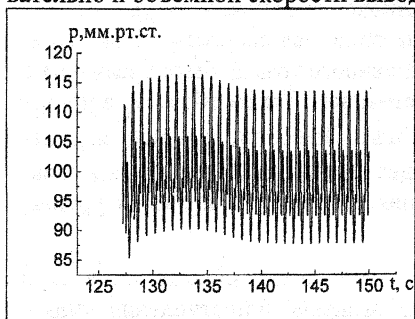


Рис 14а

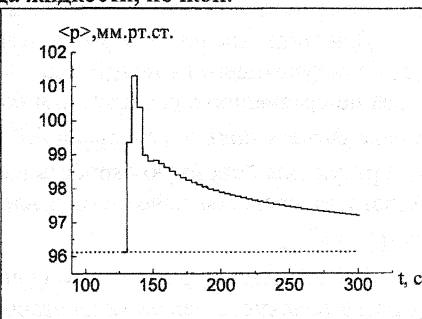


Рис 14б

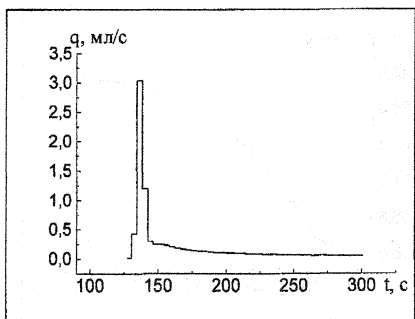


Рис 14в

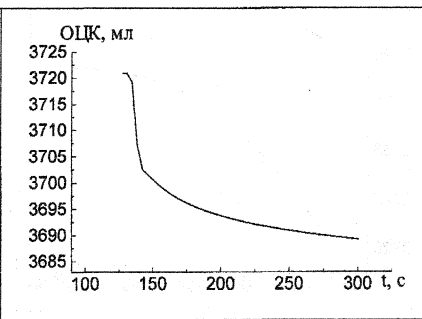


Рис 14г

После резкого изменения параметров на первой фазе, происходит дальнейшее сравнительно медленное изменение ОЦК, соответствующее второй фазе. Так за 300 с. второй фазы объем системы снижается всего на 1 мл. Среднее почечное давление при этом снижается за указанное время менее, чем на 0,2 мм.рт.ст. Для полной нормализации давления требуется достаточно продолжительный период времени, не представленный на графике.

Моделирование увеличения объема системы.

Рассмотрим поведение давления в сердечно-сосудистой системе при увеличении объема циркулирующей крови, связанного с повышенным поступлением жидкости.

Моделирование изменения объема системы также можно разбить на два этапа: 1) интенсивное наполнение системы в течение конечного промежутка времени; 2) переход на обычный режим работы, т.е. восстановление объемной скорости поступления жидкости на исходном уровне.

Для моделирования первого этапа объемная скорость потока жидкости, поступающего из желудочно – кишечного тракта, была увеличена в 10 раз по сравнению с равновесным состоянием. Таким образом, в приведенном расчете полагалось $q_{ЖКТ} = 0,17$ мл/с. При этом, величина $q_{поч}^*$, характеризующая объемную скорость выделения жидкости почками в зависимости от среднего почечного давления, осталась на прежнем уровне, т.е. $q_{поч} = q_{отпрн}^*$.

Рис.15 демонстрирует изменение во времени объема системы и среднего почечного давления на этапе повышенного поступления жидкости.

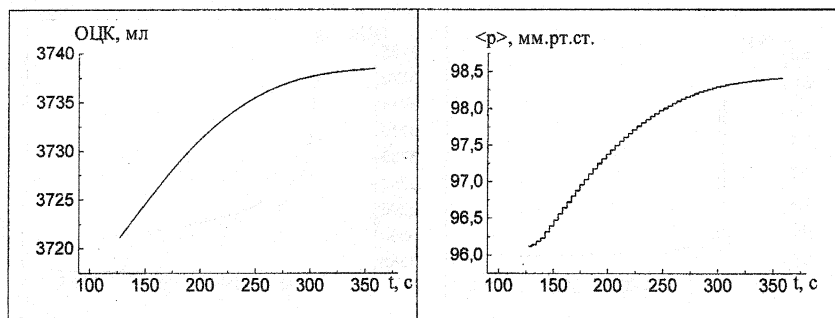


Рис. 15а

Рис. 15б

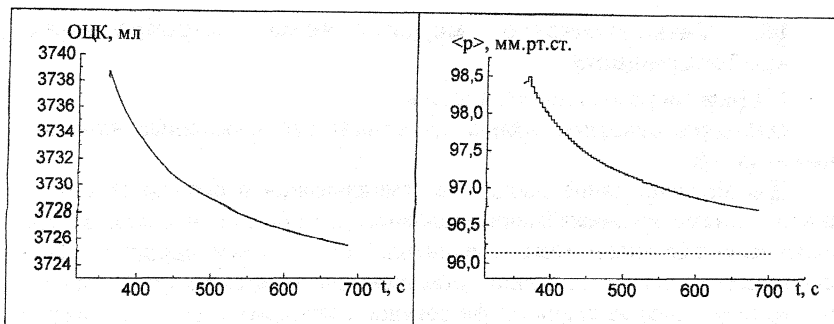


Рис. 16а

Рис. 166

Интересно отметить тот факт, что через время $t \approx 200$ с. система выходит на режим, характеризующийся постоянным объемом, т.е. объемная скорость поступающей жидкости становится равной скорости ее выделения почками. В системе устанавливается новое равновесное состояние, определяемое новыми значениями потоков поступающей и выводимой жидкости. За это время среднее давление в почечной артерии $\langle p \rangle$ поднялось примерно на 2,5 мм.рт.ст. Артериальное давление при этом изменилось на величину порядка 2 мм.рт.ст.

Для моделирования второго этапа объемная скорость потока жидкости, поступающего из кишечника, была снижена до исходного уровня $q_{ЖКТ} = q_{отпр}^*$. Этот этап характеризуется достаточно быстрым первоначальным уменьшением объема крови и среднего почечного давления. Рис.16 демонстрирует изменение во времени объема всей системы и среднего давления в почечной артерии после восстановления объемной скорости поступления жидкости.

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что при однократном избыточном поступлении жидкости в систему давление и выделение жидкости сначала повышаются, а затем восстанавливаются до прежнего равновесного уровня.

Численные расчеты показывают, что рассмотренная модель, описывающая фильтрационные свойства почки, в целом согласуется с известными физиологическими зависимостями. Численные расчеты подтверждают, что фильтрационная функция почки является длительным механизмом регуляции артериального давления.

§6. Математическое моделирование церебрального кровообращения

1. Граф сосудов головного мозга

Описание основных путей артериального кровоснабжения головного мозга.

Для моделирования процессов гемодинамики в сложно организованной системе кровоснабжения головного мозга, включающей в себя многочисленные анастомозы (соединения) с артериями различных бассейнов, необходимо достаточно детальное описание сосудистой топологии. Принципиальная схема графа сосудов головного мозга и ее связь с остальной частью сердечно-сосудистой системы представлена на рис.17. В данном случае нас интересуют исключительно процессы в сосудах мозга, кровоснабжение остальных органов учитывается эффективным образом. А именно, рассматриваются сосуды левой и правой руки как отдельные элементы (вершина 84 – сосуды тканей правой руки, вершина 90 – сосуды тканей левой руки), а остальная часть кровеносной системы представлена вершиной 91. Кровь в систему поступает из сердца (вершина 80), проходит через сосуды артериального русла, ткани (вершины 2,3,13,14,16,22,58,59,60,61), собирается в сосуды венозного русла и поступает обратно в сердце (вершина 93).

Собственно кровоснабжение мозга осуществляется двумя парами магистральных артерий головы: по внутренним сонным артериям (ВСА) и по позвоночным артериям (ПА). Причем 2/3 всего количества крови, притекающей к мозгу, доставляется по ВСА и 1/3 поступает по ПА. Первые образуют *каротидную*, вторые – *вертебро-базилярную* систему кровоснабжения головного мозга.

Каротидная система.

Внутренняя сонная артерия исходит из общей сонной артерии (ОСА) в области ее бифуркации. Правая ОСА отходит от плечеголового ствола (ППГА) - ветви дуги аорты, левая – непосредственно от дуги аорты.

Общая сонная артерия на уровне 3-4 шейных позвонков делится соответственно на внутреннюю сонную артерию и наружную сонную артерию (НСА). Наружная сонная артерия (ребра НСА1-4) в норме непосредственного участия в кровоснабжении головного мозга не принимает, однако при развитии стенозирующей патологии магистральных артерий головы с декомпенсацией всего мозгового кровообращения, ее роль в коллатеральном кровоснабжении существенно возрастает. Сегмент НСА1 соответствует магистральным сегментам НСА. Сегмент НСА2 описывает совокупность ветвей НСА более мелкого калибра – пререзистивы. Артерии НСА3-4 имеют резистивный характер.

На протяжении ВСА можно выделить следующие отделы:

1. *Экстракраниальный отдел ВСА* – от устья ВСА до входа в каро-

тидный канал пирамиды височной кости. Для этого сегмента ВСА наиболее характерно развитие стенозирующей патологии.

2. *Каменистый отдел ВСА* – располагается в пирамиде височной кости.
3. *Кавернозный отдел ВСА* – сегмент ВСА, проходящий через венозный синус мозга (кавернозный синус).

Описанные сегменты соответствуют ребру ВСА1 графа. Непосредственно после выхода из кавернозного синуса ВСА образует глазничную артерию (АО), широко анастомозирующую с концевыми ветвями НСА. В норме кровоток по АО направлен из мозга к тканям, однако, при развитии декомпенсации мозгового кровообращения, кровоток направлен из бассейна НСА внутрь мозга, осуществляя тем самым каротидно-офтальмический анастомоз.

4. *Супраклиноидный отдел ВСА*. От задней стенки супраклиноидного отдела отходит задняя соединительная артерия (ЗСА), играющая важную роль в замыкании артерий основания мозга и образовании Виллизиева круга. Этот сегмент соответствует ребру ВСА3 графа.
5. *Область бифуркации ВСА*. В этой области происходит деление ВСА на среднюю мозговую артерию (СМА) и переднюю мозговую артерию (ПМА). Этот сегмент соответствует ребру ВСА4 графа.
6. *Средняя мозговая артерия (СМА)*. На своем протяжении СМА делится на более мелкие ветви: М1, М2. Ребра М1 графа описывают соответствующие сегменты артерии, М2 – совокупность ветвей СМА более мелкого диаметра, включая корковую.
7. *Передняя мозговая артерия (ПМА)*. На своем протяжении ПМА делится на более мелкие ветви: А1, А2 и т.д. Обе ПМА между собой, как правило, соединяются в области А1-А2 передней соединительной артерией (ПСА) – формируя передние отделы Виллизиева круга. Принцип описания ветвей ПМА ребрами А1-2 аналогичен описанию СМА.

Вертебро-базиллярная система.

Позвоночные артерии отходят от ПКА и на своем протяжении лежат в костном канале поперечных отростков шейных позвонков, после чего входят в полость черепа. После входа в полость черепа позвоночные артерии сливаются, образуя основную артерию (ОА). В своем дистальном отделе основная артерия делится на задние мозговые артерии (ЗМА), образуя бифуркацию основной артерии. Номенклатура Р1, Р2 ветвей ЗМА аналогична номенклатуре СМА и ПМА. В дистальном отделе сегмента Р1 ЗМА отходит, как правило, задняя соединительная артерия (ЗСА), которая соединяет между собой вертебро-базиллярный и каротидный бассейны

(задние отделы Виллизиева круга). Вместе с ПСА и другими артериями основания ЗСА образуют большой артериальный круг мозга (Виллизиев круг – Willis, 1664).

Описанная конфигурация графа соответствует представлению о правильно сформированных церебральных сосудах. Но часто встречаются их аномалии. К ним относятся:

1. Аплазия – отсутствие артерии;
2. Гипоплазия – уменьшение диаметра артерии.

В зависимости от состояния артерий, Виллизиев круг может быть разобран по переднему (аплазия ПСА) или заднему отделам (аплазия ЗСА), что значительно влияет на характер коллатерального кровообращения.

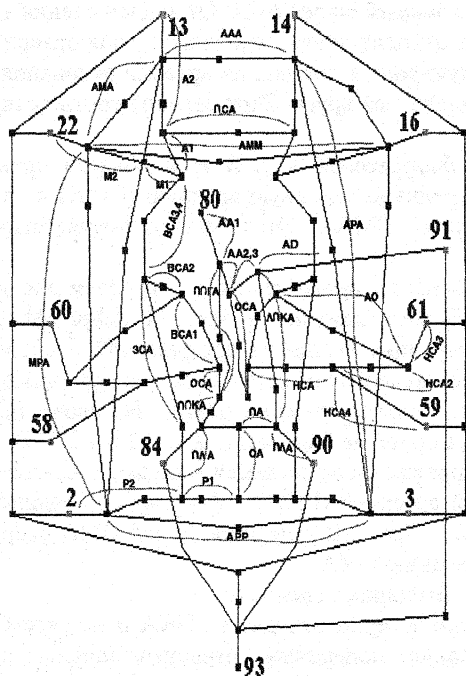


Рис.17

Система корковых анастомозов.

Для адекватного описания цереброваскулярной системы в норме, и особенно при патологии, необходимо учитывать основные пути коллате-

рального кровоснабжения. Помимо описанных ранее естественных коллатералей (ЗСА, ПСА, ГА) существенными путями коллатерального кровообращения являются корковые анастомозы между конечными ветвями передней, средней и задней мозговых артерий. В соответствии с данными Krauenbuhl, Yasargil (1965) выделяют анастомозы между корковыми ветвями:

1. Между ПМА и СМА – анастомоз описывается ребром АМА;
2. Между ПМА и ЗМА – анастомоз описывается ребром АРА;
3. Между СМА и ЗМА – анастомоз описывается ребром МРА;
4. Между ПМА слева и ПМА справа – анастомоз описывается ребром ААА;
5. Между СМА слева и СМА справа – анастомоз описывается ребром АММ;
6. Между ЗМА слева и ЗМА справа – анастомоз описывается ребром АРР.

Наличие или отсутствие этих анастомозов в значительной степени определяет возможности коллатерального кровообращения и компенсации цереброваскулярной недостаточности. Для качественной оценки характеристик корковых анастомозов в настоящее время используются ультразвуковые методы исследования мозгового кровотока (диагностические пробы). Резервы коллатерального кровообращения могут быть сохранными, истощенными, истерпанными.

Таблица параметров сосудов и начальных данных

В качестве первой задачи рассмотрим задачу воспроизведения с помощью численного решения уравнений гемодинамики «нормы», т.е. течения крови в правильно сформированной системе сосудов головного мозга при средне-нормальных параметрах сосудов и стационарном сердечном выбросе. Числовые значения сосудов, а также начальные распределения скоростей, потоков и давлений по сосудам, необходимые для проведения расчетов, представлены в [24]. Эти данные собраны из различных источников [5-8] и дополнены результатами клинических исследований.

2. Описание расчета вязкого стационарного течения в сосудах головного мозга в норме

Рассчитано «нормальное» течение при условии, что поток крови Q_A из сердца в систему является постоянным и равен $Q_A=100$ мл/с. На входе в предсердие задается постоянным давление $p_v = 0$ мм.рт.ст. Параметры сосудов соответствуют [24]. Расчет выполнен с помощью программного комплекса CVSS10.

Начальные данные задачи не являются, вообще говоря, решением уравнений гемодинамики на рассматриваемом графе. Поэтому на первом этапе расчета происходит интенсивная перестройка течения, которое постепенно выходит на стационарный режим. Выход на стационарное тече-

ние происходит за время, равное 5-6 периодам нормального сердечного цикла человека. При этом в аорте устанавливается постоянное давление 87 мл.рт.ст., которое равно среднему давлению в артерии при переменном режиме работы сердца.

На рис. 18 а,б,в представлены величины потоков стационарного течения (расчет 1), которое мы в дальнейшем будем считать "нормой", в различных частях артериальной части графа церебрального кровообращения.

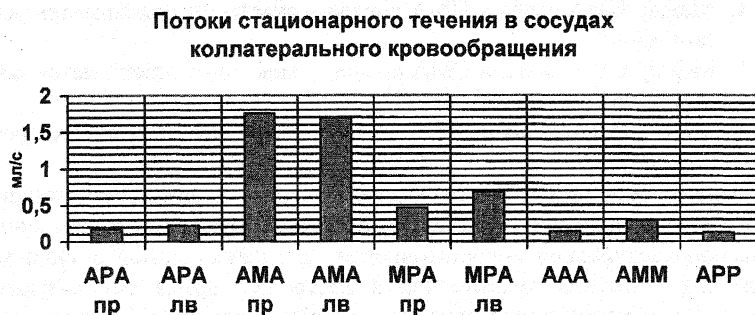


Рис. 18 а

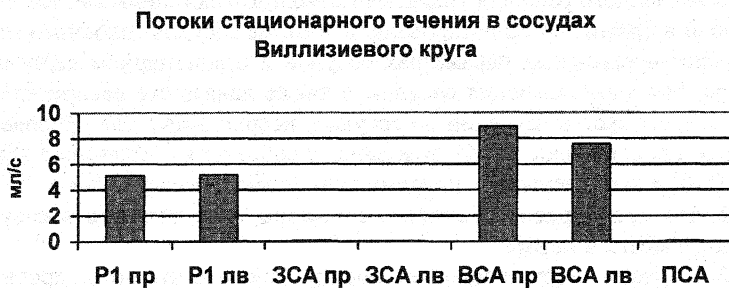


Рис.18 б

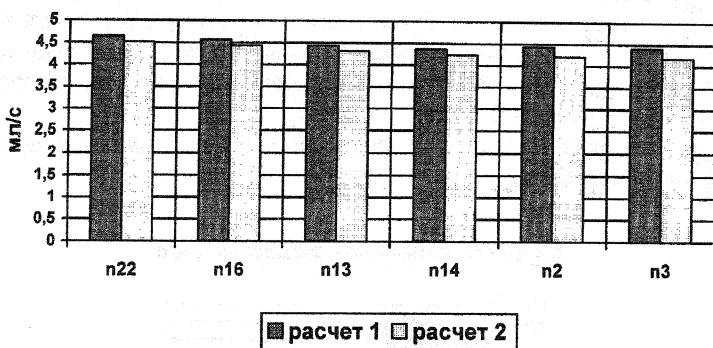


Рис.18 в

На рис.18в по оси ординат отложены номера вершин графа, соответствующих тканям мозга (рис. 17). Напомним, что вершины n22 и n16 соответствуют среднемозговым разделам (правому и левому), n13 и n14 – передним мозговым разделам (правому и левому), n2 и n3 – задним разделам мозга (правому и левому), n60, n61, n58, n59 – глазничному и лицевому кровоснабжению.

Граф мозговых сосудов в своей начальной части от аорты до ВСА и ПА является несимметричным, а далее и топология графа (рис.1), и параметры соответствующих сосудов полностью симметричны.

Как следует из приведенных на рис.18 данных, несмотря на несимметричность части графа, потоки в симметричных узлах графа практически одинаковы, что особенно хорошо заметно из рис.18в. Т.е. кровоснабжение тканей мозга осуществляется одинаково в правой и левой частях головного мозга. Кроме того видно, что и величина кровотока в разделах мозга практически одинакова.

3.Результаты численных расчетов течения в сосудах головного мозга при наличии стенозов.

Для качественной оценки возможностей и основных путей коллатерального кровоснабжения была проведена серия расчетов по моделированию изменения кровоснабжения тканей мозга при окклюзии различных участков магистральных артерий головы. Для описания топологии и свойств сосудистой системы головного мозга в качестве исходного был выбран граф, соответствующий замкнутому Виллизиеву кругу с гипоплазией передней и задних соединительных артерий и хорошо развитой сис-

темой корковых анастомозов. В качестве точки пережатия был выбран характерный участок ЛПКА артерии.

Результаты расчетов нормы (расчет1), и течения с пережатой ЛПКА (расчет 2) представленные на рис. 18в и 19. Анализ диаграммы 18в позволяет сделать ряд выводов. Прежде всего отметим, что система резервного коллатерального кровообращения обеспечивает достаточно хорошую компенсацию потоков крови через ткани мозга (рис.18в). В среднем дефицит потока находится в пределах 10%.

Особый интерес вызывают скорости линейного кровотока в позвоночных артериях, представленные на рис. 19:

Скорость линейного кровотока, см/с

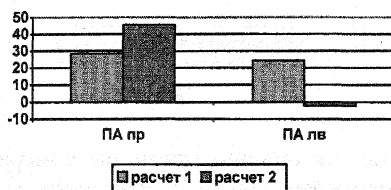


Рис.19

В расчете 2 наблюдается изменение направления потока по позвоночной артерии с обкрадыванием тканей, кровоснабжение которых осуществляется вертебро-базиллярным бассейном (п2,п3). Незначительное падение кровотока объясняется как коллатеральным кровообращением через корковые анастомозы (МРА), так и компенсацией за счет противоположной позвоночной артерии. Воспроизведенный в численном эксперименте эффект широко известен в неврологической практике и описан в литературе под названием позвоночно-подключичного обкрадывания или «steal» -синдрома.

4.Заключение

В данной части работы представлены результаты математического моделирования гидродинамики течения крови в сосудах головного мозга на базе пакета CVSS. Воспроизведен с помощью математической модели эффект позвоночно-подключичного обкрадывания, известный в литературе как «steal-синдром». Приведенные результаты являются отдельным примером из большой серии расчетов по моделированию кровоснабжению тканей при окклюзиях различных участков церебральной системы кровоснабжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guyton A.C., Coleman T.G. Circulation Research. 1969. V24, №1.
2. C.G.Caro, T.J.Pedley, R.C. Schroter, W.A.Seed. The mechanics of the circulation. Oxford, Oxford University Press, 1978.
3. Регирер С.А. Лекции по биологической механике. М., 1980.
4. Wilmer W.Nichols, Michael F.O'Rourke. Blood flow in arteries. London, Edward Arnold, 1990.
5. M.S.Laening, H.E.Pullen, E.R.Carson, L.Finkelshtein. Modelling a complex biological system:the human cardiovascular system - 1.Methodology and model description. Trans. Inst. M C, v.5, No 2, Apr-Jun 1993 , p.71-86.
6. В.А.Лищук. Математическая теория кровообращения. М.: Медицина, 1991.
7. Т.Педли. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1993.
8. Ю.В.Солодянникова "Элементы математического моделирования и идентификация кровообращения" Самара: Издательство "Самарский университет" 1994, 316стр.
9. Розанов В.В., Руденко О.В., Сысоев Н.Н. Нелинейные пульсовые волны в эластичных трубках с переменным сечением и изменяющимися упругими свойствами. Физическая гидродинамика Выпуск 9.Препринт физического факультета МГУ 1998г.. № 12/1998, 22 с.
- 10.K. Perktold, M. Resell and R.O. Peter, "Three-Dimensional Numerical Analysis of Pulsatile Flow and Wall Shear Stress in the Carotid Artery Bifurcation". J. Biomechanics, Vol. 24. No. 6, pp. 409-420 (1991).
- 11.Numerical simulation of the blood flow in the human cardiovascular system. Martin Zacek and Egon Krauset. J.Biomechanics, Vol.29, No.1, 1996.
- 12.Closed-loop circulation model based on the Frank mechanism. Joseph L. Palladino, Jan P. Mulier, Abraham Noordergraaf. Mathematics for industry, 1997
- 13.C.A. Taylor, I.J.R. Hughes and C.K. Zarins, "Finite Element Modeling of Blood Flow in Arteries", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 158. pp. 155-196 (1998).
- 14.А.С.Холодов Некоторые динамические модели внешнего дыхания и кровообращения с учетом их связности и переноса веществ. Сборник «Информатика и прогресс медицины» под ред. О.М.Белоцерковского, А.С.Холодова. М., Наука, 2001
- 15.М.В. Абакумов, К.В. Гаврилюк, Н.Б. Есикова, В.Б. Кошелев, А.В. Лукшин, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский. Математическая модель гемодинамики сердечно – сосудистой системы. Препринт ИПМ РАН, № 104, 1996г, 25 с.
- 16.М.В.Абакумов, К.В.Гаврилюк, Н.Б.Есикова, В.Б.Кошелев, А.В.Лукшин, С.И. Мухин, Н.В.Соснин, В.Ф.Тишкин, А.П.Фаворский. Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы.

- Дифференциальные уравнения, 1997, т.33, N 7, 892- 898.
17. М.В. Абакумов, И.В. Ашметков, Н.Б. Есикова, В.Б. Кошелев, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский, А.Б. Хруленко. Методика математического моделирование сердечно-сосудистой системы. Математическое моделирование, 2000, т.12 №2, с.106-117.
 18. А.Я. Буничева, В.А. Лукшин, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский. Численное исследование гемодинамики большого круга кровообращения. Препринт. М.: МАКС Пресс, 2001, 21с.
 19. И.В. Ашметков, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский, А. Б. Хруленко. Частные решения уравнений гемодинамики. М.: Диалог-МГУ, 1999, 43с.
 20. М.В. Абакумов, Н.Б. Есикова, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский. Разностная схема решения задач гемодинамики на графе. Препринт-М.: Диалог – МГУ, 1998, 17 с.
 21. С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский, А.Б. Хруленко. Линеинный анализ волн давления и скорости в системе эластичных сосудов. Препринт-М.: МАКС-Пресс, 2001, 37 с.
 22. Ашметков И.В., Мухин С.И., Соснин Н.В., Фаворский А.П., Хруленко А.Б. Анализ и сравнение некоторых аналитических и численных решений задач гемодинамики. Дифференц. уравнения. 2000, т.36, № 7.
 23. А.Я. Буничева, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский Осредненная нелинейная модель гемодинамики в одном сосуде. Препринт. – М.: Диалог-МГУ, 2000, 21с.
 24. В.А. Лукшин, С.И. Мухин, Т.В. Соколова, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский. Математическое моделирование гидродинамики церебрального кровообращения. Препринт. – М.: МАКС Пресс, 2001, 20 с.
 25. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. М.: Наука, 1996.
 26. Чиркин А.А., Окорочков А.Н., Гончарик И.И. *Диагностический справочник терапевта*. Минск: Беларусь, 1993г. С. 234.
 27. Арабидзе Г.Г., Бредикис Ю.И., Верещагин Н.В.: Под ред. Е.И. Чазова. *Болезни сердца и сосудов*. Т3. М.: Медицина, 1992. С. 328-336.
 28. R.S.Cotran, V.Kumar, T.Collins. *Robbins pathologic basis of disease*. 6th. ed. Saunders, 1999. P.515-520.
 29. Р.Шмидт, Г. Тевс. Физиология человека, т.2., М: Мир, 1996г, 313с.
 30. Ультразвуковая доплеровская диагностика сосудистых заболеваний под ред. Ю.М. Никитина, А.И. Труханова, М: Видар, 1998г.
 31. Лелюк В.Г., Лелюк С.Э. Ультразвуковая ангиология. М: Реальное Время, 1999.
 32. А.Вандер. Физиология почек. СПб. Питер, 2000, 256 с.
 33. А.Б. Кошелев, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский, А.Б. Хруленко. Математическое моделирование неспецифического аортоартериита. Препринт-М.: МАКС-Пресс, 2001, 53 с.

А. В. Тихонравов, М. К. Трубецков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ*

§ 1. Введение

Самокомпенсация ошибок в толщинах слоёв играет ключевую роль для успешного изготовления узкополосных интерференционных фильтров и, в частности, WDM-фильтров. Этот эффект достигается при оптическом мониторинге толщин слоёв на центральной длине волны фильтра с использованием метода поворотной точки [1-3]. Применение метода поворотной точки требует, чтобы оптические толщины слоёв WDM-фильтра были кратны четверти центральной длины волны фильтра. По этой причине проектирование WDM-фильтров является специфической задачей оптимизации, которая требует разработки и применения специальных методов вместо общих универсальных методов синтеза многослойных покрытий.

Для разработки WDM-фильтров особенно эффективными оказываются два основных классических подхода. Первый из них берёт начало в теории микроволновых фильтров [4] и делает возможным широко использовать важнейшие результаты теории чебышевских фильтров [5]. Второй подход был предложен А. Теленом [6] в 1966 году и основан на концепции эквивалентных слоёв. Он позволяет строить прототипы будущего фильтра, которые затем могут модифицироваться для того, чтобы спектральные характеристики фильтра соответствовали сформулированным требованиям [7].

Весьма часто для достижения требуемых характеристик фильтра, например, для минимизации осцилляций коэффициента пропускания в рабочей зоне фильтра, от разработчика требуется глубокое теоретическое понимание классических подходов к проектированию фильтров и значительная по объёму ручная работа с использованием метода проб и ошибок. Основной целью настоящей работы является разработка автоматизированного подхода к проектированию фильтров, сочетающего основные классические идеи со специальным методом целочисленной оптимизации. Классические подходы к проектированию фильтров позволяют разработчику интерактивно задавать прототипы фильтра, выступающие в качестве

*Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы «Университеты России», код 015.03.02.001.

начальных приближений для последующей оптимизации. Основы этого нового подхода к проектированию фильтров описаны в §§ 2 и 3.

Автоматизированный подход к проектированию фильтров оказывается исключительно эффективным с вычислительной точки зрения. Он позволяет быстро конструировать ряд существенно различающихся конструкций фильтров с практически эквивалентными спектральными свойствами. Вполне возможно, что некоторые из конструкций окажутся менее чувствительными по отношению к ошибкам изготовления, чем другие. По этой причине желательно осуществить предпроизводственный анализ чувствительности различных конструкций фильтров с близкими спектральными свойствами. Такой анализ направлен на отбор конструкции с наилучшей вероятностью успешного изготовления. Параграфы 4 и 5 посвящены этой проблеме.

§ 2. Общая схема и основные параметры WDM-фильтра

Любой WDM-фильтр является комбинацией многослойных зеркал и резонаторных слоёв. Это иллюстрируется рисунком 1, на котором представлена общая структура WDM-фильтра.

Число слоёв в современных WDM-фильтрах зачастую превышает сотню. Однако это не означает, что число оптимизируемых параметров столь же велико. В действительности количество существенных парамет-

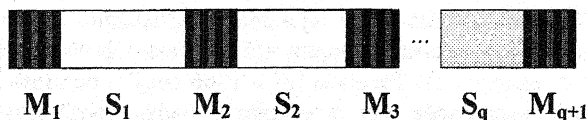


Рис.1. Общая структура WDM-фильтра.

ров намного меньше, чем общее число слоёв фильтра. Данный факт становится очевидным, если вспомнить, что любой WDM-фильтр является типичной резонансной структурой, состоящей из многослойных зеркал и резонаторных полостей (последние соответствуют резонаторным слоям). По этой причине спектральный коэффициент пропускания WDM-фильтра зависит:

- от числа резонаторных полостей,
- от коэффициентов отражения зеркал фильтра,
- от фазовых свойств резонаторных слоёв фильтра.

При разработке WDM-фильтров в действительности варьируются именно эти параметры.

Коэффициент отражения четвертьволнового зеркала фильтра зависит от числа слоёв этого зеркала. Это означает, что упомянутая характе-

ристика не может варьироваться непрерывно, она принимает только набор значений, определяемый целочисленным параметром – числом слоёв зеркала m .

Фазовые свойства резонаторной полости определяются оптической толщиной соответствующего резонаторного слоя и фазовыми сдвигами при отражении от зеркал, окружающих этот слой. Пусть s – порядок резонаторного слоя, что означает, что оптическая толщина этого слоя равна $s\lambda_0/2$, где λ_0 – центральная длина волны фильтра. Обозначим фазовый сдвиг при отражении от левого и правого зеркал, как φ_l и φ_r , соответственно. Заметим, что φ_l и φ_r зависят от длины волны падающего света λ . Рассмотрим фазовую функцию:

$$\varphi(\lambda) = \varphi_l(\lambda) + \varphi_r(\lambda) - 2\pi s\lambda_0/\lambda \quad (1)$$

Форма спектральной зависимости коэффициента пропускания в окрестности центральной длины волны λ_0 определяется фазовой функцией $\varphi(\lambda)$. Из (1) видно, что эта функция также не может принимать произвольные значения, но определяется целым параметром s .

Пусть общее число полостей фильтра равно q (это означает, что число зеркал фильтра составляет $q+1$). Обозначим через $m_1, \dots, m_{q+1}$ количество слоёв в зеркалах фильтра, а через $s_1, \dots, s_q$ – порядки резонаторных слоёв. Из вышесказанного очевидно, что q , $m_1, \dots, m_{q+1}$, $s_1, \dots, s_q$ являются основными конструктивными параметрами WDM-фильтра. Таким образом, проектирование WDM-фильтров можно свести к специальной задаче целочисленной оптимизации. В принципе, можно попытаться производить разработку WDM-фильтров путём прямого вычисления спектрального коэффициента пропускания для различных комбинаций целочисленных параметров q , m_j , s_j (метод проб и ошибок). Количество возможных комбинаций является, однако, настолько большим, что надёжный синтез с использованием такого подхода невозможен даже с использованием современных суперкомпьютеров. Ключевым для разработки исключительно эффективного автоматизированного подхода является сочетание классических методов проектирования с современной техникой целочисленной оптимизации.

§ 3. Основы автоматизированного метода проектирования фильтров

Проектирование WDM-фильтра начинается с задания основных входных параметров, таких, как центральная длина волны, спектральная ширина зоны высокого пропускания, крутизна наклона спектральной кривой коэффициента пропускания в переходной зоне между областями с

высоким и низким пропусканием. Классические методы проектирования фильтров позволяют на основе данных входных параметров спроектировать прототип фильтра.

Прежде всего, на основе результатов теории чебышевских фильтров оказывается возможным определить число резонаторных полостей в прототипе фильтра. Хорошо известно, что чебышевские фильтры обеспечивают максимальную крутизну наклона коэффициента пропускания в зоне перехода между областями с высоким и низким пропусканием [8]. Благодаря этому можно определить минимальное число резонаторных полостей, необходимое для достижения заданной крутизны переходной зоны. Рассмотрим формулу для коэффициента пропускания чебышевского фильтра [9]:

$$T(\lambda) = \left\{ 1 + \rho T_q^2 \left[\eta \cos \left(\frac{\pi \lambda_0}{2 \lambda} \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (2)$$

Здесь T_q – полиномы Чебышева порядка q (порядок полиномов совпадает с числом резонаторных полостей фильтра), ρ и η – параметры, определяемые с использованием спецификаций фильтра (см. ниже), и λ_0 – центральная длина волны области высокого пропускания фильтра.

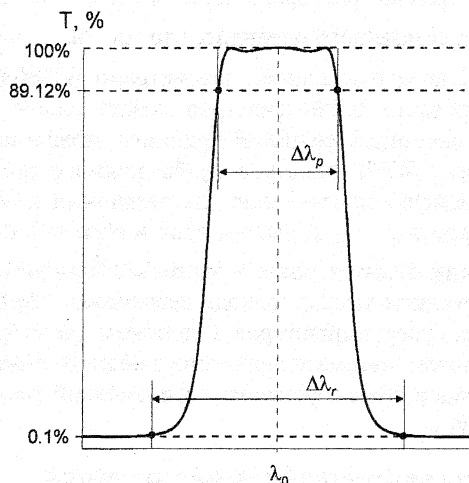


Рис. 2. Типичные спецификации WDM-фильтра:
 λ_0 – центральная длина волны фильтра, $\Delta\lambda_p$ – ширина зоны по уровню пропускания 89.13% (-0.5дБ), $\Delta\lambda_r$ – ширина зоны по уровню пропускания 0.1% (-30 дБ).

Предположим, что спецификации фильтра включают требования на ширину зоны пропускания по уровню -0.5 дБ (фактически, это требование на ширину области высокого пропускания) и на ширину зоны пропускания по уровню -30 дБ (уровень отсечки сигнала). Обозначим первую величину как $\Delta\lambda_p$ и вторую величину как $\Delta\lambda_r$ (Рис. 2). В соответствии с основными свойствами чебышевских фильтров аргумент полиномов Чебышева на границах зоны пропускания фильтра равен ± 1 :

$$\eta \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda_0 \pm \Delta\lambda_p/2}\right) = \pm 1. \quad (3)$$

Так как $\Delta\lambda_p \ll \lambda_0$, уравнение (3) можно приближенно записать в виде:

$$\frac{\pi\eta\Delta\lambda_p}{4\lambda_0} = 1. \quad (4)$$

Абсолютная величина значений полиномов Чебышева на границах диапазона пропускания равна 1. В соответствии с (2) мы получаем

$$(1 + \rho)^{-1} = 0.8913 \quad (5)$$

(величина в правой части уравнения (5) является абсолютной величиной коэффициента пропускания, соответствующего уровню -0.5 дБ).

На границах области низкого пропускания $T(\lambda_0 \pm \Delta\lambda_r/2) = 0.001$ и из уравнения (2) следует, что

$$\rho T_q^2 \left[\eta \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda_0 \pm \Delta\lambda_r/2}\right) \right] \approx 10^3. \quad (6)$$

Рассмотрим это уравнение только на правой границе диапазона низкого пропускания. Так как $\Delta\lambda_r \ll \lambda_0$, аргумент полиномов Чебышева можно записать в виде

$$\eta \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \Delta\lambda_r/2}\right) \approx \frac{\pi\eta\Delta\lambda_r}{4\lambda_0}. \quad (7)$$

Используя уравнения (4) и (7), аргумент полиномов Чебышева можно преобразовать к виду $\Delta\lambda_r/\Delta\lambda_p$. Это отношение обычно называется фактором формы фильтра S :

$$S = \Delta\lambda_r/\Delta\lambda_p \quad (8)$$

В соответствии с (5) параметр ρ примерно равен 0.1 и из уравнения (6) окончательно следует, что

$$T_q(S) \cong 100. \quad (9)$$

Используя рекуррентные формулы для полиномов Чебышева [10] и уравнение (9) можно оценить минимальное число резонаторных полостей фильтра, требующееся для достижения заданной крутизны переходной зоны между областями с высоким и низким пропусканием. Например, при $\Delta\lambda_p = 0.35$ нм, $\Delta\lambda_r = 0.6$ нм фактор формы S равен 1.714286 и из уравнения (9) следует, что число резонаторных полостей фильтра q должно быть не менее 5.

Имея оценку для числа резонаторных полостей можно построить начальный прототип фильтра на основе подхода А.Телена [6]. Удобно производить проектирование как прототипа, так и самого фильтра в случае, когда внешняя среда имеет такой же показатель преломления, как и подложка. В дальнейшем можно произвести согласование полученного фильтра с другой внешней средой путём добавления сверху стандартного просветляющего покрытия. В случае, когда показатели преломления подложки и внешней среды совпадают и равны n_s , общая структура прототипа фильтра, в соответствии с подходом А. Телена, имеет вид:

$$n_s | \text{Экв.слой 1} | \text{Экв.слой 2} | \dots | \text{Экв.слой 2} | \text{Экв.слой 1} | n_s$$

Эквивалентные слои 1 и 2 являются последовательностями чередующихся четвертьволновых слоёв с высокими и низкими показателями преломления. Число слоёв в этих последовательностях выбирается так, чтобы их эквивалентные показатели преломления N_1 и N_2 обеспечивали наиболее хорошее приближение условия [7]:

$$N_1^2 = n_s N_2 \quad (10)$$

Резонаторные слои располагаются на границах между двумя соседними эквивалентными слоями [7]. Для получения нужного количества резонаторных полостей фильтра эквивалентный слой 2 повторяется $q-1$ раз, где q – оценка числа резонаторных полостей.

Для любого набора входных параметров оказывается возможным построить множество практически эквивалентных прототипов фильтра. Это связано с тем фактом, что имеются два способа управления шириной зоны высокого пропускания фильтра. Первый основывается на изменении числа слоёв в зеркалах фильтра, а второй – на изменении порядков резонаторных слоёв. Увеличение числа слоёв в зеркалах или порядка резонаторных слоёв сужает область высокого пропускания, в то время, как уменьшение этих параметров приводит к её расширению. Благодаря этому можно, используя один из прототипов фильтра, найти несколько почти эквивалентных прототипов с меньшим числом слоёв в зеркалах, но с более высокими порядками резонаторных слоёв.

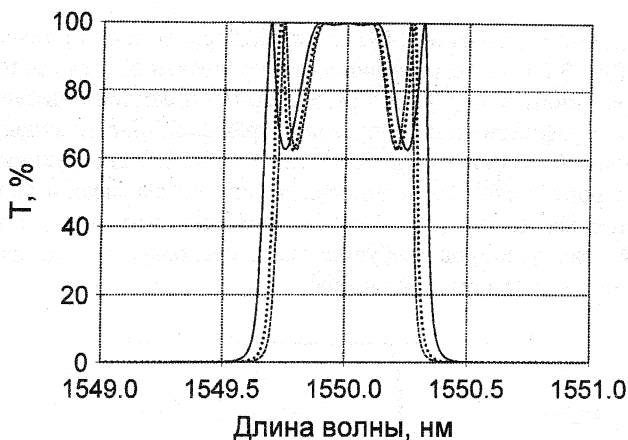


Рис.3. Коэффициенты пропускания трёх прототипов фильтра с различными порядками резонаторных слоёв и различным числом слоёв в зеркалах.

Как только выбран один из прототипов фильтра, можно начать процедуру целочисленной оптимизации, используя этот прототип в качестве начального приближения. Процедура целочисленной оптимизации является полуэвристической и основана на минимизации целевой функции, которая характеризует близость спектрального коэффициента пропускания текущего фильтра заданным требованиям. При минимизации целевой функции производится направленный перебор целочисленных параметров в области, близкой к текущему набору параметров. При получении фильтра, лучшего по величине целевой функции, текущий набор параметров заменяется новым набором, и процедура перебора повторяется. В определённом смысле использованный алгоритм является дискретным аналогом метода наискорейшего спуска. Благодаря быстрой сходимости данного метода можно легко получить набор различных решений задачи синтеза WDM-фильтра.

Следующий пример демонстрирует применение автоматизированной процедуры проектирования WDM-фильтров. Пусть $\lambda_0 = 1550 \text{ нм}$, $\Delta\lambda_p = 0.6 \text{ нм}$ (ширина области высокого пропускания по уровню -0.5 дБ), $\Delta\lambda_r = 1.2 \text{ нм}$ (ширина области низкого пропускания по уровню -30 дБ). Показатели преломления материалов слоёв равны 2.1 и 1.45, показатель преломления подложки равен 1.52, внешняя среда имеет показатель преломления 1.0.

Используя эти входные параметры, можно оценить минимальное

число резонаторных полостей в будущем фильтре. В данном случае оно равно 5. На Рис. 3 показаны коэффициенты пропускания трёх прототипов фильтров с различными порядками резонаторных полостей и числом слоёв в зеркалах. Коэффициенты пропускания трёх фильтров, полученных с использованием этих прототипов, показаны на Рис.4. Конструкции полученных фильтров отличаются по количеству слоёв в зеркалах и по порядкам резонаторных слоёв (см. Табл.1). Заметим, что для получения конструкций этих фильтров требуется всего несколько секунд счёта на современном персональном компьютере.

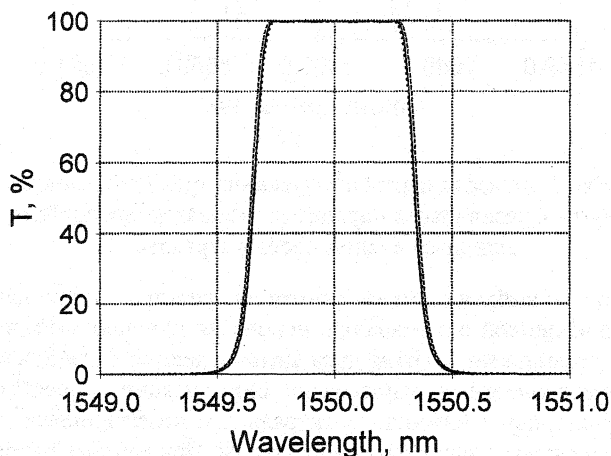


Рис.4. Коэффициенты пропускания трех фильтров, полученных с использованием прототипов, показанных на Рис.3.

Фильтр	m_1	s_1	m_2	s_2	m_3	s_3	m_4	s_4	m_5	s_5	m_6
1	14	3	31	2	32	6	32	2	32	2	16
2	13	6	29	4	32	3	32	4	29	5	15
3	13	5	28	7	29	9	29	7	28	5	14

Табл. 1. Конструкционные параметры трёх WDM-фильтров с коэффициентами пропускания, показанными на Рис.4

Получение набора конструкций фильтра с практически эквивалентными спектральными свойствами даёт разработчику возможность дополнительного отбора такой конструкции, которая обладает наилучшими

свойствами с точки зрения изготовления. Для такого отбора полезен предпроизводственный анализ чувствительности фильтра. Следующие два параграфа посвящены этой проблеме.

§ 4. Основные причины деградации свойств фильтра и эффект самокомпенсации ошибок

Перед рассмотрением вопросов предпроизводственного анализа чувствительности следует обсудить основные причины, вызывающие деградацию свойств фильтра и суть эффекта самокомпенсации ошибок.

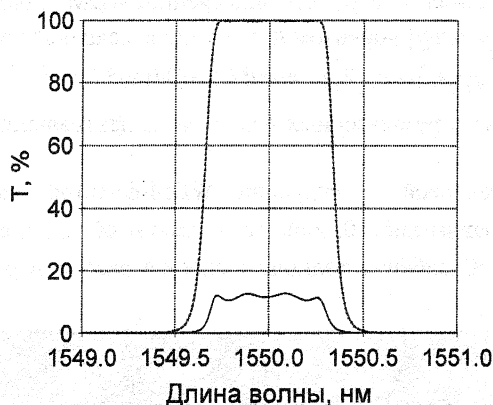


Рис.5. Коэффициент пропускания фильтра 1 (Табл.1) (пунктир), коэффициент пропускания этого же фильтра, в котором слой № 13 имеет ошибку толщины, равную +3% (сплошная линия), и коэффициент пропускания этого же фильтра, в котором ошибка +3% толщины слоя № 13 скомпенсирована изменением толщины слоя № 16 на -1% и слоя № 17 на -1.55% (штриховая линия).

Уже отмечалось, что любой WDM-фильтр является типичной многорезонаторной структурой (см. Рис. 1), спектральный коэффициент пропускания которой определяется коэффициентами отражения от зеркал фильтра и фазовыми свойствами резонаторных полостей фильтра. Ошибки в толщинах слоёв фильтра влияют на коэффициенты отражения зеркал и на фазовые свойства резонаторных полостей совершенно по-разному. Хорошо известно, что ошибки толщин слоёв слабо влияют на энергетический коэффициент отражения четвертьволнового зеркала в окрестности центральной длины волны зеркала (см. [11]). В то же время ошибки в толщинах крайних слоёв зеркал и ошибки в толщинах резонаторных сло-

ёв оказывают существенное влияние на фазовые свойства резонаторных полостей. Таким образом, понятно, что основной причиной, приводящей к деградации свойств WDM-фильтра, является нарушение фазовых соотношений в резонаторных полостях.

Рассмотрим один из резонаторных слоёв и предположим, что его физическая толщина равна d и его показатель преломления равен n . В идеальном случае, оптическая толщина этого слоя nd должна равняться $s\lambda_0/2$, где λ_0 – центральная длина волны фильтра и s – порядок резонаторного слоя. Как и ранее, обозначим фазовые сдвиги при отражении от левого и правого зеркал φ_l и φ_r , соответственно. WDM-фильтр будет обладать требуемыми коэффициентом пропускания, если соотношение

$$\varphi_l(\lambda_0) + \varphi_r(\lambda_0) - 4\pi nd / \lambda_0 = 0 \pmod{2\pi} \quad (11)$$

выполняется для всех резонаторных полостей на центральной длине волны фильтра λ_0 .

Для теоретической конструкции WDM-фильтра $nd = s\lambda_0/2$, а $\varphi_l(\lambda_0)$ и $\varphi_r(\lambda_0)$ равны либо 0, либо π , и, таким образом, соотношение (11) выполняется. Ошибки в толщинах слоёв зеркал и в резонаторных

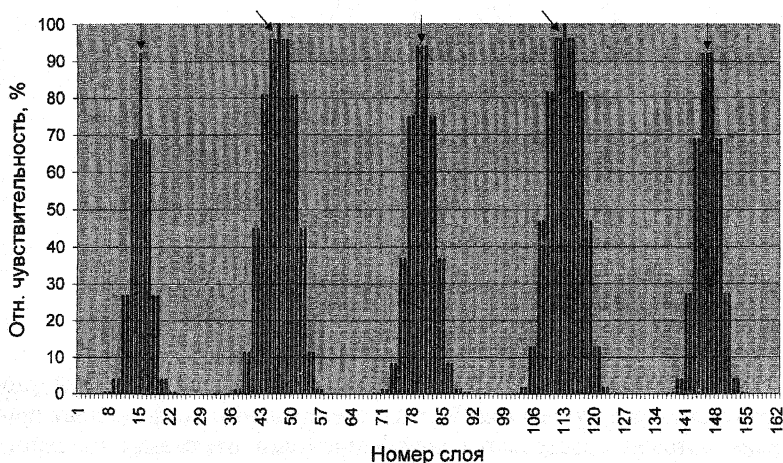


Рис.6. Относительные чувствительности спектральных свойств фильтра 1 (Табл.1) к ошибкам в толщинах отдельных слоёв. Стрелками отмечено положение резонаторных слоёв.

слоях приводят к вариациям слагаемых в (11) и, следовательно, к деградации спектральных свойств фильтра. Заметим, что деградация характеристик фильтра вызывается комбинированным воздействием ошибок в нескольких слоях фильтра. Однако, если при наличии ошибок в толщинах

слоёв соотношение (11) всё же выполняется, то свойства фильтра сохраняются, т.е. место эффект самокомпенсации. Это иллюстрирует Рис.5, на котором пунктиром показан коэффициент пропускания исходного фильтра № 1 (Табл.1) и коэффициенты пропускания этого же фильтра с некомпенсированной и скомпенсированной ошибкой толщины слоя № 13. Введённая ошибка +3% толщины слоя № 13, близко расположенного к резонаторному слою (слой № 15), ведёт к почти полной деградации характеристик фильтра (сплошная линия). Однако эта ошибка может быть полностью скомпенсирована за счет вариаций толщин двух слоёв, следующих непосредственно за резонаторным слоем (слои № 16 и № 17).

Вариации толщин крайних слоёв зеркал имеют намного более сильное влияние на фазовый сдвиг при отражении, чем вариации толщин слоёв, находящихся в глубине зеркал. Отсюда ясно, что ошибки толщин во внутренних слоях зеркал не так опасны для характеристик фильтра, как ошибки в резонаторных слоях и ближайших к ним слоях зеркал. Этот вывод полностью подтверждается при прямой оценке чувствительности WDM-фильтра к ошибкам в толщинах отдельных слоёв (Рис.6). Оценка чувствительности основана на вычислении среднеквадратичного отклонения от теоретической кривой коэффициента пропускания фильтра, в котором все слои один за другим подвергаются воздействию одной и той же по величине ошибки. Полученные величины нормируются, 100% уровень соответствует слою, ошибка в котором оказывает максимальное воздействие на коэффициент пропускания фильтра.

Нетрудно показать, что эффект самокомпенсации с физической точки зрения есть ни что иное, как механизм сохранения фазовых соотношений вида (11) для каждой из резонаторных полостей. Понятно, что наиболее важную роль играет эффект самокомпенсации в первом слое зеркала, наносимом непосредственно после резонаторного слоя. В самом деле, нанесение данных слоёв начинается завершающую стадию формирования очередной резонаторной полости. Вариации толщин первых слоёв правого зеркала способны скомпенсировать ошибки в толщинах левого зеркала и резонаторного слоя (см. предыдущий пример и Рис.5). С ростом числа уже нанесённых слоёв правого зеркала такая компенсация становится всё более трудной, поскольку соответствующие вариации толщин слоёв оказывают все меньшее влияние на результирующую спектральную характеристику (см. Рис.6).

Также понятно, что эффект самокомпенсации имеет локальный характер, т.е. он работает независимо для каждой из резонаторных полостей. Если фазовые свойства были нарушены хотя бы для одной из резонаторных полостей, то соответствующие ошибки уже невозможно скомпенсировать при нанесении слоёв, соответствующих следующим резонаторным полостям.

§ 5. Анализ чувствительности, основанный на моделировании процесса нанесения слоёв

Оптический контроль толщин слоёв с использованием метода поворотных точек позволяет использовать эффект самокомпенсации ошибок, но в то же время служит источником дополнительных ошибок. Наиболее критическим элементом метода поворотных точек является надёжное определение экстремумов коэффициента пропускания (или отражения). Ошибки в определении этих экстремумов неизбежны. Они связаны с множеством факторов, среди которых наиболее важную роль играют шумы в измеряемом коэффициенте пропускания (отражения).

Анализ чувствительности WDM-фильтров основан на моделировании процесса напыления с использованием оптического контроля толщин методом поворотной точки. Как и в реальном процессе напыления, ошибки в толщинах слоёв не вводятся непосредственно, а являются результатом неточностей в определении поворотных точек. Эти неточности связаны со случайным шумом, который вводится в моделируемые данные оптического контроля. Далее предположим, что данными оптического контроля являются значения коэффициента пропускания T_j , измеряемые на центральной длине волны фильтра в моменты времени t_j с интервалом $\delta t: \delta t = t_{j+1} - t_j$. Случайный шум ΔT_j добавляется к значениям T_j , при этом ΔT_j – равномерно распределённая на интервале $(-\Delta T, +\Delta T)$ случайная величина, ΔT задаёт уровень шума.

Рассмотрим алгоритм определения поворотных точек. Он основан на идеях теории некорректных задач [12] и по сути является специализированным регуляризирующим алгоритмом. Суть алгоритма состоит в следующем. Вместо отслеживания экстремумов коэффициента пропускания можно следить за моментом, когда производная коэффициента пропускания меняет знак. Хорошо известно, что задача численного дифференцирования является некорректно поставленной [11], её решение требует построения регуляризирующих алгоритмов. Для сглаживания входных данных и для использования априорной информации рассмотрим следующий функционал:

$$F_j = \sum_{i=j-k}^j (T'_i - a \cdot t_i - b)^2 \quad (12)$$

где T'_j – оценки производных коэффициента пропускания в моменты времени t_j , a – оценка второй производной коэффициента пропускания в ожидаемой поворотной точке, целая величина k определяет ширину временного интервала, для которого оценки производной коэффициента про-

пускания включаются в функционал F_j . Суммирование по временному интервалу в (12) сглаживает флуктуации производной коэффициента пропускания, вызванные шумом во входных данных. Величина a в (12) задаёт наклон зависимости производной коэффициента пропускания от времени в поворотной точке. Используя теоретическую конструкцию фильтра, можно найти вторую производную T по толщине напыляемого слоя d для всех поворотных точек. Используя эту априорную информацию, можно найти a из соотношения:

$$a = \partial^2 T / \partial d^2 \cdot \langle r \rangle^2, \quad (13)$$

где $\langle r \rangle$ – средняя скорость напыления материала, соответствующего текущему слою.

В (12) остаётся только одна неизвестная, а именно b . Для каждого нового момента времени t_j она определяется как величина, обеспечивающая минимум F_j . Обозначим это значение b_j , тогда уравнение

$$at + b_j = 0 \quad (14)$$

позволяет предсказать момент времени $t = -b_j/a$, когда производная коэффициента пропускания изменит свой знак. Процедура автоматизированного контроля толщины слоёв генерирует сигнал для прерывания процесса напыления очередного слоя, как только это значение станет меньше значения следующего момента измерения $t_{j+1} = t_j + \delta t$.

Разработанная процедура моделирования процесса напыления с новым алгоритмом определения поворотных точек была применена для трёх WDM-фильтров, полученных в § 3. Скорости напыления материалов с низкими и высокими показателями преломления были выбраны равными 5 Å/сек и 2 Å/сек, соответственно. Модельные значения коэффициента пропускания вычислялись с временным интервалом $\delta t = 0.1$ сек, целое k , характеризующее ширину временного интервала сглаживания было равно 35.

Моделирование процесса напыления было проведено 100 раз для каждого из фильтров § 3 для четырёх различных уровней шума $\Delta T = 0.05\%, 0.075\%, 0.1\%, 0.15\%$. На основе полученных результатов был вычислен процент выхода годных фильтров, т.е. таких фильтров, для которых флуктуации основных спектральных параметров от заданных не превышают 10%. Результаты такого моделирования сведены в Табл.2, из которой видно, что полученные конструкции фильтров заметно различаются с точки зрения числа годных фильтров. Фильтр № 3 заметно лучше фильтров № 1 и № 2.

Уровень шума ΔT , %	Фильтр № 1	Фильтр № 2	Фильтр № 3
0.05	97%	97%	99%
0.075	92%	97%	96%
0.10	55%	64%	76%
0.15	2%	6%	21%

Табл. 2. Проценты выхода годных фильтров для конструкций фильтров, полученных в § 3.

Заключение

Представлен новый автоматизированный подход к проектированию WDM-фильтров. Он сочетает классические методы проектирования многорезонаторных систем с процедурой целочисленной оптимизации и оказывается исключительно эффективным с вычислительной точки зрения. Благодаря этому разработчик имеет возможность легко получить набор фильтров, заметно различающихся по конструкции, но практически эквивалентных с точки зрения спектральных характеристик.

Возможность быстрого проектирования набора различных конструкций фильтров обеспечивает дополнительную гибкость в выборе конструкции, лучшей с точки зрения производства. Анализ чувствительности, основанный на компьютерном моделировании процесса напыления, обеспечивает возможность такого отбора. Предложен новый регуляризующий алгоритм для определения поворотных точек при оптическом контроле. Этот алгоритм использован, как составная часть, при анализе чувствительности WDM-фильтров.

Литература

1. H. A. Macleod, Turning value monitoring of narrow-band all-dielectric thin film optical filters, - *Optica Acta*, 1972, **19**, 1.
2. P. Bousquet et al., Optical filters: monitoring process allowing the auto-correction of thickness errors, - *Thin Solid Films*, 1972, **13**, 285.
3. Ш. А. Фурман, Тонкоплёночные покрытия, Ленинград, Машиностроение, 1977.
4. G. Mathaei, L. Young, and E. M. T. Jones, Microwave filters, impedance matching networks, and coupling structures, McGraw-Hill, New York, 1964.
5. P. Baumeister, Design of a WDM bandpass with quasi-Chebyshev spectral shape, - *Appl. Opt*, 2001, **40**, 1132-1137.
6. A. Thelen, Equivalent layers in multilayer filters, *J. Opt. Soc. Am*, 1966, **56**, 1533-1538.
7. A. Thelen, Design of optical interference coatings, McGraw-Hill, New York, 1988.
8. Херперо Д., Уиллонер Г., Синтез фильтров. М.: Советское радио, 1971.
9. P. Baumeister, Optical Coating Technology, 1998, a book used at a five day short course Engineering 823.17, University of California at Los Angeles, Department of Engineering, Information Systems and Technical Management, January 12, 1998 to January 16, 1998.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Ред. М. Абрамовиц и И. Стиган, М.: Наука, 1979.
11. S. A. Furman, A. V. Tikhonravov. Basics of optics of multiplayer systems, Gif-sur-Yvette, Edition Frontieres, 1992.
12. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ МОДЕЛИ СОРБЦИОННОЙ СИСТЕМЫ¹

В настоящее время актуально изучение математических моделей сорбционных систем, состоящих из одного или нескольких взаимосвязанных резервуаров, через которые осуществляется течение раствора жидкости, сопровождающееся процессом массообмена (сорбции). Моделирование таких систем приводит, как правило, к необходимости рассмотрения нестационарных краевых условий. Такие краевые условия отражают более общие закономерности течения процессов и значительно отличаются от классических. Постановки начально-краевых задач с нестационарными краевыми условиями для уравнения теплопроводности рассматривались и ранее (например, [1], гл. 3, § 1, п. 4).

В данной работе изучается математическая модель сорбционной системы, состоящей из области сорбции и подключенных к ней на входе и на выходе резервуаров большой емкости. Область сорбции заполнена сорбентом. На выходе из сорбционной области находится тонкий задерживающий слой, называемый *зоной смеси* или *диффузионным барьером*, в котором также происходит сорбционный процесс.

Внутри диффузионного барьера формулируется нестационарное краевое условие, являющееся уравнением баланса поглощаемой примеси вблизи выходной границы сорбционной области. Подробнее эта модель рассмотрена в работе [2].

Процесс, происходящий внутри сорбционной области, может быть описан двумя функциями - усредненными по сечению сорбционной области концентрациями поглощаемой примеси: $u(x, t)$ - в потоке вещества, $a(x, t)$ - поглощенной частицами сорбента.

Свойства решения прямой задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу для модели процесса неравновесной динамики сорбции с внутридиффузионной кинетикой с учетом конвекции и продольной диффузии и с краевым условием первого рода и нестационарным

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00837)

краевым условием:

$$\begin{cases} \nu u_x + u_t + a_t = Du_{xx}, & (x, t) \in Q_T; \\ a_t = \beta[\varphi(u) - a], & (x, t) \in Q_T^0; \\ a(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l; \\ u(x, 0) = \mu_0(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u(0, t) = f_0(t), & 0 \leq t \leq T; \\ -u_t(l, t) = ku_x(l, t) + h[u(l, t) - f_l(t)], & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Здесь ν - скорость движения жидкости через сорбционную систему, D - эффективный коэффициент продольной диффузии внутри сорбционной области, β - кинетический коэффициент, $\varphi(u)$ - изотерма сорбции, $\mu_0(x)$ - начальная концентрация примеси внутри сорбционной области, $f_0(t)$, $f_l(t)$ - концентрации примеси соответственно во входном и выходном резервуарах, l - длина сорбционной области, h - коэффициент массообмена. Все постоянные в модели считаются положительными.

Используются также следующие обозначения для областей, в которых изучается сорбционный процесс:

$$\begin{aligned} Q_T &= \{(x, t) : x \in (0, l), t \in (0, T)\}; \quad Q_{lT} = \{(x, t) : x \in (0, l], t \in (0, T)\}; \\ Q_T^0 &= \{(x, t) : x \in [0, l], t \in (0, T)\}; \quad \overline{Q_T} = \{(x, t) : x \in [0, l], t \in [0, T]\}. \end{aligned}$$

Задача рассматривается в классе возрастающих изотерм $\varphi(\xi)$, то есть предполагается следующее:

$$\varphi(\xi) \in C^1(-\infty, \infty), \varphi(0) = 0, 0 < \varphi'(\xi) < \varphi_0, \xi \in (-\infty, \infty); \quad (7)$$

Пусть также выполнены условия согласования: $f_0(0) = \mu_0(0)$.

Определение 1 Пара функций $\{u(x, t), a(x, t)\}$ - решение прямой задачи (1)-(6), если:

$$u, u_t, a, a_t \in C^0[\overline{Q_T}], u_x \in C^0[Q_{lT}], u_{xx} \in C^0[Q_T], \quad (8)$$

$u(x, t)$, $a(x, t)$ удовлетворяют уравнению (1) в Q_T , уравнению (2) в Q_T^0 и условиям (3)-(6).

В дальнейшем будет использоваться следующее интегральное представление функции $a(x, t)$, получающееся интегрированием уравнение (2) с начальным условием (3):

$$a(x, t) = \beta \int_0^t \varphi(u(x, \tau)) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau. \quad (9)$$

Утверждение 1 Пусть выполнены условия (7). Тогда функция $u(x, t)$ решения прямой задачи (1)-(6) может достигать своего отрицательного минимума и положительного максимума только в точках границы области $\overline{Q_T}$: $x = 0$ или $x = l$ или $t = 0$.

Доказательство. Будем рассматривать вспомогательную функцию: $v(x, t) = u(x, t)e^{-\omega t}$, где $\omega = \text{const} > 0$ - произвольно. Эта функция удовлетворяет в Q_T уравнению:

$$\nu v_x + \omega v + v_t + a_t e^{-\omega t} = D v_{xx}. \quad (10)$$

Рассмотрим произвольную точку $t_1 \in (0, T]$.

1) Пусть в точке $(x_0, t_0) \in Q_{t_1}$ достигается отрицательный минимум функции $v(x, t)$ в области Q_{t_1} . Тогда в точке (x_0, t_0) имеем: $v_x = 0, v_t \leq 0, v < 0, v_{xx} \geq 0$.

Рассмотрев (10) в (x_0, t_0) , имеем $a_t(x_0, t_0) > 0$. Отсюда и из уравнения (2) следует, что $\varphi(u(x_0, t_0)) > a(x_0, t_0)$. Так как $v(x_0, t_0) < 0 \Rightarrow u(x_0, t_0) < 0 \Rightarrow \{(7)\} \Rightarrow \varphi(u(x_0, t_0)) < 0 \Rightarrow a(x_0, t_0) < 0$.

Используя $a_t(x_0, t_0) > 0, a(x_0, t_0) < 0$ и учитывая (3), заключаем, что обязательно существует точка $t_2 \in (0, t_0)$ такая, что $a(x_0, t_2) = \min_{t \in [0, t_0]} a(x_0, t)$, откуда получим: $a_t(x_0, t_2) = 0, \Rightarrow \{(2)\} \Rightarrow \varphi(u(x_0, t_2)) = a(x_0, t_2)$.

Запишем разность $\varphi(u(x_0, t_2)) - \varphi(u(x_0, t_0)) < a(x_0, t_2) - a(x_0, t_0) < a(x_0, t_0) - a(x_0, t_0) = 0 \Rightarrow \varphi(u(x_0, t_2)) < \varphi(u(x_0, t_0))$. Из (7) получаем, что $u(x_0, t_2) < u(x_0, t_0)$. Домножим это неравенство на $e^{-\omega t_2}$:

$$\begin{aligned} v(x_0, t_2) &\equiv u(x_0, t_2)e^{-\omega t_2} < u(x_0, t_0)e^{-\omega t_2} < \\ < \{e^{-\omega t_0} < e^{-\omega t_2}, u(x_0, t_0) < 0\} < u(x_0, t_0)e^{-\omega t_0} \equiv v(x_0, t_0). \end{aligned}$$

Получившееся неравенство противоречит предположению о том, что (x_0, t_0) - точка минимума функции $v(x, t)$ в области Q_{t_1} . Таким образом, отрицательный минимум функции $v(x, t)$, а значит и функции $u(x, t)$, может достигаться только в точках границы области $\overline{Q_T}$: $x = 0$ или $x = l$ или $t = 0$.

2) Аналогично доказывается, что положительный максимум функции $u(x, t)$ может достигаться только в точках границы области $\overline{Q_T}$: $x = 0$ или $x = l$ или $t = 0$.

Пусть в точке $(x_0, t_0) \in Q_{t_1}$ достигается положительный максимум функции $v(x, t)$ в области Q_{t_1} . Тогда в точке (x_0, t_0) имеем: $v_x = 0, v_t \geq 0, v > 0, v_{xx} \leq 0$.

Рассмотрев (10) в (x_0, t_0) , имеем $a_t(x_0, t_0) < 0$. Отсюда и из уравнения (2) следует, что $\varphi(u(x_0, t_0)) < a(x_0, t_0)$. Так как $v(x_0, t_0) > 0 \Rightarrow u(x_0, t_0) > 0 \Rightarrow \varphi(u(x_0, t_0)) > 0 \Rightarrow a(x_0, t_0) > 0$.

Используя $a_t(x_0, t_0) < 0, a(x_0, t_0) > 0$ и учитывая (3), заключаем, что обязательно существует точка $t_2 \in (0, t_0)$ такая, что $a(x_0, t_2) = \max_{t \in [0, t_0]} a(x_0, t)$, откуда получим: $a_t(x_0, t_2) = 0, \Rightarrow \{(2)\} \Rightarrow \varphi(u(x_0, t_2)) = a(x_0, t_2)$.

Запишем разность $\varphi(u(x_0, t_2)) - \varphi(u(x_0, t_0)) > a(x_0, t_2) - a(x_0, t_0) > a(x_0, t_0) - a(x_0, t_0) = 0 \Rightarrow \varphi(u(x_0, t_2)) > \varphi(u(x_0, t_0))$. Из (7) получаем, что $u(x_0, t_2) > u(x_0, t_0)$. Домножим это неравенство на $e^{-\omega t_2} : v(x_0, t_2) \equiv u(x_0, t_2)e^{-\omega t_2} > u(x_0, t_0)e^{-\omega t_2} > \{e^{-\omega t_0} < e^{-\omega t_2}, u(x_0, t_0) > 0\} > u(x_0, t_0)e^{-\omega t_0} \equiv v(x_0, t_0)$.

Получившееся неравенство противоречит предположению о том, что (x_0, t_0) - точка максимума функции $v(x, t)$ в области Q_{t_1} . Таким образом, положительный максимум функции $v(x, t)$, а значит и функции $u(x, t)$, может достигаться только в точках границы области Q_T : $x = 0$ или $x = l$ или $t = 0$.

Утверждение 1 доказано.

Предположим, что выполнены также следующие достаточно естественные условия:

$$f_0(t), f_l(t) \in C^0[0, T], f_0(t) \geq 0, f_l(t) \geq 0, t \in [0, T]; \quad (11)$$

$$\mu_0(x) \in C^0[0, l], \mu_0(x) \geq 0, x \in [0, l]. \quad (12)$$

Лемма 1 Пусть выполнены условия (7)(11) (12), пара функций $\{u(x, t), a(x, t)\}$ - решение прямой задачи (1)-(6). Тогда

$$u(x, t) \geq 0, a(x, t) \geq 0, (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (13)$$

Доказательство. Из утверждения 1 следует, что отрицательный минимум функции $u(x, t)$ может достигаться только в точках границы области $\overline{Q}_T$: $x = 0$ или $x = l$ или $t = 0$.

1) Пусть он достигается при $t = 0. \Rightarrow \exists x_0 \in [0, l] : 0 > u(x_0, 0) = \mu_0(x_0)$. Это противоречит (4)(12).

2) Пусть он достигается при $x = 0. \Rightarrow \exists t_0 \in (0, T] : 0 > u(0, t_0) = f_0(t_0)$. Это противоречит (5)(11).

3) Пусть он достигается при $x = l. \Rightarrow \exists t_0 \in (0, T] : u(l, t_0) < 0, u_t(l, t_0) \leq 0, u_x(l, t_0) \leq 0$. Это противоречит (6), которое в точке (l, t_0) записано в виде: $u_t(l, t_0) + ku_x(l, t_0) + hu(l, t_0) = hf_l(t_0)$ и где в левой части стоит отрицательное, а в правой - неотрицательное из-за условий (11) выражение.

Три этих противоречия доказывают, что функция $u(x, t)$ неотрицательна на границе области $\overline{Q_T}$, а значит и во всей области $\overline{Q_T}$, что следует из утверждения 1.

Докажем, что $a(x, t) \geq 0, \overline{Q_T}$. Из неотрицательности в области $\overline{Q_T}$ функции $u(x, t)$ и из условий (7) из представления (9) получаем, что $a(x, t) \geq 0, \overline{Q_T}$.

Лемма 1 доказана.

Пусть теперь и далее в дополнение к ранее введенным условиям будут выполняться следующие условия:

$$f_l(t) \leq f_0(t), t \in [0, T]; \quad (14)$$

$$f_0(t), f_l(t) \in C^1[0, T], f'_0(t) \geq 0, f'_l(t) \geq 0, t \in [0, T]; \quad (15)$$

$$\mu_0(x) \in C^1[0, l], \mu_0(l) = 0, \mu'_0(x) \leq 0, x \in [0, l]; \quad (16)$$

Лемма 2 Пусть выполнены условия (7)(11)(12) (14)-(16), пара функций $\{u(x, t), a(x, t)\}$ - решение прямой задачи (1)-(6). Тогда $\forall t_1 \in [0, T]$ выполнено следующее:

$$u(x, t) \leq f_0(t_1), a(x, t) \leq \varphi(f_0(t_1)), (x, t) \in \overline{Q_{t_1}}.$$

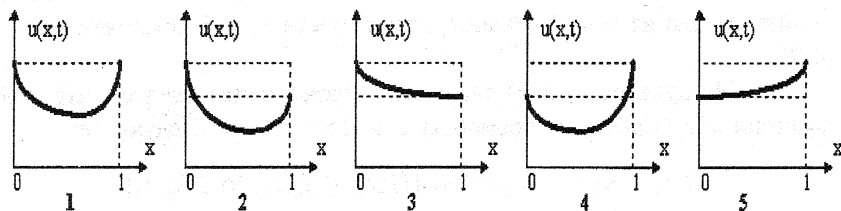
Доказательство. Из утверждения 1 следует, функция $u(x, t)$ решения прямой задачи не может достигать внутри области Q_T локальных отрицательного минимума и положительного максимума. Следовательно, она не может достигать внутри области Q_T глобальных отрицательного минимума и положительного максимума.

Следовательно, глобальные отрицательные минимумы и положительные максимумы функции $u(x, t)$ решения прямой задачи могут достигаться только в точках границы области Q_T : при $x = 0$ или $x = l$ или $t = 0$.

Следовательно, внутри Q_T не может существовать отрицательных локальных максимумов, иначе бы существовало по крайней мере

два отрицательных локальных минимума. Внутри Q_T может быть лишь один положительный локальный минимум, потому что иначе существовал бы по крайней мере один положительный локальный максимум.

Следовательно, для любых $t \in [0, T]$ возможен только один из следующих пяти вариантов графика функции $u(x, t)$, как функции аргумента $x, x \in [0, l]$:



В случаях 3 и 5 функция $u(x, t)$ может быть выпуклой вверх, но она не должна пересекать прямую $y = u(l, t)$ в случае 3, или прямую $y = u(0, t)$ в случае 5.

Из (5)(6)(14) имеем:

$$hu(0, t) \geq u_t(l, t) + ku_x(l, t) + hu(l, t), t \in [0, T]. \quad (17)$$

В случае 5 имеем: $u(0, t) < u(l, t), u_x(0, t) \geq 0, u_x(l, t) \geq 0$. В случае 4 имеем: $u(0, t) < u(l, t), u_x(0, t) \leq 0, u_x(l, t) \geq 0$. Отсюда из (17) для обоих этих случаев имеем:

$$0 > u_t(l, t) + ku_x(l, t) + h[u(l, t) - u(0, t)] > u_t(l, t), t \in [0, T].$$

1) Если $u_t(l, t) < 0, \forall t \in (0, T)$, то

$$u(l, t) < u(l, 0) = \mu_0(l) = \{(16)\} = 0 \Rightarrow u(l, t) < 0, \forall t \in (0, T).$$

Следовательно, в этом случае получаем, что функция $u(x, t)$ возрастает по x и при любом выбранном t оказывается при этом t меньше нуля в точке $x = l$. Значит, где-то внутри интервала $(0, l)$ у нее есть хотя бы один локальный отрицательный минимум, поскольку $u(0, t) = f_0(t) \geq 0$. Это противоречит утверждению 1. Следовательно, функция $u(x, t)$ не может сохранять вид случая 4 или случая 5 для всех $t \in (0, T)$.

2) Из (16) получаем, что $u(x, t)$ может принять вид случая 4 или случая 5 только пройдя при некотором t через вид случая 1, когда

$u(0, t) = u(l, t)$. При этом очевидно, что из (17) имеем:

$$u(0, t) = u(l, t), u_x(0, t) \leq 0, u_x(l, t) \geq 0 \Rightarrow \{(17)\} \Rightarrow u_t(l, t) \leq 0,$$

то есть $u(l, t)$ не возрастает по t и при этом становится равна $u(0, t)$, которая, в свою очередь является неубывающей функцией по условию (15).

Таким образом, функция $u(x, t)$ может прийти в вид 1 только из вида 4 или 5, а из условия (16) получаем, что в вид 4 или 5 она может прийти только из вида 1. Значит, возможности 1, 4, 5 исключены $\forall t \in [0, T]$.

3) Из пунктов 1) и 2) текущего доказательства следует, что для функции $u(x, t)$ решения прямой задачи (1)-(6) верно следующее:

$$u(l, t) \leq u(0, t) = f_0(t) \leq \{(15)\} \leq f_0(t_1), \forall t \in [0, t_1].$$

4) При $t = 0$ имеем:

$$\mu_0(x) \leq \{(16)\} \leq \mu_0(0) = u(0, 0) = f_0(0) \leq \{(15)\} \leq f_0(t_1).$$

Из утверждения 1, а также пунктов 3), 4) текущего доказательства следует, что положительный максимум функции $u(x, t)$ в области $\overline{Q_{t_1}}$ может достигаться лишь при $x = 0$ и он не превышает значения $f_0(t_1)$.

5) Преобразуем выражение (9):

$$\begin{aligned} a(x, t) &= \beta \int_0^t \varphi(u(x, \tau)) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \leq \{(7)\} \leq \\ &\leq \varphi(f_0(t_1)) \beta \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} d\tau = \varphi(f_0(t_1)) [1 - e^{-\beta t}] \leq \varphi(f_0(t_1)). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3 Пусть $\{u(x, t), a(x, t)\}$ - решение прямой задачи (1)-(6); выполнены условия (7)(11) (12)(14)-(16);

$$\varphi(\xi) \in C^2[0, M], M \equiv f_0(T), \varphi''(\xi) \leq 0, \xi \in [0, M]; \quad (18)$$

Тогда

$$\exists t_2 \in (0, T] : u_t(x, t) \geq 0, a_t(x, t) \geq 0, (x, t) \in \overline{Q_{t_2}}. \quad (19)$$

Доказательство. Введем следующие вспомогательные обозначения: $z(x, t) = u_t(x, t)$, $w(x, t) = a_t(x, t)$. Функции $z(x, t)$, $w(x, t)$ удовлетворяют задаче:

$$\begin{cases} \nu z_x + z_t + w_t = D z_{xx}, & (x, t) \in Q_T; & (20) \\ w_t = \beta[\varphi'(u)z - w], & (x, t) \in Q_T^0; & (21) \\ w(x, 0) = \beta\varphi(\mu_0(x)), & 0 \leq x \leq l; & (22) \\ z(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l; & (23) \\ z(0, t) = f'_0(t), & 0 \leq t \leq T; & (24) \\ z_t(l, t) + k z_x(l, t) + h z(l, t) = h f'_l(t), & 0 \leq t \leq T. & (25) \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $v(x, t) = z(x, t)e^{-\omega t}$, $\omega = \text{const} > 0$ произвольно. Эта функция удовлетворяет уравнению:

$$\nu v_x + v_t + \omega v + w_t e^{-\omega t} = D v_{xx}, Q_T; \quad (26)$$

1) Выберем t_2 из условия: $\frac{\varphi'(f_0(t_2))}{\beta t_2} = \varphi'(0)$, если $\frac{\varphi'(f_0(T))}{\beta T} \leq \varphi'(0)$ или положим $t_2 = T$ в противном случае.

2) Пусть $(x_0, t_0) \in Q_{t_2}$ - точка отрицательного минимума функции $v(x, t)$ в области Q_{t_2} . Тогда в точке (x_0, t_0) имеем: $v_x = 0$, $v_t \leq 0$, $v < 0$, $v_{xx} \geq 0$. Рассмотрев (26) в (x_0, t_0) , имеем:

$$w_t(x_0, t_0) > 0. \quad (27)$$

Интегрируя уравнение (21) с условием (22), имеем:

$$w(x, t) = \beta\varphi(\mu_0(x)) + \beta \int_0^t \varphi'(u(x, \tau))z(x, \tau)e^{-\beta(t-\tau)} d\tau.$$

$$w_t(x, t) = \beta\varphi'(u(x, t))z(x, t) - \beta^2 \int_0^t \varphi'(u(x, \tau))z(x, \tau)e^{-\beta(t-\tau)} d\tau.$$

Заметим попутно, что так как $v(x_0, t_0) < 0 \Rightarrow z(x_0, t_0) < 0$. Так как $v(x_0, t_0) \leq v(x_0, \tau)$, $\tau \in [0, t_0] \Rightarrow z(x_0, t_0)e^{-\omega t_0} \leq z(x_0, \tau)e^{-\omega \tau}$. Из того, что $e^{-\omega \tau} \geq e^{-\omega t_0} > 0$, $\tau \in [0, t_0]$ следует, что $z(x_0, t_0)e^{-\omega \tau} \leq z(x_0, \tau)e^{-\omega \tau}$. Поэтому $z(x_0, t_0) \leq z(x_0, \tau)$, $\tau \in [0, t_0]$.

$$\begin{aligned} w_t(x_0, t_0) &= \beta\varphi'(u(x_0, t_0))z(x_0, t_0) - \\ &- \beta^2 \int_0^{t_0} \varphi'(u(x_0, \tau))z(x_0, \tau)e^{-\beta(t_0-\tau)} d\tau \leq \\ &\leq \beta^2 z(x_0, t_0) \left[\frac{1}{\beta} \varphi'(u(x_0, t_0)) - \int_0^{t_0} \varphi'(u(x_0, \tau))e^{-\beta(t_0-\tau)} d\tau \right] \leq \\ &\leq \{z(x_0, t_0) < 0, \varphi'(\xi) > \{(7)\} > 0, e^{-\beta(t_0-\tau)} < 1\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta^2 z(x_0, t_0) \int_0^{t_0} \left[\frac{\varphi'(u(x_0, t_0))}{\beta t_0} - \varphi'(u(x_0, \tau)) \right] d\tau \leq \\
&\leq \{(18) \Rightarrow \varphi''(\xi) \leq 0, \xi \in [0, M] \Rightarrow \varphi'(u(x_0, t_0)) \geq \varphi'(f_0(t_2))\} \leq \\
&\leq \beta^2 z(x_0, t_0) \int_0^{t_0} \left[\frac{\varphi'(f_0(t_2))}{\beta t_2} - \varphi'(u(x_0, \tau)) \right] d\tau = \{ \text{выбор } t_2 \} = \\
&= \beta^2 z(x_0, t_0) \int_0^{t_0} [\varphi'(0) - \varphi'(u(x_0, \tau))] d\tau \leq \\
&\leq \{(13), (18) \Rightarrow \varphi'(u(x_0, \tau)) \leq \varphi'(0)\} \leq 0.
\end{aligned}$$

Это противоречит (27). Следовательно, в области Q_{t_2} у функции $v(x, t)$ отрицательного минимума нет. Значит, $v(x, t) \geq 0$ для всех $(x, t) \in Q_{t_2}$. Следовательно, $z(x, t) \geq 0, (x, t) \in Q_{t_2}$.

3) При $t = 0$ из (23) получаем, что нет отрицательного минимума: $z(x, 0) = 0, x \in [0, l]$. При $x = 0$ также нет отрицательного минимума:

$$z(0, t) = f'_0(t) \geq \{(15)\} \geq 0, t \in [0, T].$$

Докажем, что при $x = l$ нет отрицательного минимума. Пусть $\exists t_0 : z(l, t_0) < 0, z_t(l, t_0) \leq 0$. Так как $z(l - \varepsilon, t_0) \geq 0, \forall \varepsilon > 0$, следовательно $z_x(l, t_0) < 0$. Это противоречит (15)(25).

Поэтому $z(x, t) \geq 0, (x, t) \in \overline{Q_{t_2}} \Rightarrow u_t(x, t) \geq 0, (x, t) \in \overline{Q_{t_2}}$.

4) Покажем, что $w(x, t) \geq 0, (x, t) \in \overline{Q_{t_2}}$.

При $t = 0 : w(x, 0) = \beta \varphi(\mu_0(x)) \geq \{(12)(7)\} \geq 0$.

Пусть (x_0, t_0) - точка отрицательного минимума функции $w(x, t)$ в области $Q_{t_2}^0$. Тогда в этой точке $w_t \leq 0, w < 0$. Запишем (21) в виде: $w_t(x_0, t_0) + \beta w(x_0, t_0) = \beta \varphi'(u(x_0, t_0)) z(x_0, t_0)$. Здесь в левой части стоит отрицательное значение, а в правой - неотрицательное. Из этого противоречия следует неравенство: $w(x, t) \geq 0, (x, t) \in Q_{t_2}^0$.

Значит, $w(x, t) \geq 0, (x, t) \in \overline{Q_{t_2}} \Rightarrow a_t(x, t) \geq 0, (x, t) \in \overline{Q_{t_2}}$.

Лемма 3 доказана.

Единственность решения обратной задачи. Изучается следующая обратная задача: требуется определить функцию $\varphi(\xi), \xi \in [0, M]$, если известны положительные параметры ν, D, β, k, h и функции $\mu_0(x), f_0(t), f_l(t)$ в задаче (1)-(6) и для фиксированного $x^* \in (0, l)$ задана функция:

$$\gamma(t) \equiv u(x^*, t), t \in [0, T]. \quad (28)$$

Определение 2 Решением обратной задачи (1)-(6)(28) будем называть такую тройку функций $\{u(x, t), a(x, t), \varphi(\xi)\}$, что $u(x, t)$, $a(x, t)$ удовлетворяют (8), $\varphi(\xi)$ удовлетворяет (7) (18), $u(x, t)$, $a(x, t)$, $\varphi(\xi)$ удовлетворяют (1) в Q_T , (2) в Q_T^0 , условиям (3)-(6)(28); $\mu_0(x)$ удовлетворяет (12)(16); $f_0(t)$ удовлетворяет (11)(15), $f_l(t)$ удовлетворяет (14); константы считаются положительными; функция $\gamma(t)$ из условия (28), удовлетворяет необходимым условиям разрешимости обратной задачи:

$$\gamma(t) \in C^1[0, T], \gamma'(t) \geq 0, 0 \leq \gamma(t) \leq f_0(T), t \in [0, T].$$

Пусть $\{u_i, a_i, \varphi_i\}, i = 1, 2$ - решения обратной задачи. Рассмотрим функции $z(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, $w(x, t) = a_1(x, t) - a_2(x, t)$,

$$b(\xi) = \varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi),$$

$$p(x, t) = \int_0^1 \varphi'_1(u_1(x, t) + \theta[u_2(x, t) - u_1(x, t)])d\theta.$$

Запишем разность исходных систем (1)-(6) для каждого из решений:

$$\begin{cases} \nu z_x + z_t + w_t = D z_{xx}, & (x, t) \in Q_T; \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} w_t = \beta[\varphi_1(u_1) - \varphi_2(u_2) - w], & (x, t) \in Q_T^0; \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} w(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l; \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} z(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l; \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} z(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T; \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} z_t(l, t) + k z_x(l, t) + h z(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (34)$$

Проведем некоторые преобразования:

$$\varphi_1(u_1) - \varphi_1(u_2) = (u_1 - u_2) \int_0^1 \varphi'_1(u_1 + \theta(u_2 - u_1))d\theta = z(x, t)p(x, t).$$

$$\Rightarrow \varphi_1(u_1) - \varphi_2(u_2) = \varphi_1(u_1) - \varphi_1(u_2) + \varphi_1(u_2) - \varphi_2(u_2) = zp + b(u_2).$$

Используя последнее и разрешая уравнение (30), записанное в виде $w_t + \beta w = \beta[\varphi_1(u_1) - \varphi_2(u_2)]$ с использованием начального условия (31), имеем:

$$w(x, t) = \beta \int_0^t [b(u_2(x, \tau)) + p(x, \tau)z(x, \tau)]e^{-\beta(t-\tau)}d\tau,$$

$$w_t(x, t) = \beta[b(u_2(x, t)) + p(x, t)z(x, t)] -$$

$$-\beta^2 \int_0^t [b(u_2(x, \tau)) + p(x, \tau)z(x, \tau)]e^{-\beta(t-\tau)} d\tau.$$

Подставим это соотношение в уравнение (29) и получим, что функция $z(x, t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению:

$$F(x, t) = \nu z_x + z_t + \beta p(x, t)z - Dz_{xx} - \beta^2 \int_0^t p(x, \tau)z(x, \tau)e^{-\beta(t-\tau)} d\tau, \quad (35)$$

$$\text{где } F(x, t) = -\beta b(u_2(x, t)) + \beta^2 \int_0^t b(u_2(x, \tau))e^{-\beta(t-\tau)} d\tau. \quad (36)$$

Можно доказать, что имеет место следующая оценка:

Лемма 4 $\forall t_1 \in (0, T]$ найдутся такие положительные постоянные C_1, C_2 , что для решения задачи (35)(36)(32)-(34) в области Q_{t_1} будет верна оценка:

$$C_1 \min\{0, \min_{Q_{t_1}} F(x, t)\} \leq z(x, t) \leq C_2 \max\{0, \max_{Q_{t_1}} F(x, t)\}. \quad (37)$$

Приведем доказательство основного результата работы [3].

Теорема 1 Пусть $\{u_i, a_i, \varphi_i\}, i = 1, 2$ - решения обратной задачи. $\varphi(\xi)$ аналитична на интервале, содержащем отрезок $[0, M]$. Тогда

$$u_1(x, t) = u_2(x, t), \quad a_1(x, t) = a_2(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_T},$$

$$\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi), \quad \xi \in [0, M]. \quad (38)$$

Доказательство. Функции $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)$ аналитичны и выполняется равенство $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Если существует отрезок $[0, \xi_1]$, где $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$, то по теореме единственности аналитической функции $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi), \xi \in [0, M]$. Тогда $b(\xi) = 0, \xi \in [0, M] \Rightarrow F(x, t) = 0, (x, t) \in \overline{Q_T}$. Отсюда и из оценки (37) получаем, что $z(x, t) = 0, (x, t) \in \overline{Q_T} \Rightarrow u_1 = u_2, a_1 = a_2, (x, t) \in \overline{Q_T}$, и в этом случае теорема доказана.

Рассмотрим теперь другой случай. Предположим для определенности, что $\varphi_1(\xi) > \varphi_2(\xi), \xi \in (0, \xi_1)$, т.е. $b(\xi) > 0, \xi \in (0, \xi_1)$. Так как $b(0) = 0 \Rightarrow \exists \xi_0 \leq \xi_1 : b'(\xi) = \varphi'_1(\xi) - \varphi'_2(\xi) > 0, \xi \in (0, \xi_0)$. Пусть τ - решение уравнения $f_0(\tau) = \xi_0$. Если $f_0(T) < \xi_0$, положим $\tau = T$.

Обозначим $\tau^* = \min\{t_2, \tau\}$, где t_2 берется из леммы 2. Из леммы 2 $u_2(x, t) \geq u_2(x, s), t > s$, из леммы 3 следует, что $u_2(x, t) \leq \xi_0, u_2(x, t) \geq$

$u_2(x, s), t > s$. Тогда из определения функции $F(x, t)$ следует, что $F(x, t) \leq 0, (x, t) \in Q_{\tau^*}$. Покажем, что $z(x, t) < 0$.

Из правой части оценки (37) имеем: $z(x, t) \leq 0, (x, t) \in Q_{\tau^*}$. Если в какой-либо точке $(x_0, t_0) \in Q_{\tau^*} : z(x_0, t_0) = 0$, тогда это точка максимума функции $z(x, t)$, но в представлении (35), записанном в этой точке, в левой его части стоит неотрицательное значение, а в правой - отрицательное. Это противоречие и показывает, что $z(x, t) < 0, (x, t) \in Q_{\tau^*}$. Но из условия (28) имеем: $z(x^*, t) = 0$. Значит, неверно исходное предположение $\varphi_1(\xi) > \varphi_2(\xi)$.

Проводя аналогичные рассуждения в предположении, что $\varphi_1(\xi) < \varphi_2(\xi), \xi < \xi_1$, получаем такое же противоречие, что и доказывает теорему.

Литература

1. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
2. Евсеев А.Б. О существовании решения прямой задачи неравновесной динамики сорбции с нестационарным краевым условием // Деп. в ВИНТИ 05.11.2001, N 2308-B2001.
3. Евсеев А.Б. Лукшин А.В. Обратная задача с нестационарным краевым условием для модели сорбционной системы // Обратные и некорректно поставленные задачи. (тезисы докладов конференции). М.: изд-во МАКС Пресс, 2001. С.31.