Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Численные методы**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические и компьютерные методы решения задач естествознания**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу и линейной алгебре, дифференциальным уравнениям в объеме, соответствующем программе первых двух лет обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки»

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. основные типы разностных уравнений, общие и частные решения.
2. основные методы построения алгоритмов для численного дифференцирования, свойства.
3. численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений Рунге-Кутты, Адамса, Гира, общие многошаговые линейные методы.
4. численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоремы вложения, способы получения априорных оценок, интегро-интерполяционный метод построения схем, методы построения схем для уравнений с разрывными коэффициентами, особенности аппроксимации на неравномерных сетках.

**Уметь:**

1. применять на практике общую теорию и методы решения теории разностных схем и их исследования.

**Владеть:**

1. навыками построения алгоритмов для численного решения ОДУ.

**4.** Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 4 з.е., в том числе 64 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 80 академических часов на самостоятельную работу обучающихся, 6 семестр.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | |
| **Контактная работа  (работа во взаимодействии с преподавателем)**  **Виды контактной работы, часы** | | | **Самостоятельная работа обучающегося,**  **часы** |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |  |
| **Методы решения СЛАУ.**  Прямые методы, нормы. Итерационные методы. Задача на собственные значения. | **12** | 0 | 8 | **8** | **4** |
| **Разностные уравнения.** Линейные разностные уравнения первого порядка. Разностные уравнения с постоянными коэффициентами и специальными правыми частями. Системы разностных уравнений. Разностная задача на собственные значения | **14** | 6 | 4 | **10** | **4** |
| Контрольная работа №1 | **4** | 0 | 2 | **2** | **2** |
| **Численное дифференцирование.** Метод неопределенных коэффициентов. Использование интерполяционных формул. О корректности численного дифференцирования. | **16** | 6 | 4 | **10** | **6** |
| **Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.** Метод Эйлера. Неявный метод Эйлера. Методы Рунге и трапеций. Общая концепция методов Рунге-Кутты. Одноэтапные методы. Вывод условий третьего порядка аппроксимации. Двухэтапные явные и неявные методы. Оптимальный двухэтапный метод. Некоторые теоремы об общих методах. Сходимость методов Рунге-Кутты. Методы Адамса. Формулы дифференцирования назад. Общие линейные многошаговые методы и их погрешность аппроксимации. Нуль-устойчивость. Первый барьер Далквиста. Жесткие задачи. *A*- и *A(α)*-устойчивости. Исследование на *A(α)*-устойчивость конкретных многошаговых методов и методов Рунге-Кутты. | **30** | 10 | 6 | **16** | **14** |
| **Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.** Основные понятия теории разностных схем. Простейшие аппроксимации уравнения второго порядка. Разрешимость и сходимость. Аппроксимация уравнения и граничного условия третьего рода методом баланса (конечных объемов). Исследование погрешности аппроксимации. Априорные оценки для приближенного решения. Неравномерная сетка. Разрешимость и сходимость разностных схем для уравнения конвекции-диффузии. Сингулярно возмущенное уравнение конвекции-диффузии и разностные схемы для него. Концепция равномерной по малому параметру сходимости. Построение сгущающейся сетки для сеточной аппроксимации негладкого решения. | **28** | 10 | 6 | **16** | **12** |
| Контрольная работа №2 | **4** | 0 | 2 | **2** | **2** |
| Аттестация: устный экзамен | **36** | 0 | 0 | **0** | **36** |
| **Итого** | **144** | **32** | **32** | **64** | **80** |

***План практических занятий - 6 семестр.***

*Занятие 1*. Прямые методы решения СЛАУ.

№№ 1.1а), 1.2, 1.4, 1.8, 1.10, 1.14.

Дома №№ 1.1б), 1.3, 1.5, 1.7, 1.15.

*Занятие 2*. Нормы.

№№ 1.20, 2.1а), 2.4а), 2.5, 2.8а), 2.9а).

Дома №№ 1.21, 2.1б) в), 2.4б)в), 2.8б), 2.9б)в).

*Занятие 3*. Разностные уравнения.

№№ 3.1, 3.2а)в)д), 3.3, 3.7, 3.18.

Дома №№ 3.2б)г)е), 3.4, 3.5, 3.8, 3.17.

*Занятие 4*. Системы разностных уравнений.

№№ 3.15а)б), 3.19, 3.20, 3.13.

Дома №№ 1.16а)б), 3.21, 3.22, 3.14.

*Занятие 5*. Итерационные методы.

№№ 4.1, 4.2, 4.6, 4.7, 4.8а).

Дома №№ 4.3, 4.4, 4.5, 4.8б).

*Занятие* *6*. Задача на собственные значения.

№№ 5.1, 5.4, 5.6, 5.8.

Дома №№ 5.3, 5.5, 5.7, 5.9.

*Занятие 7*. Контрольная работа.

*Занятие 8*. Численное дифференцирование.

№№ 6.1а)в), 6.2а), 6.3а), 6.4, 6.7.

Дома №№ 6.1б)г), 6.2б), 6.3в)д), 6.5а)б), 6.6.

*Занятие 9*. Методы Ругне-Кутты.

№№ 7.1а)в), 7.2а)в), 7.3.

Дома №№ 7.1б)г), 7.2б)г), 7.5.

*Занятие 10*. Многошаговые методы.

№№ 8.1а), 8.3а), 8.5.

Дома №№ 8.1б), 8.3б), 8.4, 8.2а).

*Занятие 11*. Устойчивость численных методов решения задачи Коши.

№№ 9.1а)б)в)д), 9.2а), 9.3а)в)е).

Дома №№ 9.1г)е), 9.2б), 9.3б)г)ж).

*Занятие 12*. Разностные схемы для краевых задач.

№№ 10.1, 10.2, 10.4а), 10.6.

Дома №№ 10.3, 10.4б), 10.14б), 10.5, 10.8.

*Занятие 13*. Априорные оценки.

№№ 11.4, 11.6, 11.9а)в), 11.10.

Дома №№ 11.5, 11.7, 11.9б)г), 11.11, 11.18.

*Занятие 14*. Контрольная работа.

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

***Список задач. 6 семестр.***

Тема 1. Прямые методы.

1.1. Вывести формулы для элементов матриц *L* и *U* изтреугольного разложения  *A=L U,* если

а) diag *L=1,*

б) diag *U=1.*

1.2. Вывести формулы прямой и обратной подстановок.

1.3. Вывести формулы для элементов множителя Холецкого, если . Выписать формулы прямой и обратной подстановок.

1.4. Найти треугольное разложение матрицы

*.*

1.5. Найти множители Холецкого следующих матриц 



1.6. Используя треугольное разложение из задачи 1.4, найти решение системы



1.7. Используя результат задачи 1.5 для матрицы , найти решение системы



1.8. Найти треугольное разложение (с выбором ведущего элемента) матрицы

*.*

1.9. Используя результат задачи 1.8, найти решение системы



1.10. Построить матрицу отражений, переводящую вектор  в вектор, коллинеарный вектору .

1.11. Построить матрицу отражений, переводящую вектор  (при ) в вектор, коллинеарный вектору .

Тема 2. Нормы.

2.1. Доказать, что следующие соотношения удовлетворяют аксиомам векторной нормы

а) ,

б) ,

в) .

2.2. Найти точные постоянные эквивалентности, связывающие нормы ,  и , и векторы, на которых они достигаются.

2.3. Доказать, что если , то  можно принять за норму вектора . Найти постоянные эквивалентности в соотношениях, связывающих эту норму с .

2.8. Доказать, что

а) ,

б) 

есть нормы вектора.

2.4. Доказать, что

а) ,

б) ,

в) 

подчинены векторным нормам

а) , б) , в) .

Тема 3. Разностные уравнения.

3.1. Пусть  и  - два частных решения разностного уравнения

. Доказать, что  либо равен нулю во всех точках , либо не равен нулю нигде.

3.2. Найти общие решения следующих разностных уравнений

а) ,

б) ,

в) ,

г) ,

д) ,

e) .

3.3. При  найти ограниченное решение разностного уравнения



такое, что .

3.4. Найти миллионный член последовательности чисел Фибоначчи

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55, … .

3.5. Найти решение задачи

,

.

3.6. Найти общее решение уравнения

.

3.7. Найти общее решение уравнения

.

3.8. Найти все решения периодической задачи на собственные значения



.

3.9. а) Найти общее решение уравнения



б) Найти исчезающее при  решение этого уравнения.

3.10. Найти общее решение системы разностных уравнений

, если .

Тема 4. Итерационные методы.

* 1. Пусть const >0. Методом простых итераций решить уравнение



При каких ограничениях на шаг  метод сходится? При каком  сходимость наилучшая? При каких  сходимость монотонная? При каких  решение колеблется? Существенно ли предположение о положительности ?

* 1. Пусть const >0, . Методом простых итераций решить систему



При каких ограничениях на  метод сходится? При каком  сходимость наилучшая? Существенно ли предположение ?

* 1. Найти оптимальное значение итерационного параметра в методе простых итераций при решении системы с матрицей

.

4.4. При каких  и  сходится метод простых итераций, если

?

* 1. Пусть det - собственные значения . Построить итерационный процесс с переменным параметром , который не более, чем за  шагов приводит к точному решению системы .
  2. . Показать, что точка минимума определяется условием .
  3. Найти параметры в методе скорейшего спуска.

Тема 5. Задача на собственные значения.

5.1. Степенным методом найти -е приближение к максимальному собственному значению и нормированному собственному вектору матрицы

.

5.2. Степенным методом найти -е приближение к максимальному собственному значению и соответствующему нормированному собственному вектору матрицы

.

5.3. Степенным методом найти -е приближение к максимальному собственному значению и соответствующему нормированному собственному вектору матрицы

.

5.4. Степенным методом найти -е приближение к максимальному по модулю собственному значению и соответствующему нормированному собственному вектору матрицы

.

5.5. Степенным методом найти -е приближение к максимальному по модулю собственному значению и соответствующему нормированному собственному вектору матрицы

.

5.6. Степенным методом найти -е приближение к максимальному по модулю собственному значению и соответствующему нормированному собственному вектору матрицы

.

5.7. Степенным методом найти -е приближение к максимальному по модулю собственному значению и соответствующему нормированному собственному вектору матрицы

.

Тема 6. Численное дифференцирование.

6.1. Используя формулу Тейлора, оценить порядок погрешности аппроксимации производных разностными отношениями

а) 

б) 

в) 

г) 

6.2. Методом неопределенных коэффициентов построить формулы численного дифференцирования максимального порядка аппроксимации и дать оценки погрешности

а) 

б) 

6.3. Используя аппроксимацию функции  по узлам  интерполяционным многочленом Лагранжа, построить аппроксимацию следующих производных

а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

Оценить погрешность аппроксимации построенных формул.

6.4. Доказать, что

.

6.5. Доказать, что

а) ,

б) ,

6.6. Доказать, что



Указание: воспользоваться решениями задачи 6.5.

6.7. Пусть  Как в этом случае оценивается величина

?

Тема 7. Методы Рунге-Кутты.

7.1. Оценить погрешность аппроксимации следующих методов

а)  - метод Эйлера,

б)  - неявный метод Эйлера,

в)  -метод Рунге,

г)  - метод трапеций.

7.2. Представить методы из задачи 7.1 как методы Рунге-Кутты и определить их порядок аппроксимации. (Выписать таблицы Бутчера и проверить условия аппроксимации).

7.3. Построить двухэтапный неявный метод максимального (4-го) порядка аппроксимации.

7.5. Построить явный трехэтапный метод Рунге-Кутты максимального порядка аппроксимации.

Тема 8. Многошаговые методы.

8.1. Построить явный

а) двухшаговый

б) трехшаговый

в) четырехшаговый

метод Адамса и исследовать его погрешность аппроксимации.

8.3. Построить

а) двухшаговую

б) трехшаговую

формулы дифференцирования назад и исследовать их порядок аппроксимации.

8.4. Построить явный двухшаговый метод наивысшего порядка аппроксимации.

8.5. Построить двухшаговый метод максимального порядка аппроксимации.

Тема 9. Устойчивость.

9.1. Исследовать на нуль-устойчивость следующие методы

а)  - метод Эйлера,

б)  - явный двухшаговый метод Адамса,

в)  - двухшаговая ФДН,

г)  - трехшаговая ФДН,

д) ,

e)  - двухшаговый явный метод третьего порядка.

9.2. Для решения уравнения , где  const < 0, используются двухшаговые явный и неявный методы Адамса. Выяснить ограничения на , при которых модули корней характеристического уравнения не превосходят единицы..

а) ,

б) .

9.3. Построить области абсолютной устойчивости следующих методов:

а) метод Эйлера ,

б) неявный метод Эйлера ,

в) метод трапеций ,

г) двухшаговая формула дифференцирования назад 

,

д) трехшаговая формула дифференцирования назад

.

Тема 10. Краевые задачи.

10.1. Для уравнения



методом баланса построить разностную аппроксимацию на неравномерной сетке.

10.2. Исследовать погрешность аппроксимации разностной схемы из задачи 10.1 при const.

10.3. Для уравнения из задачи 10.1 задано граничное условие

.

Методом баланса построить двухточечную аппроксимацию этого граничного условия и исследовать погрешность аппроксимации.

10.4. Для уравнения

const,

построить трехточечную аппроксимацию, имеющую погрешность аппроксимации

а) ,

б) .

10.5. Для уравнения из задачи 10.4 заданы периодические граничные условия



На равномерной сетке построить трехточечную аппроксимацию этой задачи, имеющую погрешность .

10.6. Для уравнения



методом баланса построить трехточечную аппроксимацию второго порядка.

Тема 11. Априорные оценки.

11.1. Найти представление решения задачи



через функцию Грина.

11.2. Найти представление решения задачи



через функцию Грина.

11.3. Построить функцию Грина для задачи 11.4 при .

11.4. Построить функцию Грина задачи из 11.5 при .

11.5. Найти решение следующей задачи

.

Сравнить полученный результат с решением задачи 11.4.

11.6. Используя представление решения задачи через функцию Грина, получить априорные оценки

а) ,

б) ,

в),

г) ,

д) .

11.7. Для решения задачи



найти априорную оценку в .

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

Контрольная работа № 1

1. Построить матрицу отражения, переводящую вектор  в вектор, коллинеарный вектору .

2. Пусть . Доказать, что

 и 

суть нормы в . Найти явное представление для .

3. Известно, что решение системы алгебраических уравнений



принадлежит оболочке некоторых неизвестных векторов  и , которые являются собственными для матрицы  и отвечают собственным значениям  и . Как при помощи итерационного метода



найти решение максимально быстро?

4. Степенным методом найти -е приближение к максимальному по модулю собственному значению и соответствующему нормированному собственному вектору матрицы

.

Контрольная работа № 2

1. Найти решение разностного уравнения



1. Представить метод



как метод Рунге-Кутты, т.е. указать число этапов и построить таблицу Бутчера. При каком  порядок погрешности аппроксимации будет наивысшим?

1. Построить устойчивый (удовлетворяющий корневому условию) многошаговый метод вида



максимального порядка аппроксимации.

1. На равномерной сетке построить симметричную пятиточечную аппроксимацию уравнения



имеющую погрешность .

**Вопросы к экзамену**.

1. Решение линейного разностного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.
2. Решение линейного однородного разностного  уравнения *k*-ого порядка с постоянными коэффициентами. Линейная независимость частных решений при различных, кратных и комплексных сопряженных корнях характеристического уравнения.
3. Решение неоднородного разностного уравнения *k*-ого порядка с постоянными коэффициентами и правыми частями вида многочлен, умноженный на экспоненту.
4. Решение систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
5. Решение разностной задачи на собственные значения для оператора второй разности с граничными условиями первого рода.
6. Ортогональные многочлены и их свойства.  Свойства нулей ортогональных многочленов.
7. Ортогональные многочлены Чебышева и их свойства.
8. Метод неопределенных коэффициентов построения формул численного дифференцирования. Примеры.
9. Использование интерполяционных формул для построения формул численного дифференцирования.  Корректность численного дифференцирования.
10. Общий вид методов Рунге-Кутты.
11. Одноэтапные методы Рунге-Кутты.
12. Методы Рунге-Кутты третьего порядка.Формулировки теорем о погрешности аппроксимации *s* – этапных методов Рунге-Кутты.
13. Теорема об оценке скорости сходимости метода Рунге-Кутты.
14. Явные и неявные методы Адамса. Примеры явных и неявных методов.
15. Формулы дифференцирования назад (методы Гира)
16. Общие линейные многошаговые методы и их погрешность аппроксимации.
17. Погрешность аппроксимации явных методов Адамса.
18. Производящий и характеристические многочлены, корневое условие, нуль-устойчивость. Примеры устойчивых линейных многошаговых методов. Первый барьер Дальквиста.
19. Абсолютная устойчивость и область абсолютной устойчивости. А-устойчивость двухшаговой формулы дифференцирования назад. Формулировка теоремы об устойчивости-неустойчивости неявных многошаговых методов. А(α) – устойчивость.
20. Разрешимость и оценка скорости сходимости трехточечной разностной схем, аппроксимирующей первую краевую задачу для стационарного уравнения теплопроводности.
21. Монотонность разностных схем на примере трехточечной разностной схемы для  стационарного уравнения теплопроводности. Принцип сравнения. Априорная оценка разностного решения.
22. Аппроксимация самосопряженного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами методом баланса. Погрешность построенной аппроксимации.
23. Аппроксимация граничного условия третьего рода для самосопряженного уравнения второго порядка методом баланса. Погрешность построенной аппроксимации.
24. Разрывные коэффициенты.
25. Неравномерные сетки.

**Экзаменационный билет состоит из двух вопросов, например**

1. Метод отражений для решения систем линейных алгебраических уравнений

2. Явные и неявные методы Адамса и их погрешность аппроксимации.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
| Оценка  РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания**  *Экзамен* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения**  *Контрольная работа* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципи-ального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки** *Экзамен* | Отсутствие навыков | Наличие отдельных навыков) | В целом, сформированные навыки, но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (, применяемые при решении задач |

8. Ресурсное обеспечение:

*Основная литература*

1. В.Б. Андреев Численные методы. Электронная версия. Части 1 и 2.
2. А.А. Самарский, А.В. Гулин. Численные методы. М.: Наука. 1989.
3. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. М.: Наука. 1989.
4. В.И. Дробышевич, В.П. Дымников, Г.С. Ривин. Задачи по вычислительной математике. М.: Наука. 1980.

Дополнительная литература

1. Дж. Деммель. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир. 2001.
2. Е.Е. Тыртышников. Методы численного анализа. М.: Издательский центр «Академия». 2007.
3. Д. Уоткинс. Основы матричных вычислений. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2006.
4. Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990.
5. Э. Хайрер, Г. Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир. 1999.
6. Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа. 2000.
7. А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, Е.А. Самарская. Задачи и упражнения по численным методам. М.: УРСС. 2003.
8. Сборник задач по методам вычислений. Под ред. П.И. Монастырного. М.: Наука. 1994.

Информационные справочные системы:

Материально-техническкое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватели: профессора факультета ВМК МГУ В.Б.Андреев, С.И.Мухин,

доценты факультета ВМК МГУ М.М.Хапаев, В.В.Терновский, В.П.Ильютко, А.Ю.Мокин,

ассистенты факультета ВМК МГУ В.А.Исаков, м.н.с. П.И.Шляхов

11. Авторы программы: профессор факультета ВМК МГУ В.Б.Андреев.