

А.Г. Давыдов, Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов

ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Гиперсингулярными принято называть интегралы с сильными особенностями (а также интегральные уравнения с такого типа интегралами), сходимость которых понимается в смысле конечной части по Адамару. Это понятие было введено в 30-х годах Ж. Адамаром в связи с исследованием задач Коши для уравнений гиперболического типа и было весьма специфическим. В теории дифракции электромагнитных волн гиперсингулярные интегральные уравнения также появились достаточно давно (Мауэ, 1949), но в вычислительной электродинамике они напрямую не использовались. Казалось, что для построения вычислительных процессов гиперсингулярные интегралы практически неприменимы. Поэтому для численного исследования конкретных моделей электромагнитной дифракции создавались различные способы преобразования гиперсингулярных уравнений к интегральным уравнениям фредгольмовского типа. При этом многие задачи дифракции электромагнитных волн (особенно векторные) вообще не поддавались численному анализу.

В начале 80-х годов авторами в ряде публикаций были построены эффективные схемы вычисления гиперсингулярных интегралов и озданы методы численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений (одномерных и двумерных) применительно к плоским и векторным задачам дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих незамкнутых поверхностях. Это направление, новое для вычислительной электродинамики было поддержано академиком Андреем Николаевичем Тихоновым.

Основная особенность построенных вычислительных схем заключается в том, что при сведении граничной задачи к интегральному уравнению в качестве значения электромагнитного поля на граничной поверхности рассматривается предел его интегрального представления при стремлении точки наблюдения к этой поверхности. Этот предел совпадает со значением интеграла в смысле конечной части по Адамару.

С помощью такого подхода в течение ряда лет были получены численные решения большого числа задач ([1-26] и др.). В настоящее время разработан комплекс программ «EDEM» [26], представляющий собой систему для автоматизированного исследования на персональной ЭВМ электродинамических свойств многоэлементных проводящих структур

различного назначения. Кратко рассмотрим методику решения и приведем некоторые примеры ее применения.

Трехмерные векторные задачи. Рассмотрим задачу дифракции монохроматического электромагнитного поля $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ на идеально проводящей поверхности S , в общем случае незамкнутой. Плотность полного тока, наведенного на поверхности S , т.е. сумму плотностей токов, наведенных на обеих ее сторонах, обозначим через $\vec{j}$. На поверхности S должны выполняться граничные условия:

$$\vec{n}^o(M_o) \times \lim_{M \rightarrow M_o} \vec{E}(M) = -\vec{n}^o(M_o) \times \vec{E}^o(M_o), \quad M_o \in S, \quad (1)$$

где $\vec{E}(M)$ – вектор напряженности вторичного электрического поля в точке наблюдения M , $\vec{n}^o(M_o)$ – орт нормали к точке M_o , находящейся на поверхности S .

Форма (1) записи граничных условий подчеркивает, что в окрестности поверхности S касательная к ней составляющая напряженности вторичного электрического поля в точке наблюдения M должна иметь пределом взятую с обратным знаком касательную составляющую напряженности первичного поля. Таким образом, условие (1) содержит требование непрерывности вторичного поля вплоть до границы, которое обычно неявно подразумевается.

Из (1) и интегральных представлений электрического поля следует основное уравнение задачи [2]:

$$\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{n}^o(M_o) \times \lim_{M \rightarrow M_o} \left\{ \iint_S \text{grad}_M(\vec{j}, \text{grad}_P G) ds_P - k^2 \iint_S \vec{j} G ds_P \right\} = -\vec{n}^o(M_o) \times \vec{E}^o(M_o),$$

$$M_o \in S. \quad (2)$$

где $G = \frac{e^{-ikR(M,P)}}{kR(M,P)}$, а R – расстояние между точкой наблюдения M и точкой истока (интегрирования) P .

Это уравнение эквивалентно гиперсингулярному интегральному уравнению с несобственным интегралом в смысле конечной части по Адамару. Вопросы обоснования такого подхода и свойства гиперсингулярного интеграла рассматривались в [3]. Как было показано, уравнение для неизвестной функции $\vec{j}$, имеющее непосредственную связь с исходной граничной задачей, может быть записано в виде

$$-\frac{k}{4\pi\omega\epsilon} \vec{n}^o \times \left[\iint_S^* (\vec{j} \cdot \nabla) \nabla G ds + k^2 \iint_S \vec{j} G ds \right] = -\vec{n}^o \times \vec{E}^o, \quad (3)$$

где значок «*» над знаком интеграла указывает, что этот интеграл следует понимать в смысле конечной части по Адамару.

Запись интегрального уравнения в форме (2) позволяет представить получающиеся после его дискретизации выражения в таком виде, что указанный предел будет вычисляться аналитически. Это позволяет уменьшить количество вычислений и разработать эффективные алгоритмы численного решения.

Рассмотрим наиболее простой алгоритм такого типа.

Введем систему криволинейных ортогональных координат q, u, v так, чтобы S совпадала с частью координатной поверхности $q = q_0 = \text{const}$. Пусть связь декартовых координат с криволинейными даётся формулами

$$x = x(q, u, v), \quad y = y(q, u, v), \quad z = z(q, u, v).$$

Декартовы x, y, z и криволинейные u, v координаты, относящиеся к точке истока P , обозначим соответственно через ξ, η, ζ и τ, ν . Вектор плотности тока $\vec{j}$ в этой системе имеет лишь две составляющие:

$$\vec{j}(u, v) = \vec{u}_o j_u(u, v) + \vec{v}_o j_v(u, v).$$

Векторное уравнение (2) эквивалентно системе из двух скалярных уравнений вида

$$\begin{cases} \lim_{M \rightarrow M_0} \iint_S (j_u h_u K_u^\tau + j_v h_v K_u^\nu) d\tau d\nu = E_u^o|_{M_0}; \\ \lim_{M \rightarrow M_0} \iint_S (j_u h_u K_v^\tau + j_v h_v K_v^\nu) d\tau d\nu = E_v^o|_{M_0}; \end{cases} \quad (4)$$

$M \in S,$

где

$$K_p^\varphi = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[-\frac{1}{l_p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial \psi} + k^2 (\vec{p}^o, \vec{\psi}^o) h_\psi G \right],$$

$$h_\psi = \sqrt{(\xi'_\psi)^2 + (\eta'_\psi)^2 + (\zeta'_\psi)^2}, \quad \psi = \nu, \tau,$$

$$l_p = \sqrt{(x'_p)^2 + (y'_p)^2 + (z'_p)^2}, \quad p = u, v.$$

Пусть для простоты граница поверхности S совпадает с координатными линиями переменных u, v и для $M \in S$ выполняются соотношения $u_n < u < u_k, v_n < v < v_k$. Разобьем отрезок $[u_n, u_k]$ на n_u частей и обозначим через u_{i-1} начальную, а через u_i - конечную координату i -го интервала разбиения, $i = 1, \dots, n_u$. Аналогично для отрезка $[v_n, v_k]$ введем величины v_{j-1} и v_j , $j = 1, \dots, n_v$. Поверхность S , таким образом, разбита на $n_u \cdot n_v$ элементов ΔS_{ij} . Будем искать решения $j_u(u, v)$ и $j_v(u, v)$ уравне-

ний (4) в виде разложений по базисным функциям $F_{ij}^u(u, v)$ и $F_{ij}^v(u, v)$ с неизвестными коэффициентами J_{ij}^u и J_{ij}^v . Для определения коэффициентов J_{ij}^u и J_{ij}^v воспользуемся методом коллокации. Алгоритм численного решения оказывается наиболее простым в случае аппроксимации функций j_u и j_v следующего вида:

$$\begin{aligned} k\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} j_u(u, v) &= \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} J_{ij}^u \frac{1}{l_v(u, v)} \Psi_{ij}^u(u, v), \\ k\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} j_v(u, v) &= \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} J_{ij}^v \frac{1}{l_u(u, v)} \Psi_{ij}^v(u, v), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\Psi_{ij}^{u,v}(u, v) = \begin{cases} 1, & M(u, v) \in \Delta S_{ij}, \\ 0, & M(u, v) \notin \Delta S_{ij}. \end{cases} \quad (6)$$

Заменяя в уравнениях (4) составляющие плотности токов их представлениями (5), (6), получаем соотношения

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} J_{ij}^u T_{ij}^{uu}(M) + J_{ij}^v T_{ij}^{vu}(M) = E_u^o(M_o), \\ \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} J_{ij}^u T_{ij}^{uv}(M) + J_{ij}^v T_{ij}^{vv}(M) = E_v^o(M_o), \end{cases} \quad (7)$$

где

$$T_{ij}^{pp} = \frac{1}{4\pi k} \lim_{M \rightarrow M_o} \left[-\frac{1}{l_p} \int_p^{u_i} \int_{v_{j-1}}^{v_j} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial \psi} d\tau dv + k^2 \int_{u_{i-1}}^{u_i} \int_{v_{j-1}}^{v_j} (\bar{p}^o, \bar{\psi}^o) h_{\psi} G d\tau dv \right], \quad (8)$$

$$p = u, v; \psi = \tau, v$$

Как видно из (8), первый двукратный интеграл в квадратных скобках этого выражения, в котором при $M \in S$ появилась бы неинтегрируемая особенность, допускает аналитическое вычисление по u в случае $\psi = \tau$ и по v в случае $\psi = v$ даже при произвольной форме поверхности S . Это оказалось возможным благодаря записи интегрального уравнения, имеющего смысл граничных условий для электрического поля, в форме (2). Однократный интеграл, получающийся из первого слагаемого в правой части формулы (8), не содержит особенностей в подынтегральном выражении, если выполняются естественные требования, чтобы размеры элемента ΔS_{ij} были конечны и точка M_o не лежала на его границе.

Выполняя указанные выше преобразования, получаем выражение для

величин T_{ij}^{wp} , позволяющих найти вторичное электрическое поле, удобные для вычислений при произвольном положении точки M , в том числе и при $M \in S$. Эти выражения имеют следующий вид:

$$T_{ij}^{vp} = \frac{i}{4\pi} \frac{1}{kl_p} \left[\int_{v_{j-1}}^{v_j} \frac{\partial G}{\partial p} \Big|_{u_i} dv + k^2 \int_{u_{i-1}}^{u_i} \int_{v_{j-1}}^{v_j} G(\vec{p}^o, \vec{\tau}^o) l_p h_\tau d\tau dv \right],$$

$$T_{ij}^{vp} = \frac{i}{4\pi} \frac{1}{kl_p} \left[\int_{u_{i-1}}^{u_i} \frac{\partial G}{\partial p} \Big|_{v_j} d\tau + k^2 \int_{u_{i-1}}^{u_i} \int_{v_{j-1}}^{v_j} G(\vec{p}^o, \vec{v}^o) l_p h_v d\tau dv \right],$$

$$p = u, v;$$

где функции $\frac{\partial G}{\partial p}$ и $(\vec{p}^o, \vec{v}^o) l_p h_v$ легко выражаются аналитически.

Помещая точку наблюдения M_o в середину каждого из элементов ΔS_{ij} , обычным образом получаем из (7) систему линейных алгебраических уравнений порядка $N = 2 n_u n_v$ относительно неизвестных J_{ij}^u и J_{ij}^v :

$$\begin{vmatrix} J^u \\ J^v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} T^{uu}(M_o) & T^{vu}(M_o) \\ T^{uv}(M_o) & T^{vv}(M_o) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_u^o(M_o) \\ E_v^o(M_o) \end{vmatrix}. \quad (9)$$

После решения этой системы и определения неизвестных J_{ij}^u и J_{ij}^v можно найти различные характеристики электрического поля, получив таким образом решение рассматриваемой задачи.

Поверхности вращения – векторные задачи. Если анализируемая поверхность образована вращением контура Γ (в общем случае незамкнутого) вокруг некоторой оси, задача может быть сведена, помимо двумерных уравнений (4), к системам из двух одномерных уравнений путем разложения рассматриваемых величин в ряды Фурье вида

$$W(q, u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} W_c^{(m)}(q, u) \cos(mv) + W_s^{(m)}(q, u) \sin(mv).$$

Во многих случаях использование таких одномерных уравнений дает большую выгоду – например, когда ряд Фурье, определяющий первичное поле, быстро сходится или состоит из конечного числа гармоник. В частности, при распространении плоской волны вдоль оси вращения в первичном, а, следовательно, и во вторичном поле отличны от нуля лишь первые гармоники, и задача сводится к одной системе из двух одномерных уравнений. К этому же типу относятся поля элементарных диполей, расположенных на оси вращения перпендикулярно ей.

Приведем систему уравнений [4] для произвольного номера гармоники m . В качестве криволинейных координат в данном случае удобно

выбрать систему q, t, ψ , связанную с системой цилиндрических координат r, φ, z , ось z которой совпадает с осью вращения, формулами

$$r = r(q, t), \quad z = z(q, t), \quad \varphi = \psi.$$

На поверхности S

$$r(q_o, t) = \rho(t), \quad z(q_o, t) = \zeta(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

В координатах q, t, ψ составляющие плотности токов могут быть представлены в виде

$$j_v(\tau, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} j_{vc}^{(m)}(\tau) \cos(m\varphi) + j_{vs}^{(m)}(\tau) \sin(m\varphi)$$

При этом интегральное уравнение задачи (2) распадается на независимые друг от друга системы, состоящие из двух уравнений, связывающих либо компоненты $j_{\tau c}^{(m)}(\tau)$ и $j_{\varphi s}^{(m)}(\tau)$, либо $j_{\tau s}^{(m)}(\tau)$ и $j_{\varphi c}^{(m)}(\tau)$.

Система уравнений для компонент $j_{\tau c}^{(m)}(\tau)$ и $j_{\varphi s}^{(m)}(\tau)$ имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow M_o} \left\{ \frac{1}{l_t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} [j_{\tau c}^{(m)}(\tau) \tilde{K}_{\tau\tau}^{(m)} + j_{\varphi s}^{(m)}(\tau) \tilde{K}_{\varphi\tau}^{(m)}] d\tau + \right. \\ & \left. \int_{\alpha}^{\beta} [j_{\tau c}^{(m)}(\tau) K_{\tau\tau}^{(m)} + j_{\varphi s}^{(m)}(\tau) K_{\varphi\tau}^{(m)}] d\tau \right\} = -E_{\tau c}^{o(m)}(q_o, t), \\ & \lim_{M \rightarrow M_o} \left\{ \frac{1}{l_t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} j_{\tau c}^{(m)}(\tau) \tilde{K}_{\tau\varphi}^{(m)} d\tau + \int_{\alpha}^{\beta} [j_{\tau c}^{(m)}(\tau) K_{\tau\varphi}^{(m)} + j_{\varphi s}^{(m)}(\tau) K_{\varphi\varphi}^{(m)}] d\tau \right\} = \\ & = -E_{\varphi s}^{o(m)}(q_o, t), \\ & \alpha \leq t \leq \beta. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Ядра системы (10) выражаются через специальные функции

$$S_m = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \frac{\exp[-ik\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \beta + (z - \zeta)^2}]}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \beta + (z - \zeta)^2}} \cos n\beta d\beta$$

формулами

$$\tilde{K}_{\tau\tau}^{(m)} = \rho b \frac{\partial S_m}{\partial \tau}, \quad \tilde{K}_{\varphi\tau}^{(m)} = -bm h_{\tau} S_m, \quad \tilde{K}_{\tau\varphi}^{(m)} = -\frac{bn\rho}{r} \frac{\partial S_m}{\partial t},$$

$$K_{\tau\tau}^{(m)} = \frac{k^2 b \rho}{l_{\tau}} (z'_{\tau} \rho'_{\tau} S_m + r'_{\tau} \rho'_{\tau} S_{+}), \quad K_{\varphi\tau}^{(m)} = \frac{k^2 b \rho}{l_{\tau}} r'_{\tau} S_{-},$$

$$K_{\tau\varphi}^{(m)} = k^2 b \rho \rho'_{\tau} S_{-}, \quad K_{\varphi\varphi}^{(m)} = bh_{\tau} \left(\frac{m^2}{r} S_m - k^2 \rho S_{+} \right), \quad S_{\pm} = \frac{1}{2} (S_{m-1} \pm S_{m+1}),$$

$$b = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad l_\tau = \sqrt{(r'_i)^2 + (z'_i)^2}, \quad h_\tau = \sqrt{(\rho'_i)^2 + (\zeta'_i)^2}.$$

Если искать одномерные функции $j_{\tau c}^{(m)}(\tau)$ и $j_{\varphi s}^{(m)}(\tau)$ в виде разложения

$$j_{\tau c}^{(m)}(\tau) = \sum_{i=1}^{n_\tau} J_i^\tau \Psi_i^\tau(\tau), \quad j_{\varphi s}^{(m)}(\tau) = \sum_{i=1}^{n_\varphi} J_i^\varphi \Psi_i^\varphi(\tau),$$

для нахождения неизвестных постоянных J_i^τ и J_i^φ получается система линейных алгебраических уравнений размера $2N \times 2N$:

$$\begin{vmatrix} J^\tau \\ J^\varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} T''(M_o) & T^{\varphi l}(M_o) \\ T^{l\varphi}(M_o) & T^{\varphi\varphi}(M_o) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{lc}^{o(m)} \\ E_{\varphi s}^{o(m)} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

коэффициенты которой в случае кусочно-постоянной аппроксимации, когда

$$\Psi_i^\tau = \Psi_i^\varphi = \begin{cases} 1, & \tau \in [t_{i-1}, t_i], \\ 0, & \tau \notin [t_{i-1}, t_i], \end{cases}$$

где $t_i = \alpha + i\Delta t$, $i = 0, 1, \dots, N$, $\Delta t = (\beta - \alpha)/N$ – интервал разбиения контура Γ , определяются выражениями

$$\begin{aligned} T^{\tau\tau} = & -b \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ \frac{S_m}{2rl_t} (g[2\rho_\tau'' + (\rho'_\tau)^2] + \rho'_\tau [2\rho \frac{\partial}{\partial \tau} (\frac{d_M}{d_p}) + r'_\tau] - \right. \\ & \left. - 2k^2 \rho z'_\tau \zeta'_\tau) + \frac{k^2 \rho \rho'_\tau}{l_t} [\frac{\rho'_\tau g - r'_\tau}{2l} S_- - r'_\tau S_+] \right\} d\tau - \frac{b}{l_t} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \tau} S_m - \frac{\rho}{r} \rho'_\tau g S_m \right] \Big|_{\tau=t_{i-1}}^{\tau=t_i}, \\ T^{\varphi\tau} = & -b \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ \frac{m}{2rl_t} (2\rho \frac{\rho'_\tau \rho_\tau'' + \zeta'_\tau \zeta_\tau''}{h_\tau} + h_\tau \rho'_\tau) g S_m + \frac{nh_\tau}{2rl_t} [2\rho \frac{\partial}{\partial \tau} (\frac{d_M}{d_p}) + r'_\tau] S_m + \right. \\ & \left. + \frac{k^2 \rho h_\tau}{2l_t} (r' - \rho'_\tau g) S_- \right\} d\tau + \frac{mb}{rl_t} [h_\tau \rho g S_m] \Big|_{\tau=t_{i-1}}^{\tau=t_i}, \\ T^{\tau\varphi} = & \frac{mb}{r} (\rho S_m) \Big|_{\tau=t_{i-1}}^{\tau=t_i} - b \int_{t_{i-1}}^{t_i} (m \frac{S_m}{r} + k^2 \rho S_-) \rho'_\tau d\tau, \\ T^{\varphi\varphi} = & -b \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\frac{m^2}{r} S_m - k^2 \rho S_+) h_\tau d\tau, \\ d_m = & r'_\tau [r^2 - \rho^2 - (\zeta - z)^2 + 2r \rho z'_\tau (z - \zeta)], \\ d_p = & \rho'_\tau [\rho^2 - r^2 - (\zeta - z)^2 + 2r \rho \zeta'_\tau (\zeta - z)]. \end{aligned}$$

Система (11) позволяет рассматривать объекты значительно больших размеров, чем система (7), соответствующая произвольной поверхности, так как N точек коллокации достаточно расположить в этом случае лишь вдоль контура Γ образующей объекта, а не на всей его поверхности.

Поверхности вращения – двумерные осесимметричные задачи. Когда возбуждающее поле обладает осевой симметрией, система (10) распадается на два независимых друг от друга уравнения. При этом первое уравнение системы сводится к гиперсингулярному одномерному интегральному уравнению, а второе – к одномерному интегральному уравнению с логарифмической особенностью ядра. Выражения для вычисления коэффициентов матрицы при численном решении этих уравнений следуют из приведенных соотношений для T^{rr} и $T^{\varphi\varphi}$ как частные случаи при $m=0$. По сравнению с соответствующей векторной задачей матрицы, получающиеся при дискретизации этих уравнений, имеют вдвое меньший порядок.

Цилиндрические поверхности. Векторные задачи. Рассмотрим возбуждение цилиндрической поверхности S , бесконечно протяженной вдоль образующей, произвольным (трехмерным) электромагнитным полем $\vec{E}^o$, $\vec{H}^o$. Такого типа задачи возникают при анализе полей, создаваемых источниками конечных размеров, расположенными вблизи цилиндрических объектов, длина которых много больше их поперечных размеров и длины волны.

В качестве криволинейных ортогональных координат возьмем систему, ось которой параллельна образующей поверхности S и совпадает с осью Z декартовой системы координат x, y, z . Пусть переменные x и y связаны с q и t соотношениями

$$x = x(q, t), \quad y = y(q, t).$$

На поверхности S

$$q = q_o = \text{const}, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

$$x = x(q_o, t) = \xi(t), \quad y = y(q_o, t) = \eta(t).$$

Под воздействием поля $\vec{E}^o$, $\vec{H}^o$ на S наводятся электрические токи, вектор плотности которых в общем случае имеет две составляющие $j_i(t, z)$ и $j_z(t, z)$.

В [5] показано, что рассматриваемая задача может быть сведена к двум уравнениям для образов Фурье $J_i(t, \nu)$ и $J_z(t, \nu)$ компонент плотности токов $j_i(t, z)$ и $j_z(t, z)$:

$$\lim_{q \rightarrow q_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} J_i(\tau, \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} H_2^{(0)}(\gamma L) d\tau \right] - \gamma^2 \int_{\alpha}^{\beta} J_i(\tau, \nu) s_o(t, \tau) H_2^{(0)}(\gamma L_o) d\tau =$$

$$= -4i \frac{h_i(t)}{h_q(t)} \lim_{q \rightarrow q_0} \frac{\partial \bar{H}_z^o(q, t, \nu)}{\partial q}, \quad (12)$$

$$\gamma^2 \int_{\alpha}^{\beta} J_z(\tau, \nu) h_t(t, \tau) H_2^{(0)}(\gamma L_o) d\tau =$$

$$= 4\omega \varepsilon \bar{E}_z^o(q_o, t, \nu) - i\nu \lim_{q \rightarrow q_0} \int_{\alpha}^{\beta} J_i(\tau, \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} H_2^{(0)}(\gamma L) d\tau, \quad (13)$$

$$\alpha \leq t \leq \beta, \gamma \neq 0.$$

где $\bar{E}_z^o(q_o, t, \nu)$ и $\bar{H}_z^o(q_o, t, \nu)$ – продольные составляющие образов Фурье векторов $\bar{E}^o$ и $\bar{H}^o$, $H_n^{(2)}(w)$ – функция Ханкеля второго рода n -го порядка;

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \nu^2}, \operatorname{Im} \gamma < 0, L = L(q, t, \tau) = \sqrt{[x(q, t) - \xi(q, t)]^2 + [y(q, t) - \eta(q, t)]^2},$$

$$L_o = L(q_o, t, \tau), s_o = \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \frac{\partial \xi(\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} \frac{\partial \eta(\tau)}{\partial \tau},$$

$$h_x(t) = l_x(q_o, t), l_p(q, t) = \sqrt{(\chi_p')^2 + (y_p')^2},$$

Систему уравнений (12) и (13) можно решать последовательно: вначале из (12) следует определить $J_i(t, \nu)$, а затем из (13) найти $J_z(t, \nu)$. Для вычисления составляющих $j_i(t, z)$ и $j_z(t, z)$ плотности токов, наведенных на S , и расчета различных характеристик поля нужно определить зависимость $J_i(t, \nu)$ и $J_z(t, \nu)$ от параметра и затем осуществить обратное преобразование Фурье путем численного интегрирования по ν .

Цилиндрические поверхности. Плоские двумерные задачи. В частном случае, когда первичное поле не зависит от переменной z (двумерная задача) общая задача дифракции на цилиндрической поверхности распадается на две более простые, в одной из которых образующим цилиндрической поверхности параллелен вектор $\bar{E}^o$ (E -поляризация), а в другой – вектор $\bar{H}^o$ (H -поляризация). В случае E -поляризации задача сводится к уравнению с логарифмической особенностью ядра, в настоящее время хорошо известному и подробно исследованному (см., напр., [1]).

В случае H -поляризации наведенные на S токи имеют только составляющую $j_i(t)$ и описанная выше методика приводит [6] к уравнению

$$\lim_{q \rightarrow q_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} j_t(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} H_2^{(0)}(kL) d\tau \right] -$$

$$-k^2 \int_{\alpha}^{\beta} j_t(\tau, \nu) s_0(t, \tau) H_2^{(0)}(kL_0) d\tau = -4\omega \varepsilon h_t(t) E_t^0(t), \quad (14)$$

$$\alpha \leq t \leq \beta.$$

При $\nu = 0$ уравнение (12) эквивалентно (14). Это легко показать, используя вытекающее из уравнений Максвелла равенство

$$\frac{i}{h_q(t)} \frac{\partial H_z^0}{\partial q} = E_t^0 + \frac{\nu}{\omega \varepsilon} H_q^0.$$

Аналогично, уравнение (13) при $\nu = 0$ эквивалентно интегральному уравнению двумерной задачи в случае E -поляризации.

Рассмотрим вопрос о численном решении уравнения (14). Будем искать плотность тока j_t в виде разложения

$$j_t(t) = \sum_{i=1}^N I_i \Psi_i(t),$$

где

$$\Psi_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ 0, & t \notin [t_{i-1}, t_i]. \end{cases}$$

В этом случае для определения неизвестных I_i получаем систему

$$\|I\| \cdot \|T\| = 4 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |h_t E_t^0|, \quad (15)$$

коэффициенты которой определяются формулами

$$T_i(t) = D(t, t_i) - D(t, t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} s_0(t, \tau) H_0^{(2)}[kL_0(t, \tau)] d\tau, \quad (16)$$

где

$$D(t, \tau) = \frac{[\xi(t) - \xi(\tau)] \xi'(t) - [\eta(t) - \eta(\tau)] \eta'(t)}{L_0} H_1^{(2)}(kL_0),$$

$$t = t_{p-1/2} = \alpha + (p - \frac{1}{2})\Delta t, \quad p = 1, 2, \dots, N.$$

Поверхности с анизотропной проводимостью. Рассмотрим задачу дифракции на поверхностях с анизотропной проводимостью следующего типа: в каждой точке поверхности имеется направление, в котором она обладает идеальной ($\sigma = \infty$) проводимостью, а во всех других является непроводящей. Поверхностями такого типа удобно аппроксимировать на-

бранные из проволок отражатели и т.п.

При использовании изложенной методики решение задачи для анизотропной поверхности не только не становится более громоздким по сравнению с идеальным проводником, но, напротив, заметно упрощается.

Выберем систему q, u, v так, чтобы на поверхности S параметр u изменялся по линиям, вдоль которых $\sigma = \infty$. Очевидно, что в этой системе вектор плотности тока $\vec{j}$ имеет лишь одну составляющую:

$$\vec{j}(u, v) = \vec{u}^o j(u, v).$$

Поступая аналогично тому, как это делалось при анализе задачи для идеального проводника, получаем вместо системы (4) одно скалярное уравнение вида [7]

$$\lim_{M \rightarrow M_o} \iint_S j K d\tau dv = E_u^o(M_o), \quad M_o \in S, \quad (17)$$

где

$$K = \frac{i\hbar}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[-\frac{1}{l_i} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial \tau} + k^2 (\vec{u}^o, \vec{\tau}^o) h_\tau G \right].$$

Используя аппроксимацию функции j вида

$$j(u, v) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} J_{ij} \frac{1}{h_v(u, v)} \Psi_{ij}(u, v),$$

где

$$\Psi_{ij}(u, v) = \begin{cases} 1, & P \in \Delta S_{ij}, \\ 0, & P \notin \Delta S_{ij}, \end{cases}$$

приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\|J\| \cdot \|T\| = \|E_u^o(M_o)\|, \quad M_o \in S, \quad (18)$$

с коэффициентами

$$T_{ij} = \frac{i}{4\pi} \frac{1}{kl_u} \left[- \int_{v_{j-1}}^{v_j} \frac{\partial G}{\partial u} \Big|_{u_i} dv + k^2 \int_{u_{i-1}}^{u_i} \int_{v_{j-1}}^{v_j} G(x'_u \xi'_\tau + y'_u \eta'_\tau + z'_u \zeta'_\tau) d\tau dv \right],$$

По сравнению с соответствующей задачей для идеального проводника система (19) имеет вдвое меньший порядок.

Численные результаты. На основе описанной методики в период с начала 80-х годов было решено большое количество конкретных задач. В качестве примеров можно отметить плоские цилиндрические задачи для кругового и параболического цилиндров [8-10], задачи для решеток из цилиндрических поверхностей [11-16], векторные задачи для поверхно-

стей вращения [10,17-19], векторные задачи для трехмерных поверхностей различной формы [2,20-25]. При решении трехмерных задач существенный выигрыш позволяет получить использование симметрии анализируемых объектов ([20] и особенно [23]).

В настоящее время разработан комплекс программ «EDEM» [26] для автоматизированного исследования электродинамических свойств объектов, которые могут быть аппроксимированы набором проводящих экранов произвольной формы. Реализовано решение задач шести типов. К ним относятся векторные трехмерные задачи (решаются уравнения (4)), векторные задачи для поверхностей вращения и первой Фурье-компоненты возбуждающего поля (уравнения (10) при $m=1$), осесимметричные задачи для Н- и Е поляризации (уравнения, на которые распадается система (10) при $m=0$), плоские двумерные задачи для Н- и Е-поляризации (уравнение (14) и уравнение с логарифмической особенностью ядра [1]).

Комплекс реализован для IBM-совместимых компьютеров и представляет собой многооконную диалоговую систему. На начальном этапе анализа задачи на простом языке, приближенном к используемому в учебной и научно-технической литературе, создается исходное задание. В нем задаются объекты, которые могут состоять из проводящих пластин в виде треугольников, полос, прямоугольников, дисков, колец, спиралей, винтовых поверхностей и т.д., а также источники возбуждения - плоские волны, точечные источники, линейные вибраторы. Блок обработки задания, контролируя возможные ошибки, строит исходную модель. После создания модели строится сетка, состоящая из четырехугольных или треугольных элементов. Такие элементы позволяют сочетать возможность аппроксимации объектов практически любой формы с достаточным быстродействием при решении интегральных уравнений. Затем решаются уравнения и находится распределение наведенных токов. После этого в соответствии с заданием рассчитываются необходимые характеристики полей. При этом могут быть вычислены распределения составляющих полей вдоль тех или иных линий, рассчитаны двумерные рельефы полей, найдены использующиеся в антенной технике вторичные характеристики

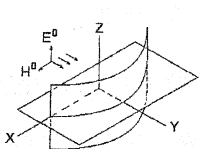
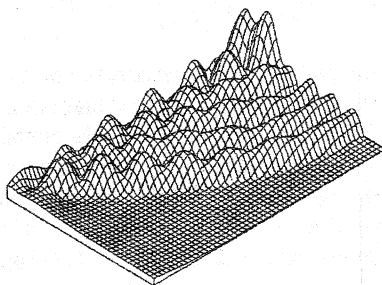


Рис. 1



– такие, как полная излученная энергия, поляризационные характеристики, к.н.д., входные импедансы различных структур. Большое внимание уделено визуализации полученных результатов. Найденные распределения плотностей токов могут изображаться в виде линейных диаграмм, в трехмерных задачах – также в виде карты амплитуд и с помощью получившей в настоящее время распространение цветовой шкалы. В этом случае поверхность рассеивателей отображается тем или иным оттенком цвета в зависимости от амплитуды наведенных в той или иной области токов. Отображение распределения компонент полей реализовано в виде линейных диаграмм, в виде двумерных рельефов или с помощью цветовой шкалы, а также с помощью комбинации этих способов.

Далее приведен ряд примеров решения, полученных с помощью этого комплекса.

На рис.1 показаны результаты решения трехмерной задачи для параболического цилиндра конечных размеров. Раскрыв параболы имеет размер 10 длин волн, отношение фокусного расстояния к величине раскрыва 0.25. Высота параболического цилиндра составляет 6 длин волн. На рисунке приведен рельеф распределения Z-составляющей электрического поля в плоскости XOZ. при фронтальном падении плоской волны. При решении была использована симметрия задачи – уравнения записывались по $\frac{1}{4}$ поверхности параболического цилиндра.

На рис.2 изображен двухчастотный облучатель зеркальной антенны для циркулярно-поляризованного поля с отношением частот $f_H/f_B = 4.8$. Облучатель предназначен для работы с параболическим рефлектором, имеющем отношение фокусного расстояния к диаметру $f/D=0.6$. Поле на низшей частоте формируется спиральным излучателем, на высшей – рупорным. Источник питания рупорного излучателя – круглый волновод с суперпозицией волн H_{11} ; обеспечивающей круговую поляризацию, спираль возбуждается точечным источником на нижнем конце. Расчеты по-

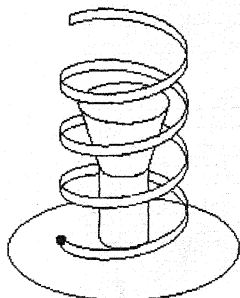
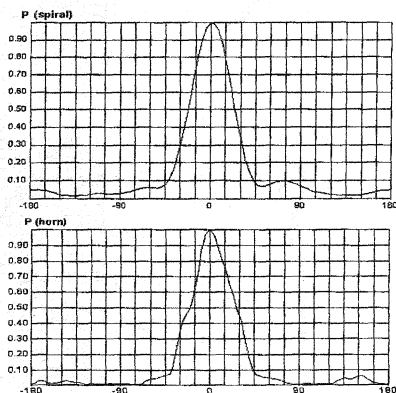


Рис.2



казывают, что при таком совмещении существенно изменяются характеристики излучения спирали, рассчитанные без учета влияния рупора, в частности, значительно ухудшается коэффициент эллиптичности. Характеристики излучения можно, однако, восстановить путем коррекции параметров спирали с учетом влияния рупора, при этом оказывается, что коэффициент эллиптичности можно даже несколько повысить по сравнению со случаем одиночной спирали.

Приведенные диаграммы направленности показывают распределения вектора Пойнтинга на низшей (источник возбуждения - спираль) и высшей (источник возбуждения - рупор) частотах, полученные после совмещения фазовых центров рупорного и спирального облучателей и оптимизации их конструктивных параметров. Коэффициент эллиптичности излучения в прямом направлении для обеих частот не хуже 0.82.

На рис.3 показаны результаты решения векторной задачи для поверхностей вращения (уравнения (10)) с возбуждающим полем, имеющим только первую азимутальную гармонику. Исследовалось поле рупора с гофрированными стенками. Контур сечения рупора показан на рисунке (длина стороны клетки равна длине волны) Гофрированные стенки позволяют свести к минимуму различие между диаграммами направленности рупора в Е- и Н-плоскостях путем соответствующего выбора параметров гофра. Для сравнения приведены также диаграммы рупора с гладкими стенками с тем же углом раствора.

Как видно, диаграмма направленности гофрированного рупора практически осесимметрична в секторе углов от оси до 50° , а уровень боковых

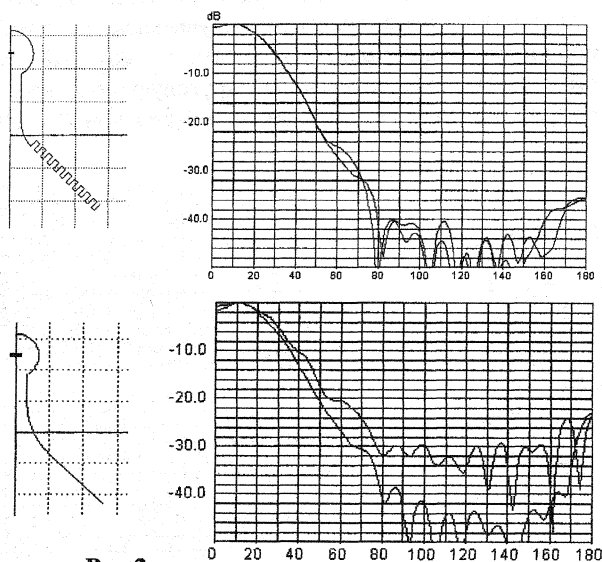


Рис.3

лепестков в плоскости Е существенно ниже, чем для рупора с гладкими стенками.

На рис.4 показаны результаты расчета входного сопротивления вибратора уголкового антенны с рефлектором, пластины которого имеют размеры $\lambda \times \lambda$. На графиках показана зависимость входного сопротивления от расстояния S между вибратором и ребром рефлектора. Для каждого значения S длина рефлектора подбиралась таким образом, чтобы входное со-

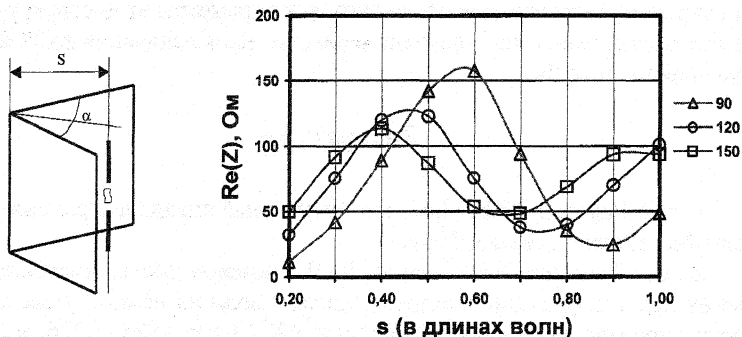


Рис.4

противление было чисто активным ($\text{Im}(Z)=0$). Данные приведены для трех значений угла α раскрыва рефлектора: $\alpha=90^\circ$, $\alpha=120^\circ$ и $\alpha=150^\circ$.

На рис.5 изображена структура, представляющая собой решетку, используемую в многоэлементной антенне, и в более крупном масштабе — отдельный ее элемент. Возбуждаемая на конце двухполосная линия расположена на небольшой высоте над идеально проводящей плоскостью и закрыта экраном, причем щель между экраном и плоскостью металлизирована везде, за исключением небольшого участка для вывода полосковой

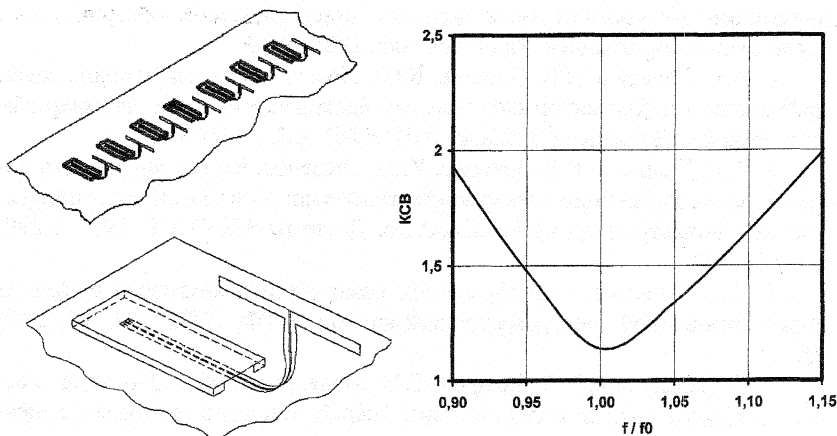


Рис.5

линии. Другой конец линии после плавного изгиба под прямым углом и поворота вокруг оси на 90^0 переходит в полосковый вибратор.

Особенность анализа этой задачи заключается в том, что поле в одних областях структуры (пространство под экраном) обладает спецификой, характерной для внутренних задач, а в других областях – для внешних. Рассматриваемая методика и программа «ЭДЭМ» позволяет успешно решать такого рода задачи. На графике показана зависимость от относительной частоты f/f_0 коэффициента стоячей волны (КСВ) в отрезке линии под экраном, рассчитанная после того, как параметры этой структуры были оптимизированы для получения минимального значения КСВ на центральной частоте f_0 .

Литература

1. Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. Численный анализ дифракции радиоволн. М., «Радио и связь», 1982.
2. А.Г. Давыдов, Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы. Доклады АН СССР, 1984, т.276, в.1, с.96-100.
3. Е.В. Захаров, А.Г. Давыдов, И.В. Халеева. Интегральные уравнения с ядрами типа Адамара в задачах дифракции. В кн.: Актуальные вопросы прикладной математики. М., Изд-во Московского ун-та, 1989, с.118-127.
4. А.Г. Давыдов, Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях вращения. Доклады АН СССР, 1983, т.269, в.2, с.329-333.
5. Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов, А.В. Данилов. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на цилиндрической поверхности с бесконечной образующей. Радиотехника, 1985, №10.
6. А.Г. Давыдов, Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких цилиндрических экранах. Доклады АН СССР, 1981, т.261, в.2, с.338-341.
7. А.Г. Давыдов, Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях с анизотропной проводимостью. Доклады АН СССР, 1985, т.280, в.2, с.333-337.
8. А.Г. Давыдов. О возбуждении незамкнутого кругового цилиндра Н-поляризованной электромагнитной волной. ЖТФ, 1982, т.52, в.1, с.92-95.
9. А.Г. Давыдов, Е.В. Захаров, Т.М. Мелешкина, Ю.В. Пименов. Расчет электромагнитных полей системы "параболический цилиндр с конеч-

ным раскрывом - магнитная токовая нить". В кн.: Численные методы электродинамики. Изд-во Моск. университета, 1983, с. 53-60.

10. А.Г. Давыдов, Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов, Ю.М. Тихонов. Численный анализ электромагнитных полей в ближней зоне параболического цилиндра и параболоида вращения. В кн.: Численные методы решения обратных задач математической физики. М., Изд-во Московского ун-та, 1988, с.119-127.

11. Ю.В. Пименов, М.Ю. Червенко. О дифракции плоской Н-поляризованной волны на многослойной решетке из параллельных полос. Радиотехника и электроника, 1988, т.33, №8.

12. Ю.В. Пименов, М.Ю. Червенко. Дифракция плоской волны на решетках прямоугольного профиля. Радиотехника, 1988, №7.

13. Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов, М.Ю. Червенко. Метод численного анализа дифракции Н-поляризованной плоской волны на периодической решетке из незамкнутых цилиндрических поверхностей // Радиотехника. - 1989. - № 8. - С. 69 - 72.

14. Ю.В. Пименов, М.Ю. Червенко. О дифракции плоской волны на решетках из параллельных полос // Радиотехника и электроника. - 1986, т. 31, 3 6, с. 1088 - 1094.

15. Ю.В. Пименов, М.Ю. Червенко. Структура токов, возникающих на полубесконечной решетке при дифракции плоской волны// радиотехника и электроника, 1990, т. 35, № 12, с. 2465 -2471.

16. Ю.В. Пименов, М.Ю. Червенко. Дифракция плоской электромагнитной волны на полубесконечной решетке// Радиотехника и электроника, 1991, т. 36, № 2, с. 253 - 259.

17. А.Г. Давыдов. Алгоритм численного решения задачи о произвольном возбуждении идеально проводящего диска. В кн.: Методы вычислительной электродинамики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981, с.71-84.

18. А.Г. Давыдов. Численный анализ электродинамических характеристик некоторых типов облучателей зеркальных антенн. Вычисл. математика и математ. обеспечение ЭВМ. М., Изд-во Моск. университета, 1985.

19. А.Г. Давыдов, А.И. Шалякин. О выборе параметров схемы усовершенствованной антенны Кассегрена. Радиотехника, 1985, в.8, с.40-44.

20. В.Г. Васильев, С.П. Васильева, А.Г. Давыдов. Расчет характеристик вынужденных электромагнитных колебаний в трехмерных резонаторных структурах методом интегральных уравнений. В кн.: Электронные пучки в ускоряющих и магнито-фокусирующих системах. Ташкент, изд-во "Фан" УзССР, 1990, с.57-73.

21. Ю.В. Пименов, Д.А. Ходьков. Излучение элементарного электрического вибратора, расположенного над плоским прямоугольным экраном. Радиотехника, 1990, №11.

22. Ю.В. Пименов, Д.А. Ходьков. Излучение элементарного электрического вибратора, расположенного над плоским прямоугольным экраном. Радиотехника, 1991, №7.

23. Е.В. Захаров, И.А. Загороднов, Р.П. Тарасов. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции на кубе. В кн.: Вестн. Моск. Ун-та. Сер.15, Вычислительная математика и кибернетика. 1998, №3, с.38-42.

24. А.Г. Давыдов, Ю.В. Пименов, Б.А. Пригода. Численный анализ спиральной антенны с осевым проводящим цилиндром. В кн.: Сборник научных трудов НПО им. С.А.Лавочкина,, в.2, М., 2000, с.184-190

25. А.Г. Давыдов, Б.А. Пригода. Анализ высоконаправленной многоспиральной антенны для системы глобальной спутниковой связи;; В кн.: 3-я Международная научно-техническая конференция «Космонавтика. Радиоэлектроника. Геоинформатика». Тезисы докладов. / Рязанская государственная радиотехническая академия. Рязань, 6-8 сентября 2000 г., с.233-236.

26. А.Г. Давыдов, Ю.В. Пименов. Программный комплекс EDEM3D для исследования электродинамических характеристик идеально проводящих трехмерных объектов. Электродинамика СВЧ и КВЧ, 1992, т.7, №2, с.24-26.