

Раздел I. Обратные задачи

А. М. Денисов,¹ С. И. Соловьева²

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ *

Обратные задачи для уравнения теплопроводности возникают при исследовании различных процессов в теплофизике, геофизике, физической химии, экологии и многих других сферах науки и техники. Этим задачам посвящено большое число публикаций, смотри, например [1]-[9] и имеющуюся там литературу.

Важный класс обратных задач для уравнения теплопроводности образуют задачи определения неизвестного источника по дополнительной информации о решении уравнения. Различные теоретические аспекты этих задач рассматривались в работах [10]-[18] и ряде других. Численному решению задач определения неизвестного источника в параболических уравнениях посвящены публикации [19]-[24]. Как правило, в задачах по определению неизвестного источника предполагается, что он определяется произведением двух функций, одна из которых неизвестна, а другая задана. Вместе с тем, возможны случаи, когда источник определяется несколькими неизвестными функциями. В данной работе исследуется обратная задача для уравнения теплопроводности с неизвестным источником, представляющим собой сумму нескольких пространственно-локализованных источников, интенсивности которых меняются со временем и неизвестны. В качестве дополнительной информации необходимой для определения неизвестных интенсивностей задаются значения температуры в некоторых точках, как функции времени.

Рассмотрим в полупространстве начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в полупространстве

$$u_t = \Delta u + F(x, y, z, t), \quad (x, y) \in R^2, \quad z > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, y, z, 0) = 0, \quad (x, y) \in R^2, \quad z > 0, \quad (2)$$

¹Профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: den@cs.msu.ru.

²Доцент факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: sol@cs.msu.ru.

*Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1621).

$$u_z(x, y, 0, t) = 0, \quad (x, y) \in R^2, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Решение задачи (1)-(3) определяется формулой

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} B(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) F(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau, \quad (4)$$

где

$$B(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) \left[\exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(z+\zeta)^2}{4(t-\tau)}\right) \right]$$

Пусть источник $F(x, y, z, t)$ представляет собой сумму пространственно локализованных источников, интенсивность которых изменяется во времени. В качестве модели подобного источника выберем функцию $F(x, y, z, t)$, определяемую формулой

$$F(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) \delta(z - z_j), \quad z_j > 0,$$

где $\delta(\xi - \xi_0)$ - дельта функция, сосредоточенная в точке ξ_0 . В этом случае формулу (4) можно переписать так

$$u(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t B_j(x, y, z, t, \tau) \varphi_j(\tau) d\tau \quad (5)$$

где

$$B_j(x, y, z, t, \tau) = \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{3/2}} B(x, y, z, t, x_j, y_j, z_j, \tau).$$

Сформулируем обратную задачу. Предположим, что точки $r_j = (x_j, y_j, z_j)$, в которых сосредоточены локализованные источники, известны, а функции $\varphi_j(t)$, описывающие изменения их интенсивностей во времени, неизвестны. Требуется определить функции $\varphi_j(t)$, если известна дополнительная информация о решении задачи (1)-(3) $u(x, y, z, t)$ в точках $\bar{r}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, 0)$, а именно

$$u(\bar{x}_i, \bar{y}_i, 0, t) = g_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где $\bar{r}_i$ - заданные точки, а $g_i(t)$ заданные функции.

Положив в формуле (5) $x = \bar{x}_i$, $y = \bar{y}_i$, $z = 0$ и используя условия (6), получим систему интегральных уравнений Вольтерра 1 рода для неизвестных функций $\varphi_j(t)$

$$\sum_{j=1}^n \int_0^t K_{ij}(t-\tau) \varphi_j(\tau) d\tau = g_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где ядра $K_{ij}(t)$ определяются так

$$K_{ij}(t) = \frac{2}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\bar{x}_i - x_j)^2 + (\bar{y}_i - y_j)^2 + z_j^2}{4t}\right)$$

Таким образом, рассматриваемая обратная задача сводится к системе интегральных уравнений первого рода (7).

Отметим некоторые свойства функций $K_{ij}(t)$. Продолжая $K_{ij}(t)$ по непрерывности при $t \rightarrow 0$ имеем $K_{ij}(0) = 0$ и $K_{ij} \in C[0, \infty)$. Кроме того $K_{ij}(t) > 0$ при $t > 0$ и $K_{ij}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Относительно неизвестных функций $\varphi_j(t)$ будем предполагать, что

$$\varphi_j \in C[0, \infty), \quad |\varphi_j(t)| \leq \text{const}, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Рассмотрим вопрос о единственности решения обратной задачи. Для этого достаточно исследовать единственность решения системы интегральных уравнений (7).

Начнем с простого, но важного примера. Пусть есть два источника, локализованных в точках $r_1 = (-1, 0, 1)$ и $r_2 = (1, 0, 1)$, а измерения проводятся в точках $(0, \bar{y}_i, 0)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Ядра $K_{ij}(t)$ в этом случае не зависят от $j = 1, 2$ и определяются формулой

$$K_{ij}(t) = \bar{K}_i(t) = \frac{2}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{2 + (\bar{y}_i)^2}{4t}\right).$$

Следовательно система (7) в этом случае имеет вид

$$\int_0^t \bar{K}_i(t - \tau) [\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)] d\tau = g_i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

и ее решение неединственно при любом m .

Приведенный пример показывает, что решение системы интегральных уравнений (7) может быть неединственно даже в случае, когда число точек наблюдения существенно превышает число источников. Этот же пример иллюстрирует зависимость единственности решения системы от расположения источников и точек наблюдения.

Получим условие, обеспечивающее единственность решения системы интегральных уравнений (7) в случае, когда число точек наблюдения равно числу источников, то-есть $m = n$.

Обозначим через ρ_{ij} расстояние между точкой наблюдения $\bar{r}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, 0)$ и точкой локализации источника $r_j = (x_j, y_j, z_j)$:

$$\rho_{ij} = \sqrt{(x_j - \bar{x}_i)^2 + (y_j - \bar{y}_i)^2 + (z_j)^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Введем функции $b_{ij}(p) = (2\pi\rho_{ij})^{-1} \exp(-\rho_{ij}\sqrt{p})$, $p > 0$. Рассмотрим при $p > 0$ функциональную матрицу $B(p) = \{b_{ij}(p)\}$. Обозначим через $D(p)$ определитель матрицы $B(p)$.

Теорема. Пусть $n = m \geq 1$ и существует $p_0 > 0$ такое, что $D(p_0) \neq 0$. Тогда решение системы интегральных уравнений (7) единственно в классе функций $\varphi_j(t)$, удовлетворяющих условиям (8).

Доказательство. Так как система интегральных уравнений (7) линейна, то для доказательства единственности ее решения достаточно доказать, что однородная система имеет только нулевое решение.

Пусть функции $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяют условиям (8) и являются решением системы интегральных уравнений

$$\sum_{j=1}^n \int_0^t K_{ij}(t-\tau) \varphi_j(\tau) d\tau = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Докажем, что $\varphi_j(t) = 0$, $t \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Применим к уравнениям (9) преобразование Лапласа. Учитывая то, что преобразование Лапласа от функции $K_{ij}(t)$ равно $b_{ij}(p)$ и используя теорему о преобразовании Лапласа от свертки функций, получим

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \varphi_j(p) = 0, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

где $\varphi_j(p)$ - преобразования Лапласа от функций $\varphi_j(t)$.

Система (10) при каждом фиксированном p представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\varphi_j(p)$. Рассмотрим ее в действительной окрестности действительной точки $p_0 > 0$. Так как $D(p_0) \neq 0$ и функция $D(p)$ непрерывна при $p > 0$, то существует интервал $(p_0 - \varepsilon, p_0 + \varepsilon)$ такой, что $D(p) \neq 0$, $\forall p \in (p_0 - \varepsilon, p_0 + \varepsilon)$. Тогда из системы (10) следует, что $\varphi_j(p) = 0$ для $p \in (p_0 - \varepsilon, p_0 + \varepsilon)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Так как выполнены условия (8), то все функции $\varphi_j(p)$, $j = 1, 2, \dots, n$ являются аналитическими функциями комплексной переменной в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Применяя теорему единственности для аналитических функций, получаем, что $\varphi_j(p) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ при $\operatorname{Re} p > 0$. Следовательно $\varphi_j(t) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ при $t \geq 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие теоремы легко проверяется при заданных положениях источников и точек наблюдения.

Замечание 2. Очевидно, что для приведенного выше примера неединственности решения обратной задачи в случае $n = m = 2$, $D(p) = 0$ при $p > 0$ для любых $\bar{y}_i$, $i = 1, 2$.

Приведем простой вариант выполнения условия теоремы.

Следствие. Если $n = m \geq 1$ и точки наблюдения расположены так, что для всех $i = 1, 2, \dots, n$ справедливы неравенства

$$\rho_{ii} < \rho_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq i, \quad (11)$$

то решение обратной задачи единственно.

Доказательство. Из определения $D(p)$ и условия (11) следует, что при $p \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика $D(p) = q(p) + o(q(p))$, где

$$q(p) = \left((2\pi)^n \prod_{i=1}^n \rho_{ii} \right)^{-1} \exp \left(-\sqrt{p} \sum_{i=1}^n \rho_{ii} \right).$$

Следовательно существует p_0 такое, что $D(p_0) \neq 0$ и решение обратной задачи единственно.

Условие (11) имеет простую интерпретацию. Для любого источника найдется точка наблюдения, расположенная к нему ближе чем ко всем остальным источникам.

Перейдем к методу численного решения рассматриваемой обратной задачи. Для его построения система линейных интегральных уравнений (7), в результате дискретизации и использования квадратурных формул, заменялась на систему линейных алгебраических уравнений $A\bar{\varphi} = \bar{g}$ для дискретных аналогов неизвестных функции $\varphi_j(t)$. Эта система линейных алгебраических уравнений, в силу некорректности исходной задачи, является плохо обусловленной и для ее решения применялся метод регуляризации Тихонова [25].

Приведем результаты некоторых вычислительных экспериментов по решению обратной задачи. Их схема была такова. Задавались точки локализации источников r_j и точки наблюдения $\bar{r}_i$, $j, i = 1, 2, \dots, 3$ так, что для них выполнены условия теоремы единственности. Также задавались интенсивности $\varphi_j(t)$. С заданными r_j и $\varphi_j(t)$ решалась задача (1)-(3) и вычислялись функции $g_i(t) = u(\bar{x}_i, \bar{y}_i, 0, t)$. Затем в эти функции вносилась погрешность и они использовались в качестве исходной информации для приближенного решения обратной задачи, то есть решения системы уравнений $A\bar{\varphi} = \bar{g}$. После этого результаты приближенного решения сравнивались с точными интенсивностями $\varphi_j(t)$.

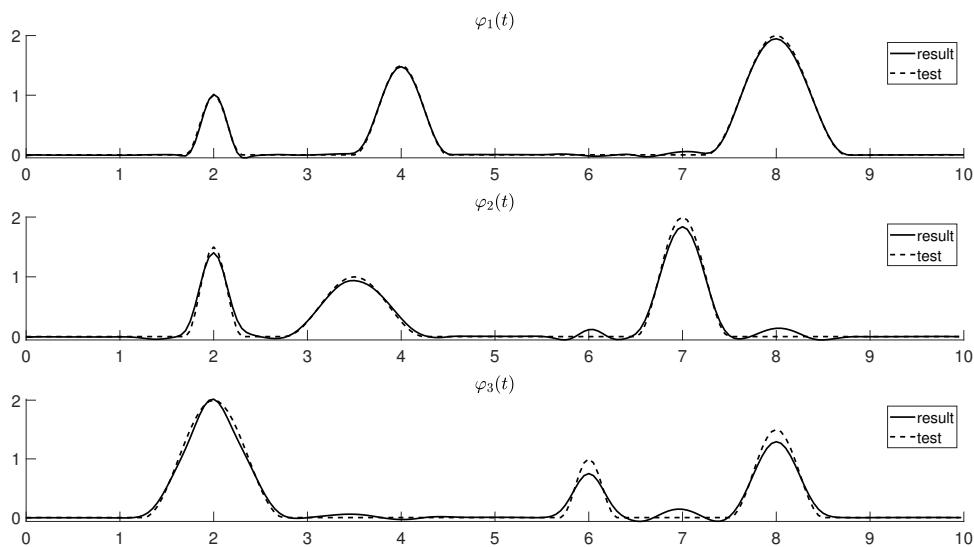


Рис. 1. $\delta = 0.01$

В первом вычислительном эксперименте источники находились в точках $r_1 = (2, 0, 1)$, $r_2 = (0, 0, 1.3)$, $r_3 = (0, 2, 1.5)$, а точки наблюдений в $\bar{r}_1 = (1, -1, 0)$, $\bar{r}_2 = (1, 1, 0)$, $\bar{r}_3 = (-1, 1, 0)$. Графики функций $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, 3$ изображены на рис.1. В данном эксперименте исследовалась зависимость приближенного решения обратной задачи от

точности задания исходной информации. В вектор $\bar{g}$ вносились погрешность и получался вектор $\bar{g}^\delta$ такой, что $\frac{\|\bar{g} - \bar{g}^\delta\|^2}{\|\bar{g}\|^2} = \frac{\sum_{k=1}^K (\bar{g}_k - \bar{g}_k^\delta)^2}{\sum_{k=1}^K (\bar{g}_k)^2} \leq \delta^2$. С вектором $\bar{g}^\delta$ решалась система линейных алгебраических уравнений, соответствующая методу регуляризации Тихонова и получалось приближенное решение $\bar{\varphi}^\delta$. Параметр регуляризации выбирался по методу невязки.

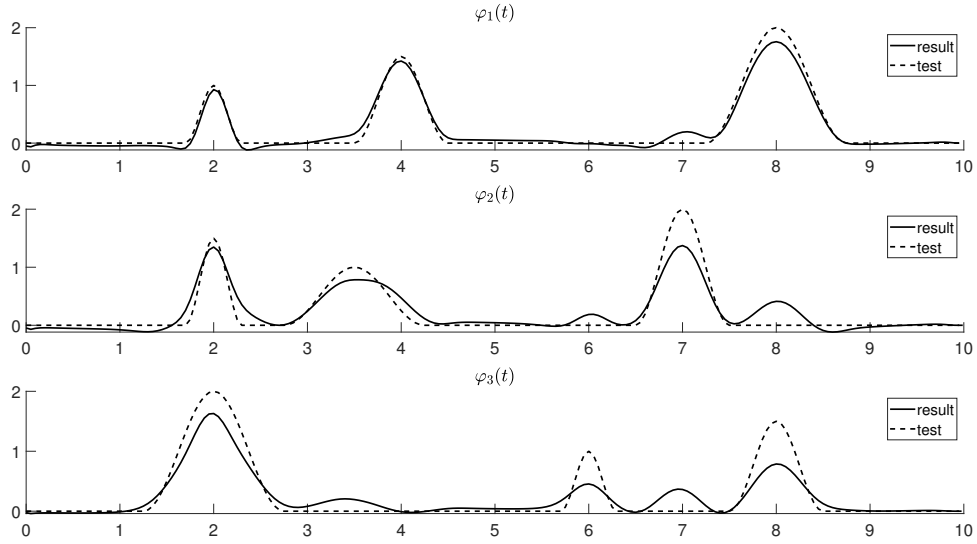


Рис. 2. $\delta = 0.1$

На рис.1 изображены точные функции (test) $\varphi_j(t)$ и приближенные решения (result) $\varphi_j^\delta(t)$, полученные в случае $\delta = 0.01$. На рис.2 изображены точные функции (test) $\varphi_j(t)$ и приближенные решения (result) $\varphi_j^\delta(t)$, полученные в случае $\delta = 0.1$.

Во втором эксперименте исследовалась точность решения обратной задачи для одного и того же уровня погрешности δ в зависимости от расположения точек наблюдения. Источники находились в точках $r_1 = (2, 0, 1)$, $r_2 = (0, 0, 1.3)$, $r_3 = (0, 2, 1.5)$. Погрешность $\delta = 0.01$.

На рис.3 приведены результаты вычислительного эксперимента, для точек наблюдений в $\bar{r}_1 = (1, -1, 0)$, $\bar{r}_2 = (1, 1, 0)$, $\bar{r}_3 = (-1, 1, 0)$.

На рис.4 приведены результаты вычислительного эксперимента, для точек наблюдений в $\bar{r}_1 = (4, 2, 0)$, $\bar{r}_2 = (0, 4, 0)$, $\bar{r}_3 = (0, -2, 0)$. Здесь точки наблюдений находятся дальше от источников по сравнению с предыдущим случаем.

Проведенные вычисления показывают, что, если погрешность в задании исходной информации не велика, а точки наблюдения $\bar{r}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, 0)$, находятся не слишком далеко от источников, то изменения интенсивностей локализованных определяются достаточно точно.

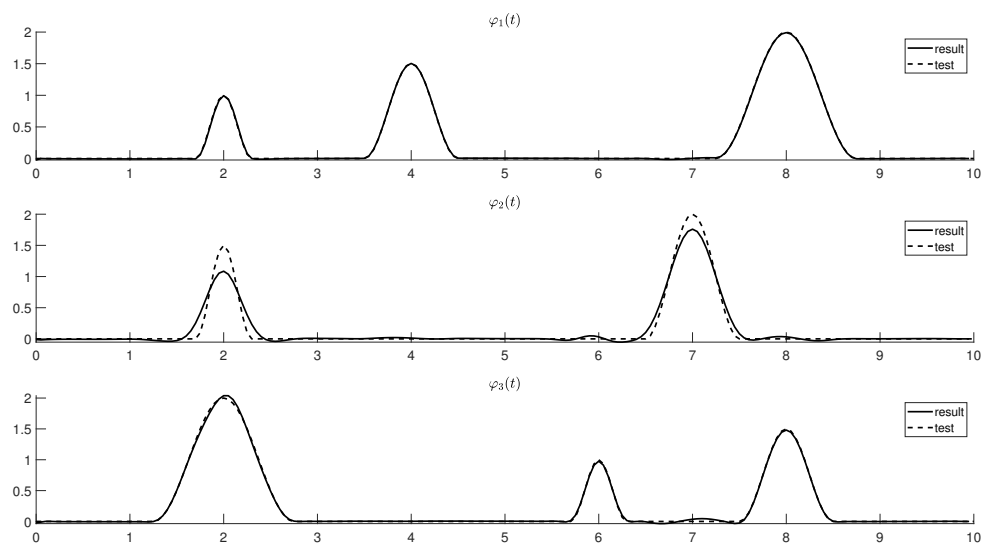


Рис. 3

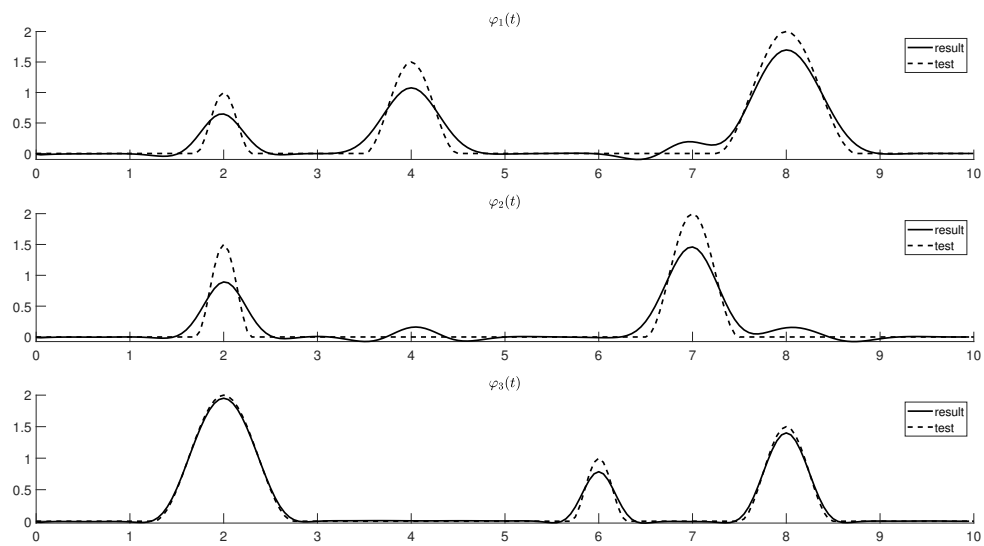


Рис. 4

Литература

1. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Доклады АН СССР. 1935. Т.1. № 5. С. 294-300.
2. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск, Наука. Сибирское отделение. 1980.
3. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. Москва. Наука. 1984.
4. *Алифанов О. М.* Обратные задачи теплообмена. Москва. Машиностроение. 1988
5. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. Москва. МГУ. 1994.
6. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. V.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. Marcel Dekker. New York. 2000.
7. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Springer. New York. 2006
8. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Сибирское научное издательство. Новосибирск. 2008.
9. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М., Издательство ЛКИ. 2009.
10. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука, 1969.
11. *Cannon J. R., Perez-Esteva S.* Uniqueness and stability of 3d heat sources // Inverse Problems. 1991 V.7. N 1. pp.57-62.
12. *Приленко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Математический сборник. 1992. Т.183. № 4. С.49-68.
13. *Cannon J. R., Du Chateau P.* Structural identification of an unknown source term in a heat equation // Inverse Problems. 1998 V.14. N 3. pp.535-551.
14. *Приленко А. И., Ткаченко Д. С.* Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т.43. № 4. С.562-570.
15. *Choulli M., Yamamoto M.* Conditional stability in determining a heat source // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. V.12. N.3. pp.233-243.

16. Денисов А. М. Задачи определения неизвестного источника в параболическом и гиперболическом уравнениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т.55. № 5. С.830-835.
17. Денисов А. М. Единственность и неединственность решения задачи определения источника в уравнении теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т.56. № 10. С.1737-1742.
18. Соловьев В. В. Об определении источников с компактными носителями в ограниченной области на плоскости для уравнения теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т.58. № 5. С.778-789.
19. Криксин Ю. А., Плющев С. И., Самарская Е. А., Тишкин В. Ф. Обратная задача восстановления источника для уравнения конвективной диффузии // Математическое моделирование. 1995. Т.7. № 11. С.95-108.
20. Borukhov V., Vabishchevich P. Numerical solution of the inverse problem of reconstructing a distributed right-hand side of a parabolic equation // Comp.Phys.Commun. 2000. V.126. N 1. pp.32-36
21. Калинина Е. А. Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т.5. № 1. С.89-99.
22. Vabishchevich P. N. Computational identification of a space-wise dependent source in parabolic equation // Inverse Problems in Science and Engineering. 2017. V.25. N 8. pp 1168-1190.
23. Денисов А. М., Соловьева С. И. Численное решение обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Дифференциальные уравнения. 2018. Т.54. № 7. С.919-928.
24. Су Л. Д., Васильев В. И. Итерационная идентификация стационарной правой части параболического уравнения // Математические заметки СВФУ. 2019. Т.26. № 1. С. 81-90.
25. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва. Наука. 1986.