3. Геометрия

В этом разделе методического пособия мы остановимся на лишь некоторых вопросах школьного курса геометрии, которые, на наш взгляд, могут быть использованы при изучении некоторых разделов высшей математики, в частности, аналитической геометрии.

Более подробное изложение вопросов геометрии можно найти, например, в ранее издававшихся книгах А.Б. Будака и Б.М. Щедрина по подготовке к устному вступительному экзамену по математике на факультет ВМК МГУ. Последнее издание было в 2007 г. под названием "Элементарная математика. Методические указания к ответам на теоретические вопросы билетов устного экзамена по математике", М: "МАКСПРЕСС" (см. [1]).

В связи с изложением лишь части вопросов геометрии, которые выносились на устный вступительный экзамен по математике на факультет ВМК (до 2008 г.) возможны в отдельных случаях ссылки на теоремы, изложенные в пособии *позднее*, чем в текущем пункте, или вообще в пособии не изложенные. Однако эти теоремы в своем доказательстве на данную доказываемую теорему или какие-либо выводы из нее *никак не опираются.* Стало быть, общая логическая структура освещения вопросов элементарной геометрии при этом не нарушена.

Отметим, что любой последовательно излагаемый курс геометрии должен строиться на базе ряда вводимых первичных (неопределяемых) понятий и аксиом. В качестве таких понятий выступают: *точка*, *прямая*, *плоскость.*

3.1. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника. Некоторые аналоги теоремы о пересечении медиан треугольника для треугольной пирамиды

Сформулируем определения треугольника (контурного и плоского как части плоскости), серединного перпендикуляра к отрезку, медианы, биссектрисы и высоты треугольника.

Понятие плоского треугольника основывается на утверждении о том, что всякая прямая, лежащая в некоторой плоскости, делит ее на две полуплоскости.

Это утверждение может выступать в качестве как теоремы, так и аксиомы в зависимости от того, какая из систем аксиом лежит в основе построения курса геометрии.

При этом две точки, не лежащие на указанной прямой, считаются лежащими в разных полуплоскостях (в одной полуплоскости) относительно этой прямой, если отрезок с концами в этих точках имеет внутреннюю точку, лежащую на указанной прямой, то есть *ее пересекает* (не имеет внутренних точек на этой прямой, то есть *ее не пересекает*).

Напомним, как вводятся определения отрезка и луча, используемые в дальнейших рассуждениях.

Отрезком прямой будем называть всякое множество точек этой прямой, состоящее из двух точек и всех точек этой прямой, лежащих между*[1] этими двумя точками.

Если точки A и B совпадают ($A \equiv B$), то отрезок AA или BB называется **нулевым**, если точки A и B — различные ($A \not\equiv B$), то отрезок AB (отрезок прямой) будем называть **ненулевым**.

Каждую точку прямой (AB), лежащую между точками A и B, будем называть **внутренней точкой** отрезка AB. Каждую точку прямой (AB), отличную от точки A и от точки B и не лежащую между точками A и B, будем называть **внешней точкой** отрезка AB. Сами точки A и B, определяющие отрезок AB, будем называть **концами отрезка** AB (см. рис. 3.1).

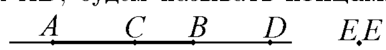


рис. 3.1

На рис. 3.1 AB — ненулевой отрезок, C — его внутренняя точка, D — его внешняя точка, EE — нулевой отрезок (точка).

Понятие луча основывается на утверждении о том, что всякая точка, лежащая на некоторой прямой, делит ее на две полупрямые в том смысле, что всякие две точки одной полупрямой (разных полупрямых) не разделяются (разделяются) указанной точкой, то есть указанная точка не лежит (лежит) между этими двумя точками. Еще соответственно говорят, что две точки прямой не разделяемые (разделяемые) данной точкой прямой лежат по одну сторону (по разные стороны) относительно этой точки.

Это утверждение может выступать в качестве как теоремы, так и аксиомы в зависимости от того, какая из систем аксиом лежит в основе построения курса геометрии.

Пусть на прямой a выбраны точки O и A ($O \not\equiv A$).

Лучом (полупрямой), определенным указанными точками, называется множество всех точек прямой a, расположенных вместе с точкой A по одну сторону относительно точки O, включающее в себя и точку A (обозначается OA). Точка O называется **началом** луча, ее считают **границей** луча, а также **точкой приложения** указанного луча.

Если точку O считать *не принадлежащей* указанному в этом определении множеству, то такой луч называют *открытым лучом*, а если точку O считать *принадлежащей* указанному множеству, то такой луч называют *замкнутым лучом*.

[1]* "Лежать между" выступает при данной схеме изложения геометрии в качестве первичного (не определяемого) понятия.

Договоримся, что если рассматривать замкнутый луч, то это будет всегда оговариваться, если речь идет просто о луче, то под этим будет подразумеваться открытый луч.

Отметим, что в отличии от отрезка, в обозначении которого не существенен порядок его концов, в обозначении луча двумя буквами всегда на первое место будет ставиться его начало.

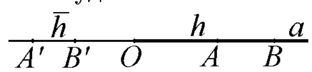


рис. 3.2 а

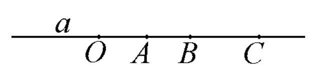


рис. 3.2 б

Сформулированное утверждение о разделении точкой, лежащей на прямой a, ее на две полупрямые означает, что на прямой a определены два луча — луч OA и луч OA', где A', O, $A \in a$ и $O \in A'A$. При этом важно отметить, что лучи OA и OB, где $O \notin AB$ тождественны, то есть представляют собой одно и то же множество точек на прямой a (один и тот же луч), лучи OA' и OB' также тождественны, где $O \in AA'$ и $O \in BB'$ (см. рис. 3.2 а, 3.2 б).

Если точки A', O, A лежат на одной прямой a и $O \in A'A$, то лучи OA и OA' называются **взаимно дополнительными**, каждый из них называется **дополнительным** по отношению к другому.

Если один из взаимно дополнительных лучей обозначить h, то другой из них обозначается $\overline{h}$ (см. рис. 3.2 а).

Определение 1. **Треугольником** *называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков.*

Указанные точки называются **вершинами** *треугольника, а указанные отрезки называются* **сторонами** *треугольника* (см. рис. 3.3 а).

Если, например, обозначить буквами A, B, C вершины треугольника, то сам треугольник обозначается символом $\triangle ABC$.

Говорят, что вершина A (сторона BC) *противолежит* стороне BC (вершине A), аналогично противолежащими друг другу являются вершина B и сторона AC, вершина C и сторона AB.

Отметим, что во многих случаях порядок вершин в треугольнике не является существенным, поэтому обозначения $\triangle ABC$, $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ и т.п. представляют собой один и тот же треугольник. Однако в тех случаях, когда будет существенен порядок вершин или сторон треугольника, это специально оговаривается.

Определение 2. **Внутренней** *точкой $\triangle ABC$ (точкой, лежащей внутри $\triangle ABC$) называется всякая точка X, которая*

1) лежит в той же полуплоскости (по одну сторону) относительно прямой (AB), что и точка C ;

2) лежит в той же полуплоскости (по одну сторону) относительно прямой (BC), что и точка A ;

3) лежит в той же полуплоскости (по одну сторону) относительно прямой (AC), что и точка B.

Определение $2'$. **Внутренней** *областью треугольника называется множество всех его внутренних точек.* При этом сам треугольник: его стороны (все внутренние точки его сторон) и вершины называют *границей* внутренней области этого треугольника.

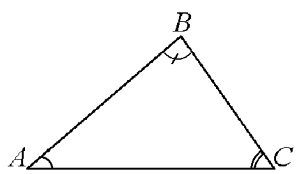


рис. 3.3 а

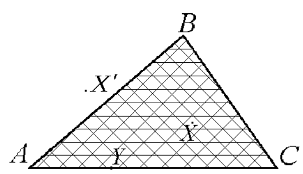


рис. 3.3 б

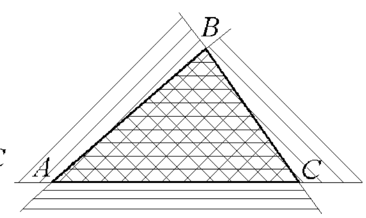


рис. 3.3 в

См. рис. 3.3 б, на котором внутренняя область треугольника заштрихована тройной штриховкой.

Определение 3. Точкой, **лежащей** *на стороне треугольника, называется всякая точка Y, являющаяся внутренней точкой этой стороны.*

Определение 4. Всякая точка X' плоскости (ABC) называется **внешней** *точкой $\triangle ABC$ (точкой, лежащей вне $\triangle ABC$), если она не является его внутренней точкой, не лежит ни на одной из его сторон и не совпадает ни с одной из его вершин.*

Определение 5. Всякий треугольник, объединенный со своей внутренней областью (множеством всех его внутренних точек), называется **плоским** *треугольником.*

Определение 6. **Внутренним** *углом треугольника ABC при вершине A называется угол $\angle BAC$, внутренняя область которого содержит в себе внутреннюю область этого треугольника.* Аналогично определяются внутренние углы при вершинах B и C.

При этом под внутренней областью угла (острого, прямого, тупого как фигуры, образованной двумя лучами, имеющими общее начало — соответственно сторонами и вершиной угла) понимается пересечение открытых*[2] полуплоскостей относительно прямых, содержащих стороны угла.

О понятиях острого, прямого и тупого углов см. ниже в п. 3.2.

[2]* Сами прямые в полуплоскости не включены.

Угол, объединенный со своей внутренней областью, называется *плоским углом.*

На рис. 3.3 б иллюстрируются опрелеления 2 — 5, а на рис. 3.3 в иллюстрируется опрелеление 6, внутренними углами $\triangle ABC$ будут углы: $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$.

Определение 7. **Серединным перпендикуляром к отрезку** *называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная ему (то есть образующая прямой угол с сожержащей его прямой).*

Определение 8. **Медианой** *треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей ей стороны треугольника.*

Определение 9. **Биссектрисой** *треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей ей стороне.*

Определение 9′. **Биссектрисой** *угла называется луч, проходящий во внутренней области угла, вершина которого совпадает с вершиной угла, делящий соответствующий плоский угол на два равных плоских угла.*

Можно доказать, что каждый ненулевой угол* [3] имеет единственную биссектрису; каждый луч с вершиной в вершине угла проходит во внутренней области угла (острого, прямого, тупого) тогда и только тогда, когда он имеет общую внутреннюю точку с любым отрезком, концы которого не совпадают с вершиной угла, а лежат: один на одной стороне угла, другой — на другой его стороне.

Определение 10. **Высотой** *треугольника, проведенной из данной вершины, называется* **перпендикуляр**,** [4] *проведенный из этой вершины к прямой, которая содержит противолежащую сторону треугольника.*

Теорема 1. Серединные перпендикуляры к сторонам произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

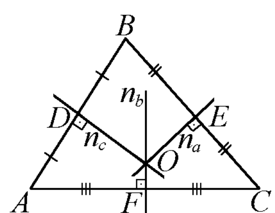


рис. 3.4

[3] *О нулевом и ненулевом угле см. п. 3.2, где говорится об измерении углов.

[4] **Здесь под этим понимается отрезок одной прямой, перпендикулярной другой, на этой другой прямой лежит один из концов указанного отрезка.

Доказательство

Пусть в $\triangle ABC$ $AD = DB$, $BE = EC$, $CF = FA$. Через точки D и E в плоскости (ABC) проведем соответственно $n_c \perp (AB)$, $n_a \perp (BC)$ (существование и единственность этих перпендикуляров может быть доказано). Поскольку прямые (BA) и (BC) различные, точки D и E отличны от точки B, эти точки различны. Если предположить, что прямые n_a и n_c совпадают, то это будет означать, что к прямой $n_a \equiv n_c$ из точки B проведены два перпендикуляра (BD) и (BE), что невозможно. Если предположить, что $n_a \parallel n_c$, то из $(BA) \perp n_c \Rightarrow (BA) \perp n_a$. Так как $(BC) \perp n_a$, точка $B \notin n_a$, то получаем, что из точки B на прямую n_a проведены два перпендикуляра: (BC) и (BA), что также невозможно. Следовательно, остается единственная возможность, $n_a \cap n_c \equiv O$ (точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам BA и BC мы обозначили через O). Аналогичным образом мы докажем пересечение перпендикуляров n_c и n_b, n_a и n_b, откуда следует, что все эти перпендикуляры — различные прямые. В силу свойства серединного перпендикуляра к отрезку $OA = OB$ и $OB = OC$, в силу транзитивности отношения равенства отрезков отсюда следует, что $OA = OC$. В силу признака серединного перпендикуляра к отрезку точка O лежит на серединном перпендикуляре n_b к отрезку AC. Следовательно, так как все эти перпендикуляры n_a, n_b, n_c — различные прямые, точка O их единственная общая точка (точка пересечения). Теорема 1 доказана.

Напомним, что **окружностью** называется множество всех точек плоскости, расположенных на равном положительном расстоянии от некоторой фиксированной точки этой плоскости (*центра окружности*). Под *радиусом* окружности понимается отрезок с концами на любой точке окружности и в центре окружности, а также — расстояние от центра окружности до любой точки на окружности.

Окружность называется *описанной* около треугольника или многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности.

Следствие. Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника — центр описанной около него окружности, поскольку согласно теореме о прямой, перпендикулярной к отрезку, проходящей через его середину, все ее точки равноудалены от концов этого отрезка.

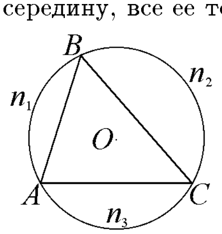


рис. 3.5 а

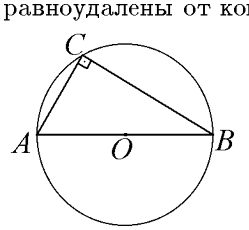


рис. 3.5 б

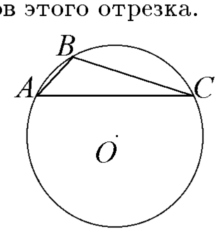


рис. 3.5 в

Стало быть, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника равноудалена от всех его вершин.

На рис. 3.5 а, б, в показано расположение центра окружности, описанной около треугольника в зависимости от того, является ли он остроугольным, прямоугольным и тупоугольным.

В упомянутой выше книге [1], а также и во многих учебниках геометрии эти факты обоснованы. Еще в упомянутой книге, а также в книге А.В. Погорелова "Элементарная геометрия", М: "Наука", 1977 (см. [2]) можно найти доказательства следующих важных теорем 2 и 3. В данных доказательствах говорится о некоторых моментах, которые *можно доказать*, в упомянутых книгах эти все моменты обоснованы.

Теорема 2. Две медианы произвольного треугольника пересекаются (как отрезки).

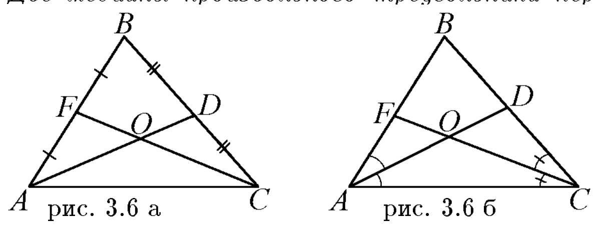


рис. 3.6 а рис. 3.6 б

Доказательство. См. рис. 3.6 а. Пусть в $\triangle ABC$ AD и CF — две медианы, $BD = DC$, $AF = FB$. Так как точки D и F — середины сторон BC и AB соответственно, то можно доказать, что это внутренние точки отрезков BC и AB. Так как точка A не лежит на прямой (BC), то луч AD пересекает отрезок BC в его внутренней точке D, а потому точки B и C расположены в разных полуплоскостях относительно прямой (AD). Далее, так как точка F лежит между точками A и B, то точка A не лежит между точками F и B, а потому эти точки расположены на одном луче с началом в точке A и, стало быть, они расположены в одной полуплоскости относительно прямой (AD). Следовательно, точки C и F лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (AD), а потому *отрезок* CF пересекает прямую (AD) в некоторой внутренней точке $O \in CF$. Аналогичным образом доказывается пересечение *отрезка* AD и прямой (CF). В силу единственности точки пересечения прямых (AD) и (CF) точка O — точка пересечения *отрезков* AD и CF. Можно также доказать, что точка O лежит во внутренней области $\triangle ABC$.

Точно также доказывается пересечение каждой из медиан AD и CF с третьей медианой $\triangle ABC$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Две биссектрисы произвольного треугольника пересекаются (как отрезки).

Доказательство

См. рис. 3.6 б. Пусть в $\triangle ABC$ AD и CF — биссектрисы. В силу определения биссектрисы треугольника отрезок AD лежит на луче AD (с началом в точке A), который является биссектрисой $\angle BAC$. Согласно определению луч AD проходит во внутренней области $\angle BAC$, а потому согласно сформулированному утверждению луч AD пересечет отрезок BC в некоторой его внутренней точке D. Аналогичным образом луч CF (с началом в точке C) пересечет отрезок AB в некоторой его внутренней точке F. Далее доказательство проводится точно так же (буквально дословным повторением), что и доказательство теоремы 2. Таким же образом доказывается пересечение каждой из биссектрис AD и CD с третьей биссектрисой $\triangle ABC$. Можно также, как и в теореме 2 доказать, что точка пересечения биссектрис треугольника лежит в его внутренней области. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану на отрезки, длины которых относятся как $2:1$*, считая от вершины, из которой она проведена.*

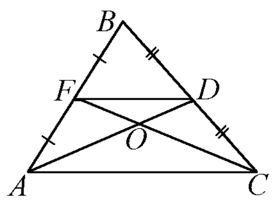


рис. 3.7 а

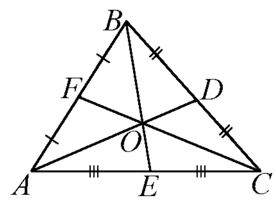


рис. 3.7 б

Доказательство

См. рис. 3.7 а. Рассмотрим в $\triangle ABC$ медианы AD и CF. В силу теоремы 2 они (как отрезки) пересекаются в некоторой точке O. Соединим отрезком точки D и F. Поскольку AD и CF — медианы, точки D и F — середины сторон BC и AB, а потому DF — средняя линия $\triangle ABC$. В силу теоремы 3 (см. ниже п. 3.7) $DF \parallel AC$ и $|DF| : |AC| = 1 : 2$. Так как $(DF) \parallel (AC)$ и точки C и F (а потому и лучи AC и DF) находятся в разных полуплоскостях относительно прямой (AD), то $\angle ADF$ и $\angle DAC$ — внутренние накрест лежащие углы при $(DF) \parallel (AC)$ и секущей (AD), а в силу свойств параллельных прямых (см. ниже п. 3.5) $\angle ADF = \angle DAC$. Аналогичным образом показывается, что $\angle DFC$ и $\angle FCA$ — внутренние накрест лежащие углы при $(DF) \parallel (AC)$ и секущей (CF), следовательно, $\angle DFC = \angle FCA$. Итак, $\triangle FOD \sim \triangle AOC$ (по двум углам). Следовательно,

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|CO|}{|OF|} = \frac{|AC|}{|FD|} = \frac{2}{1} \ \Rightarrow |AO| = \frac{2|AD|}{3} \ .$$

Аналогичным образом, проводя третью медиану BE, мы докажем, что она пересечется, например, с медианой AD в такой точке O', что $|AO'| = 2|AD| : 3$. Следовательно, $|AO'| = |AO| \Rightarrow AO' = AO$, а потому точки O и O' совпадают. Итак, все три медианы $\triangle ABC$: AD, BE, CF пересеклись о точке O (см. рис. 3.7 б) и $\dfrac{|AO|}{|OD|} = \dfrac{|CO|}{|OF|} = \dfrac{|BO|}{|OE|} = \dfrac{2}{1}$.

Замечание. Можно доказать, что O — внутреняя точка $\triangle ABC$. Теорема 4 полностью доказана.

Рассмотрим некое обобщение теоремы 4 на случай треугольной пирамиды.

Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида, A — ее вершина, противолежащая грани (BCD), A' — точка пересечения медиан грани (BCD); B — ее вершина, противолежащая грани (ACD), B' — точка пересечения медиан грани (ACD); C — ее вершина, противолежащая грани (ABD), C' — точка пересечения медиан грани (ABD); D — ее вершина, противолежащая грани (ABC), D' — точка пересечения медиан грани (ABC).

Будем называть отрезки AA', BB', CC', DD' *медиатриссами* треугольной пирамиды $ABCD$.

Теорема $4'$. *Медиатриссы треугольной пирамиды пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них на отрезки, длины которых относятся как* $3:1$, *считая от вершины, из которой они проведены.*

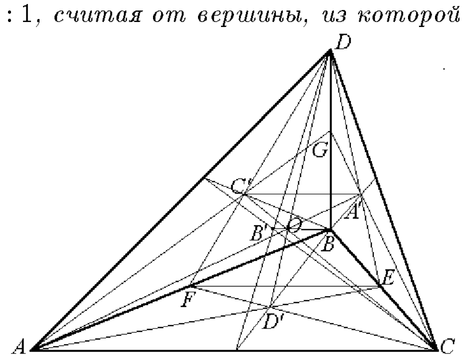


рис. 3.8

Доказательство

См. рис. 3.8. В грани (ADB) проведем медианы AG и DF, C' — точка их пересечания. В грани (CDB) проведем медианы CG и DE, A' — точка их пересечения. В плоскости $\triangle AGC$ будут проходить медиатриссы AA' и CC'. Поскольку согласно теореме 4 $AC' = 2AG/3$, $CA' = 2CG/3$, точки C' и A' являются внутренними точками сторон соответственно AG и CG. Стало быть, по аналогии с рассуждениями а доказательствах теорем 2 и 3 доказывается, что медиатриссы AA' и CC' *будут пересекаться* в некой точке O. Рассматривая треугольники $\triangle C'DA'$ и $\triangle FDE$, получаем, что они подобны, поскольку имеют общий угол $\angle FDE$ и согласно теореме 4 $\dfrac{|C'G|}{|FG|} = \dfrac{|A'G|}{|EG|} = \dfrac{2}{3}$. Стало быть, $\angle A'C'G = \angle EFG$, а поскольку эти

углы являются при прямых $(C'A')$ и (EF), получаем их параллельность $(C'A' \parallel EF)$ и $\dfrac{|C'A'|}{|FE|} = \dfrac{2}{3}$. Поскольку в силу свойств средней линии треугольника $AC \parallel EF$ и $EF = AC/2$ согласно отношению транзитивности параллельности прямых $C'A' \parallel AC$ и $\dfrac{|C'A'|}{|AC|} = \dfrac{|C'A'|}{|FE|} \cdot \dfrac{|FE|}{|AC|} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$. Стало быть, в соответствии с теорией подобия треугольников $\triangle OC'A' \sim$ $\sim \triangle OCA$ и $\dfrac{|OC'|}{|OC|} = \dfrac{|OA'|}{|OA|} = \dfrac{|C'A'|}{|AC|} = \dfrac{1}{3}$. Аналогичным образом, проводя третью медиатриссу DD', мы докажем, что она пересечется, например, с медиатриссой AA' в такой точке O', что $|AO'| = 3|AA'| : 4$. Следовательно, $|AO'| = |AO| \Rightarrow AO' = AO$, а потому точки O и O' совпадают. Аналогичная ситуация будет и с четвертой медиатриссой BB'. Итак, все четыре медиатриссы тетраэдра $ABCD$: AA', BB', CC', DD' пересеклись в точке O (см. рис. 3.8) и
$$\frac{|AO|}{|OA'|} = \frac{|BO|}{|OB'|} = \frac{|CO|}{|OC'|} = \frac{|DO|}{|OD'|} = \frac{3}{1} .$$

Теорема $4'$ доказана.

Теорема 5. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

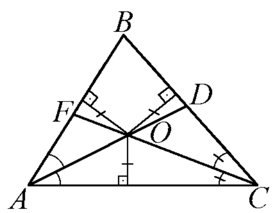


рис. 3.9 а

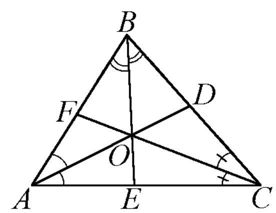


рис. 3.9 б

Доказательство

См. рис. 3.9 а. Рассмотрим в $\triangle ABC$ биссектрисы AD и CF. В силу теоремы 3 они (как отрезки) пересекаются в некоторой точке O, эта точка находится во внутренней области треугольника ABC, а потому — во внутренней области каждого из его внутренних углов. В силу того, что биссектриса угла — множество всех точек, равноудаленных от сторон угла, лучи AD и CF — биссектрисы $\angle BAC$ и $\angle BCA$ соответственно, то $\rho(O;(AC)) = \rho(O;(AB))^{*}$ [5] и $\rho(O;(AC)) = \rho(O;(BC))$. Следовательно, $\rho(O;(AB)) = \rho(O;(BC))$ и так как O — внутренняя точка $\angle ABC$, то O лежит на биссектрисе BE $\angle ABC$ (см. рис. 3.9 б). Итак, все три биссектрисы $\triangle ABC$ AD, BE, CF пересеклись в одной и той же точке O. Отметим, что если бы мы рассматривали, например, точку O' пересечения биссектрис

[5]* $\rho(O;(AB))$ — расстояние от точки O до прямой (AB), оно по определению есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из точки O на прямую (AB).

AD и BE, то также доказали, что она оказалась бы на биссектрисе CF. В силу единственности биссектрис углов и единственоcти точки пересечения прямых точки O и O' совпадут. Теорема 5 полностью доказана.

Точка пересечения биссектрис углов треугольника — центр вписанной в него окружности, поскольку согласно теореме о биссектрисе угла как множестве точек, равноудаленных от сторон угла, точка перечечения биссектрис углов треугольника и будет равноудалена от сторон треугольника.

При этом окружность называется *вписанной* в треугольник или многоугольник, если все его стороны касаются этой окружности (то есть каждая из сторон имеет с этой окружностью единтвенную общую точку). При этом радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, длина же этого радиуса — перпендикуляра, проведенного из центра окружности на стороны треугольника, является по определению расстоянием от центра окружности до стороны треугольника, в данном случае все три расстояни

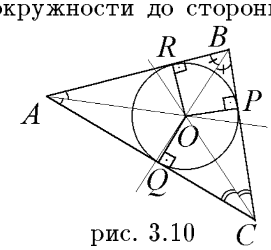


рис. 3.10

Теорема 6. Высоты треугольника (или содержащие их прямые) пересекаются в одной точке.

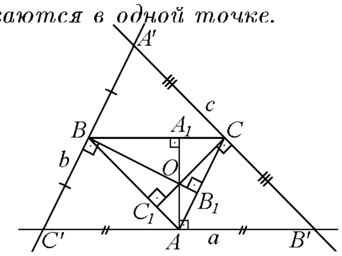


рис. 3.11 а

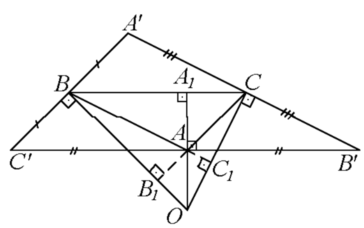


рис. 3.11 б

Доказательство

См. рис. 3.11 а. Проведем в плоскости (ABC) через точку A прямую $a \parallel (BC)$, через точку B прямую $b \parallel (AC)$ и через точку C прямую $c \parallel (AB)$. Докажем, что любые две из этих прямых пересекаются. Рассмотрим прямые a и b. Прямые a и b не совпадают, так как точка $B \notin a$, но $B \in b$. Если предположить, что $b \parallel a$, то в силу транзитивности свойства параллельности прямых $(AC) \parallel b$, $b \parallel a$, $a \parallel (BC) \Rightarrow (AC) \parallel (BC)$, что противоречит пересечению прямых (AC) и (BC) в точке C. Итак, прямые a и b пересекаются в точке C'. Аналогично доказывается, что прямые a и c пересекаются в точке B', и прямые b и c пересекаются в точке A'.

Замечание. В книге [1] доказано, что все точки A', B', C' — различные; точка A' и прямая $a \equiv (B'C')$ будут расположены в разных полуплоскостях относительно прямой (BC); точка B' и прямая $b \equiv (A'C')$ будут расположены в разных полуплоскостях относительно прямой (AC); точка C' и прямая $c \equiv (A'B')$ будут расположены в разных полуплоскостях относительно прямой (AB), то есть действительно имеет место то, что изображено на рис. 3.11 а и б.

В четырехугольнике $C'BCA$ $C'B \parallel AC$, $C'A \parallel BC$, следовательно, $C'BCA$ — параллелограмм, а потому $C'A = BC$. В четырехугольнике $ABCB'$ $BC \parallel AB'$, $AB \parallel B'C$, следовательно, $ABCB'$ — параллелограмм, а потому $AB' = BC$. Из $C'A = BC$ и $AB' = BC$ вытекает $C'A = AB'$, то есть точка A — середина отрезка $C'B'$. Аналогично доказывается, что $C'B = BA'$ и $A'C = CB'$, то есть точка B — середина отрезка $A'C'$ и точка C — середина отрезка $A'B'$. Серединный перпендикуляр к отрезку $B'C'$ будет перпендикулярен и к параллельной ему прямой (BC) (в силу свойств параллельных прямых (см. ниже п. 3.5)), по той же причине серединный перпендикуляр к отрезку $A'B'$ будет перпендикулярен и к параллельной ему прямой (AB), серединный перпендикуляр к отрезку $A'C'$ будет перпендикулярен и к параллельной ему прямой (AC). В силу теоремы 1 серединные перпендикуляры к сторонам $\triangle A'B'C'$ пересекаются в одной точке O, которая и будет точкой пересечения прямых, содержащих высоты $\triangle ABC$. Теорема 6 доказана.

Определение 5. Точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника называется **ортоцентром** *этого треугольника.*

На рис. 3.11 в, г, д проиллюстрированы случаи расположения ортоцентра треугольника: в его внутренней области, когда треугольник остроугольный, в вершине прямого угла, когда треугольник прямоугольный (в этом случае две его высоты совпадают с его сторонами — катетами), во внешней области, когда треугольник тупоугольный.

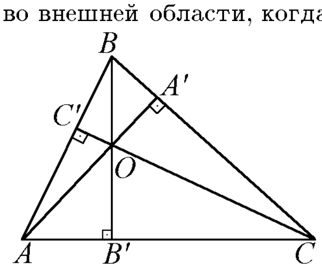


рис. 3.11 в

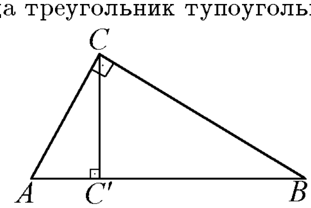


рис. 3.11 г

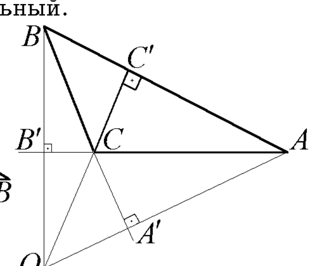


рис. 3.11 д

Подробные обоснования этих расположений см. в книге [1].

3.2. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора

В данном п. и в последующих рассуждениях мы будет использовать важное понятие *длины отрезка.*

Длиной ненулевого отрезка называется поставленное в соответствие отрезку положительное число, удовлетворяющее условиям:

1) Существует отрезок, длина которого равна 1 (такой отрезок еще называют масштабным отрезком или единицей измерения отрезков).

2) Равные отрезки (отрезки которые могут совпасть при наложении* [6]) имеют равные длины.

3) Длина суммы** [7] равна сумме их длин.

4) Длина нулевого отрезка считается равной нулю (числу 0).

При этом нулевые отрезки считаются равными и сумма любого отрезка AB с нулевым отрезком (скажем, EE) по определению равна отрезку AB.

В курсах высшей геометрии доказывается, что такое определение длины отрезка корректно, то есть может быть подобным образом введено. При этом такой подход к введению длины отрезка не является единственным, в ряде школьных учебников наблюдается иной подход.

Обозначается длина отрезка AB : $|AB|$,
$|AB| \overset{def}{=} \rho(A;B)$ — обозначение расстояния между точками A и B.

Совершенно аналогично вводится понятие величины (меры) угла. При этом равными углами называются углы, которые могут быть совмещены (могут совпасть) при наложении. При этом совпадут стороны углов и их внутренние области.

Суммой двух ненулевых углов (их стороны — несовпадающие лучи) $\angle COA$ и $\angle BOC$ называется угол $\angle BOA$ (он может быть обозначен и как $\angle AOB$), O — вершина углов, точки A, B и C лежат на различных сторонах соответствующих углов, причем луч OC проходит во внутренней области угла $\angle AOB$.

При этом отрезок угол $\angle AOB$ считается по определению *больше* каждого из углов $\angle AOC$ и $\angle COB$, а каждый из них в свою очередь считаются *меньше* угла $\angle AOB$.

---

[6]* При подобном подходе к построению курса геометрии "наложение" является первичным понятием, а отношение равенства — определяется.

[7]** Суммой двух ненулевых отрезков AC и CB называется отрезок AB, где точка C лежит между точками A и B (на прямой (AB)), при этом отрезок AB считается по определению *больше* каждого из отрезков AC и CB, а каждый из них в свою очередь считаются *меньше* отрезка AB. Суммой произвольных отрезков DE и FG считается отрезок, равный сумме отрезков AC и CB, где точка C лежит между точками A и B на прямой AB и соответственно $DE = AC$, $FG = CB$.

Если $\angle AOB+\angle BOA' = \angle AOA'$, где $\angle AOA'$ — развернутый угол (угол, образованный взаимно дополнительными лучами, в качестве внутренней области этого угла берется одна из полуплоскостей относительно прямой, содержащей указанные лучи), то $\angle AOB$ и $\angle BOA'$ называются *смежными*. Углы $\angle AOB$ и $\angle B'OA'$, где пары лучей OA, OA' и OB, OB' являются взаимно дополнительными, называются *вертикальными*.

Сумма произвольных углов $\angle DEF$ и $\angle GHJ$ считается равной углу $\angle AOB$, где $\angle DEF = \angle AOC$, $\angle GHJ = \angle COB$, где луч OC проходит во внутренней области угла $\angle AOC$.

Мера нулевого угла (угла, образованного совпадающими лучами с отсутствующей внутренней областью) считается равной нулю (числу 0).

Нулевые углы по определению считаются равными и сумма любого угла и нулевого угла считается равной данному углу. Каждый ненулевой угол считается по определению *больше* нулевого угла, а в свою очередь нулевой угол считается по определению *меньше* ненулевого угла.

Угол, равный своему смежному углу, называется *прямым*, угол, больше нулевого угла, но меньше прямого угла называется *острым*, угол, больше прямого угла, но меньше развернутого угла называется *тупым*.

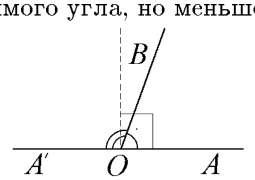


рис. 3.12 а

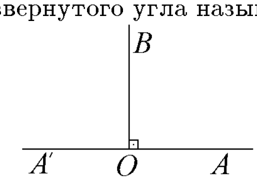


рис. 3.12 б

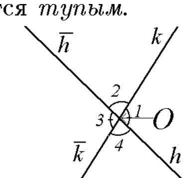


рис. 3.12 в

На рис. 3.12 а $\angle AOB$ и $\angle A'OB$ — смежные, $\angle AOB$ — острый, $\angle A'OB$ — тупой, на рис. 3.12 б $\angle AOB$ и $\angle A'OB$ — прямые углы, на рис. 3.12 в $\angle 1$, $\angle 3$ и $\angle 2$, $\angle 4$ — пары вертикальных углов.

Наиболее распространенными мерами углов являются: градусная мера, единицей измерения в ней (угол в 1°) является $1/90$ часть прямого угла и радианная мера угла, единица измерения в ней (угол в 1 радиан) — центральный угол (он образован двумя лучами, содержащими радиусы окружности с вершиной в центре окружности) такой, что длина дуги окружности, расположенной внутри него, равна радиусу окружности.

В разделе "Тригонометрия" приводятся соотношения, выражаюшие градусную и радианную меры угла между собой.

Обозначается величина угла $\angle AOB$: $\widehat{AOB}$.

Пусть имеются три положительных числа a, b и c. Говорят, что число c есть **среднее пропорциональное** между числами a и b, если $a : c = c : b$.

Сразу отметим, что равенство $a : c = c : b \Leftrightarrow c^2 = a \cdot b \Leftrightarrow c = \sqrt{a \cdot b}$, то есть c есть *среднее геометрическое двух чисел a и b*.

Теорема 1. Если из вершины прямого угла прямоугольного треугольника на прямую, содержащую его гипотенузу, проведен перпендикуляр, то основание этого перпендикуляра является внутренней точкой гипотенузы.

Доказательство

Поскольку оба внутренние угла прямоугольного треугольника (помимо прямого угла) являются острыми, то это основание перпендикуляра находится на каждом из лучей с началом как в одном, так и в другом конце гипотенузы. А это и означает, что оно *лежит между* концами гипотенузы, то есть является ее внутренней точкой. Теорема 1 доказана.

Определение 1. Треугольник называется **прямоугольным**, *если у него есть внутренний прямой угол. Сторона, противолежащая прямому углу, называется* **гипотенузой**, *а остальные стороны* **катетами**.

Теорема 2. Пусть a, b — длины катетов, c — длина гипотенузы прямоугольного треугольника, h_c — длина высоты, провенной из вершины прямого угла на гипотенузу, c_a — длина проекции катета длины a на гипотенузу, c_b — длина проекции катета длины b на гипотенузу. Тогда

$$\frac{h_c}{c_a} = \frac{c_b}{h_c} \Leftrightarrow h_c^2 = c_a \cdot c_b \Leftrightarrow h_c = \sqrt{c_a \cdot c_b}\ ; \qquad (1)$$

$$\frac{c_a}{a} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a^2 = c \cdot c_a \Leftrightarrow a = \sqrt{c \cdot c_a}\ ; \qquad (2)$$

$$\frac{c_b}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2 = c \cdot c_b \Leftrightarrow b = \sqrt{c \cdot c_b}\ . \qquad (3)$$

В соответствии с определением 1 утверждения теоремы означают, что:

1) *длина высоты, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между длинами отрезков, на которые основание этой высоты разбивает гипотенузу (в формулировке теоремы мы назвали эти отрезки проекциями катетов на гипотенузу)*;

2) *длина каждого катета есть средняя пропорциональная между длиной гипотенузы и длиной проекции этого катета на гипотенузу.*

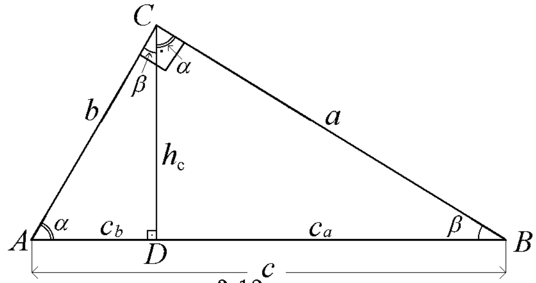


рис. 3.12

Доказательство

См. рис. 3.12. Пусть в треугольнике ABC $\angle C$ — прямой, $CD \perp AB$ $(D \in (AB))$, по доказанному в теореме 1 точка D — основание перпендикуляра, проведенного из вершины прямого угла C на гипотенузу, является внутренней точкой отрезка (гипотенузы) AB. Следовательно, рассматривая прямоугольные $\triangle ACD$ и $\triangle ACB$, у которых соответственно $\angle ADC$ и $\angle ACB$ — прямые, в силу равенства прямому углу суммы острых внутренних углов в прямоугольном треугольнике имеем : $\angle ACD + \angle CAD =$ $= \angle CBD + \angle CAD$, откуда $\angle ACD = \angle CBD$. Совершенно аналогично, рассматривая прямоугольные $\triangle BCD$ и $\triangle ACB$, докажем, что $\angle BCD =$ $= \angle CAD$. Далее, доказательство теоремы можно проводить двояким образом. Рассматривая $\triangle ACD$ и $\triangle CBD$, получим, что они подобны, как имеющие равные острые внутренние углы, из равенства отношений длин их сходственных сторон вытекают доказываемые равенства (1); затем рассматривая $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$, получим, что они подобны, как имеющие общий острый внутренний угол ($\angle A$), из равенства отношений длин их сходственных сторон вытекают доказываемые равенства (3); наконец, рассматривая $\triangle BCD$ и $\triangle BAC$, получим, что они подобны, как имеющие общий острй внутренний угол ($\angle B$), также из равенства отношений длин их сходственных сторон вытекают доказываемые равенства (2).

Второй способ. По доказанному $\widehat{ACD} = \widehat{CBD} = \beta$, $\widehat{BCD} = \widehat{CAD} = \alpha$, откуда (см. рис. 3.12) из прямоугольных $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h_c}{c_a} = \frac{c_b}{h_c} \ \Rightarrow \ (1) \ ;$$

из прямоугольных $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$: $\cos\alpha = \dfrac{c_b}{b} = \dfrac{b}{c} \ \Rightarrow \ (3)$;

из прямоугольных $\triangle BCD$ и $\triangle ABC$: $\cos\beta = \dfrac{c_a}{a} = \dfrac{a}{c} \ \Rightarrow \ (2)$.

Теорема 2 полностью доказана.

Следствие. Отношение квадратов длин катетов равно отношению длин их проекций на гипотенузу.

Это утверждение следует из (2) и (3) следующим образом:

$$a^2 = c \cdot c_a \ ; \ b^2 = c \cdot c_b \ \Rightarrow \ \frac{a^2}{b^2} = \frac{c \cdot c_a}{c \cdot c_b} = \frac{c_a}{c_b} \ .$$

Теорема 3 (Пифагора). *В любом прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин его катетов, то есть, если a и b — длины его катетов, а c — длина его гипотенузы, то* $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство

Воспользовавшись результатом предыдущей теоремы, почленно складывая равенства $a^2 = c \cdot c_a$; $b^2 = c \cdot c_b$, получим с учетом того, что $c_a + c_b = c$, $a^2 + b^2 = c \cdot (c_a + c_b) = c \cdot c = c^2$. Теорема 3 доказана.

*Следствие. **Имеет** место равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, где α — величина острого угла прямоугольного треугольника (основное тригонометрическое тождество).*

Из определений синуса ($\sin\alpha \overset{def}{=} a/c$) и косинуса ($\cos\alpha \overset{def}{=} b/c$) (см. рис. 3.12) величины острого угла прямоугольного треугольника вытекает, что

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Теорема 4 (обратная теорема Пифагора). *Если в треугольнике сумма квадратов длин двух сторон равна квадрату длины третьей стороны, то треугольник — прямоугольный.*

Доказательство

Пусть в $\triangle ABC$ $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$, докажем, что $\angle C$ — прямой. Для этого рассмотрим $\triangle A'B'C'$, у которого $A'C' = AC$, $B'C' = BC$ и $\angle C'$ — прямой. Такой треугольник можно построить, выбирая на некоторой прямой точку C', откладывая на каком-нибудь ее луче с началом в точке C' отрезок $C'A' = CA$, затем проводим луч, перпендикулярный прямой $(C'A')$, на этом луче с началом в точке C' откладываем отрезок $C'B' = CB$, соединяем отрезком точки A' и B'. $\triangle A'B'C'$ — прямоугольный с прямым углом $\angle C'$, в силу теоремы Пифагора $|A'B'|^2 = |A'C'|^2 + |B'C'|^2 = = |AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 \Leftrightarrow |A'B'| = |AB|$. Получили, что $\triangle ABC = = \triangle A'B'C'$ (по трем сторонам), следовательно, $\angle C = \angle C'$, а потому $\angle C$ — прямой и $\triangle ABC$ — прямоугольный. Теорема 4 доказана.

Замечание. Утверждение обратной теоремы Пифагора можно получить и из теоремы косинусов (см. ниже, п. 3.4).

3.3. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону

Определения треугольника и биссектрисы треугольника см. соответственно в п. 3.1.

Теорема 1. Если в треугольнике ABC проведена биссектриса угла A, AD, то она делит противолежащую вершине A сторону BC на отрезки BD и DC, пропорциональные прилежащим вершине A сторонам AB и AC, то есть $\dfrac{|AB|}{|BD|} = \dfrac{|AC|}{|CD|} \Leftrightarrow \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BD|}{|CD|}$, $D \in BC$.

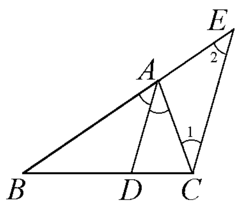


рис. 3.13 а

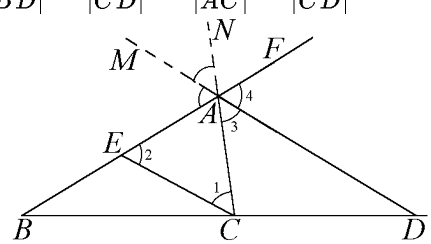


рис. 3.13 б

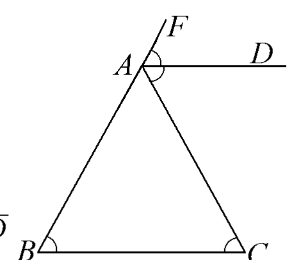


рис. 3.13 в

Доказательство

См. рис. 3.13 а. Через точку C проведем прямую $(CE) \parallel (AD)$, E точка пересечения прямых (CE) и (BA). Такая точка E существует в силу параллельности (AD) и (CE), того что $A \equiv (AD) \cap (BE)$ и следствия из аксиомы параллельности прямых (см. п. 3.5). Так как AD — биссектриса угла A (стало быть, луч, проходящий внутри угла A), $D \equiv (AD) \cap (BC)$, стало быть, точка D лежит между точками B и C. Следовательно, точка A лежит между точками B и E. $\triangle BAD \sim \triangle BEC$, потому $|BD| : |DC| = |BA| : |AE|$. В силу свойств параллельности прямых вытекает, что $\angle ACE = \angle CAD$ как внутренние накрест лежащие при $(CE) \parallel (AD)$ и секущей (AC), $\angle BAD = \angle BEC$ как соответственные при $(CE) \parallel (AD)$ и секущей (BE). По условию $\angle BAD = \angle CAD$, следовательно в силу свойства транзитивности отношения равенства углов $\angle ACE = \angle AEC$, а потому в силу признака равнобедренного треугольника $\triangle CAE$ — равнобедренный, у которого $AC = AE$, откуда $|AC| = |AE|$. Следовательно, в силу равенства $|BD| : |DC| = |BA| : |AE|$ получаем равенства $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BD|}{|CD|} \Leftrightarrow \dfrac{|AB|}{|BD|} = \dfrac{|AC|}{|CD|}$.

Теорема 1 доказана. Справедлива и теорема, обратная теореме 1.

Теорема 1′. Если в плоском треугольнике ABC проведен отрезок AD такой, что $D \in BC$, (D — внутренняя точка стороны BC и выполняется соотношение $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BD|}{|CD|}$, то AD — биссектриса треугольника ABC, проведенная из его вершины B.

Доказательство

Схема рассуждений аналогична, например, обоснованию прохождения медианы треугольника через точку пересечения двух других его медиан. Проводя из вершины A биссектрису треугольника AD', получим, что D' — внутренняя точка стороны BC и по доказанному в теореме 1 имеем $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BD'|}{|CD'|}$. Сопоставляя это с равенством $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BD|}{|CD|}$, нетрудно получить, что $|BD| = |BD'|$, стало быть, $BD = BD'$, а потому $D' \equiv D$. Следовательно, AD — биссектриса $\triangle ABC$, проведенная из его вершины B. Теорема 1′ доказана.

Можно доказать теорему, выражающую аналогичное свойство биссектрисы внешнего угла треугольника.

Теорема 2. Если в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, то биссектриса AD его внешнего угла A пересекает прямую (BC) в точке D, являющейся внешней точкой отрезка BC такой, что расстояния от точки D до точек A и C пропорциональны длинам сторон AB и AC, то есть

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|} \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|} \ .$$

Если же $AB = AC$, то биссектриса внешнего угла A параллельна BC.

Доказательство можно найти в книге [1], еще в учебнике геометрии А.П. Киселева и др. источниках. См. иллюстрацию этой теоремы на рис. 3.13 б и в. На рис. 3.13 б проиллюстрирован случай, когда сторона AC меньше стороны AB.

Приведем (с выводом) две формулы, выражающие длину биссектрисы угла треугольника, одну из них сейчас, другую в следующем пункте.

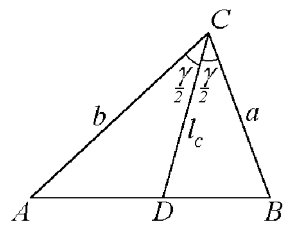


рис. 3.13 г

См. рис. 3.13 г. $b = |AC|$, $a = |BC|$, $l_c = |CD|$, $\widehat{ACD} = \widehat{BCD} = \gamma/2$. Согласно формуле вычисления площади треугольника по известным длинам его сторон и величине угла между ними, применяя формулу синуса двойного аргумента, получим:

$$S_{\triangle ACB} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} \ \Leftrightarrow \ \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bl_c \sin\gamma/2}{2} + \frac{al_c \sin\gamma/2}{2} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)l_c\sin\gamma/2}{2} \ \Leftrightarrow \{\sin\frac{\gamma}{2} > 0\} \Leftrightarrow \ l_c = \frac{2ab}{(a+b)}\cos\frac{\gamma}{2} \ .$$

Замечание. При выводе этой формулы для длины биссектрисы треугольника было использовано третье условие, фигурирующее в определении *площади плоской фигуры* (она представляет собой множество всех точек ее границы, объединенное со всеми ее внутренними точками), которое имеет вид.

Площадью плоской фигуры называется поставленное ей в соответствие положительное действительное число, обладающее следующими свойствами:

1) *существует плоская фигура площади, равной* 1 *(единица измерения), такой фигурой является квадрат, имеющий равную* 1 *(единице измерения длин) длину стороны;*

2) *равные плоские фигуры имеют равные площади;*

3) *если плоская фигура разбивается на части (плоские фигуры), никакие две из которых не имеют общих внутренних точек, то площадь этой плоской фигуры равна сумме площадей ее частей.*

При этом площадь фигуры, состоящей из конечного количества точек, отрезков, дуг, линий и т.п., по определению *считается равной нулю.*

3.4. Теоремы косинусов и синусов для треугольника. Применения теоремы косинусов.

Определения треугольника и косинуса величины угла в треугольнике см. соответственно в предыдущих пунктах и разделе "Тригонометрия".

Теорема 1 (косинусов). В произвольном треугольнике квадрат длины стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон минус удвоенное произведение длин этих сторон на косинус величины угла между ними.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

где γ — величина угла, противолежащего стороне с длиной c, a и b — длины других сторон треугольника.

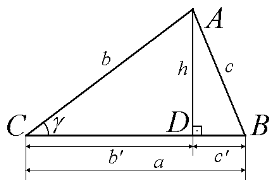


рис. 3.14 а

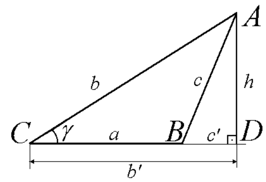


рис. 3.14 б

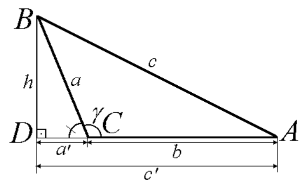


рис. 3.14 в

Доказательство

Пусть в $\triangle ABC$ $\gamma = \widehat{ACB}$. Рассмотрим пять случаев. Отметим, что на рис. 3.14 а, б, в, г, д обозначения a, b, c, a', b', c', h означают длины соответствующих отрезков.

См. рис. 3.14 а. $\angle C$ и $\angle B$ — острые, тогда основание высоты AD $\triangle ABC$, проведенной из вершины A на прямую (CB), лежит на стороне CB. Это доказывается точно также, как и теорема 1 в п. 3.2. Из прямоугольного $\triangle ADB$ по теореме Пифагора $h^2 = c^2 - (c')^2$, а так как точка D лежит между точками B и C, то $c' = a - b'$. С другой стороны, из прямоугольного $\triangle ACD$ по теореме Пифагора $h^2 = b^2 - (b')^2$ и по определению косинуса величины острого угла $b' = b\cos\gamma$. Следовательно,
$c^2 - (a - b')^2 = b^2 - (b')^2 \Leftrightarrow c^2 - a^2 + 2ab' - (b')^2 = b^2 - (b')^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab' = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

См. рис. 3.14 б. $\angle C$ — острый, $\angle B$ — тупой, тогда смежный с ним $\angle ABD$ — острый. В силу теоремы 1 п. 3.2 основание D высоты AD $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, проведенной из вершины A на прямую (CB), лежит на *луче* BD, дополнительном лучу BC. Следовательно, точка B лежит между точками C и D. Из прямоугольного $\triangle ACD$ по теореме Пифагора $h^2 =$
$= b^2 - (b')^2$, а так как точка B лежит между точками C и D, то $c' = b' - a$. По определению косинуса величины острого угла $b' = b\cos\gamma$. С другой стороны, из прямоугольного $\triangle ABD$ по теореме Пифагора $h^2 = c^2 - (c')^2$.

Следовательно, $b^2 - (b')^2 = c^2 - (c')^2 \Leftrightarrow c^2 = (c')^2 + b^2 - (b')^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c^2 = (b' - a)^2 + b^2 - (b')^2 = (b')^2 + a^2 - 2ab' + b^2 - (b')^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

См. ниже рис. 3.14 г. $\angle C$ — острый, $\angle B$ — прямой, тогда по определению косинуса величины острого угла прямоугольного треугольника и теореме Пифагора $a = b\cos\gamma$ и $c^2 = b^2 - a^2 = b^2 + a^2 - 2a^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

См. выше рис. 3.14 в. $\angle C$ — тупой, тогда смежный с ним $\angle BCD$ — острый и $\angle A$ — острый. В силу теоремы 1 п. 3.2 основание D высоты BD $\triangle ABC$ и $\triangle CBD$, проведенной из вершины B на прямую (AC), лежит на *луче* CD, дополнительном лучу CA. Следовательно, точка C лежит между точками A и D. Из прямоугольного $\triangle CBD$ по теореме Пифагора $h^2 =$ $= a^2 - (a')^2$, а так как точка C лежит между точками A и D, то $c' =$ $= a' + b$. По определению косинуса величины острого угла и соотношению между косинусами величин смежных углов $a' = a\cos(180^\circ - \gamma^\circ) =$ $= -a\cos\gamma^\circ = -a\cos\gamma$. С другой стороны, из прямоугольного $\triangle ABD$ по теореме Пифагора $h^2 = c^2 - (c')^2$. Следовательно, $a^2 - (a')^2 = c^2 - (c')^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c^2 = (c')^2 + a^2 - (a')^2 \Leftrightarrow c^2 = (a' + b)^2 + a^2 - (a')^2 =$
$= (a')^2 + 2a'b + b^2 + a^2 - (a')^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

См. рис. 3.14 д. $\angle C$ — прямой, по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. Так как $\cos\gamma = 0$ $(\gamma = \widehat{C} = 90^\circ)$, то равенство $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ будет справедливо и в этом случае. Теорема косинусов полностью доказана.

Следствие 1. С помощью теоремы косинусов можно доказать свойство 6 параллелограмма (см. ниже п. 3.6) *Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.*

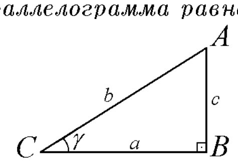


рис. 3.14 г

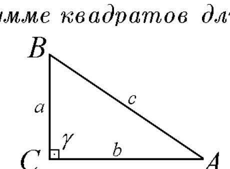


рис. 3.14 д

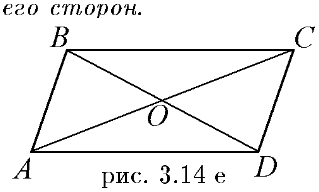


рис. 3.14 е

Доказательство

См. рис. 3.14 е. В силу свойств параллелограмма (см. теорему 4 п. 3.7) $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$, $|AD| = |BC|$, $|AB| = |CD|$. По теореме косинусов для треугольников ABC и ABD

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos(\widehat{B}),$$
$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| \cdot |AD| \cdot \cos(\widehat{A}).$$

Складывая почленно эти равенства, с учетом $|AD| = |BC|$, $|AB| = |CD|$ и $\cos(\widehat{B}) = -\cos(\widehat{A})$ получим: $|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |AB|^2 + |BC|^2 + |AD|^2 =$ $= |AB|^2 + |CD|^2 + |BC|^2 + |AD|^2$. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. Имеет место формула для вычисления длины медианы

треугольника, выраженной через длины его сторон (см. рис. 3.14 з на примере вычисление длины медианы треугольника, проведенной к его стороне длины b)
$$m_b = \frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}\ .$$

Это равенство получается, если достроить треугольник на указанном рис. до параллелограмма, диагоналями которого будут сторона AC с длиной b и удвоенная медиана этого треугольника, длина которой будет $2m_b$, из равенства $(2m_b)^2+b^2=2a^2+2c^2$.

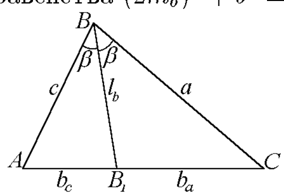


рис. 3.14 ж

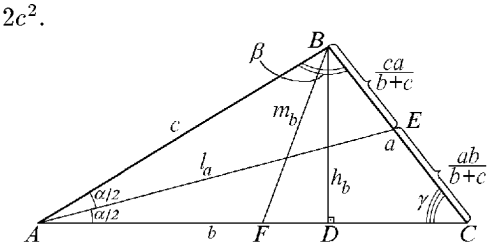


рис. 3.14 з

На основе теоремы косинусов докажем формулу, выражающую длину биссектрисы угла в треугольнике через длины его сторон (см. рис. 3.14 ж). На этом рис $a,\ c,\ b_a,\ b_c,\ b=b_a+b_c$ — длины соответствующих сторон $\triangle ABC$, $\triangle ABB_1$ и $\triangle CBB_1$, l_b — длина медианы $\triangle ABC$, проведенной из вершины B:
$$l_b^2 = ac - b_a b_c.$$

Доказательство. Из теоремы косинусов для $\triangle ABB_1$ и $\triangle CBB_1$ следует
$$\begin{cases} b_c^2 = c^2 + l_b^2 - 2l_b c\cos\beta\ , \\ b_a^2 = a^2 + l_b^2 - 2l_b a\cos\beta\ . \end{cases}$$

Умножая первое равенство на a, второе на b и затем вычитая из первого равенства второе, получаем $b_c^2 a - b_a^2 c = ac^2 - a^2 c - l_b^2(c-a)$. Учитывая, что в силу свойства биссектрисы угла треугольника (см. п. 3.3) $b_c\cdot a = b_a\cdot c$, откуда $l_b^2(a-c)=(ac-b_ab_c)(a-c)$. Если $a\neq c$, то, деля последнее равенство на $a-c$, имеем $l_b^2 = ac-b_ab_c$, если же $a=c$, то $b_a=b_c=b/2$, и потому $l_b^2=a^2-b^2/4=ac-b_ab_c$, что и требовалось доказать.

Из полученного соотношения, примененного к длине биссектрисы l_a треугольника ABC (см. рис. 3.14 з), получаем с учетом выражений для длин отрезков $|BE| = c_a = \dfrac{ac}{b+c}$ и $|EC| = c_b = \dfrac{ab}{b+c}$ следующее выражение для l_a:
$$l_a^2 = bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right] \quad \text{или} \quad l_a = \frac{\sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}\ .$$

Применяя теорему косинусов, можно вывести формулу Герона выражения площади треугольника через длины его сторон. При этом мы, учитывая, что α — величина угла треугольника, стало быть, $0^\circ<\alpha^\circ<180^\circ$, а потому $\sin\alpha>0$, используем соотношение, вытекающее из основного тригонометрического тождества $\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. См. рис. 3.14 з.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{bc\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{2} = \frac{bc\sqrt{1-(b^2+c^2-a^2)^2/4b^2c^2}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}}{4} = \frac{\sqrt{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)}}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{(a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2)}}{4} = \frac{\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c)}}{4}.$$

Попутно мы получаем выражение для длины высоты треугольника ABC, проведенной из его вершины B к его противолежащей стороне длины b
$$h_b = \frac{2S_{\triangle ABC}}{b}, \text{ откуда } h_b = \frac{\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c)}}{2b}.$$

Введем обозначения: $P = a+b+c$ — периметр треугольника (сумма длин его сторон), $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, тогда $a+b-c = a+b+c-2c = 2p-2c = 2(p-c)$, аналогично $a+c-b = 2(p-b)$, $b+c-a = 2(p-a)$, $a+b+c = 2p$. Подставляя их в полученную выше формулу для площади треугольника ABC, получаем формулу Герона площади треугольника, выраженную через длины его сторон
$$S_{\triangle}ABC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
где p — полупериметр этого треугольника.

При этом следует отметить, что в силу неравенства треугольника $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$, откуда $p-a>0$, $p-b>0$, $p-c>0$.

Замечание. Выше, в п. 3.2 отмечалось, что справедливость обратной теоремы Пифагора можно получить и из теоремы косинусов. Это получается следующим образом: если a, b, c — длины сторон треугольника, и γ — величина угла между сторонами длин a, b (или угла, противолежащего стороне с длиной c), то по теореме косинусов для этого треугольника $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ и равенства $c^2 = a^2+b^2$ получаем, что так как $a>0$ и $b>0$ $\cos\gamma = 0$. Следовательно, $\gamma = 90°$, а потому угол между сторонами длин a, b — прямой, следовательно треугольник — прямоугольный.

Теорема 2 (синусов). Стороны треугольника пропорциональны синусам величин противолежащих углов, причем отношение длины стороны треугольника к синусу величины противолежащего ей угла есть величина постоянная, равная длине диаметра описанной около треугольника окружности, то есть если a, b, c *— длины сторон треугольника,* α, β, γ *— величины противолежащих им углов, то*
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$
где R *— радиус (длина радиуса) описанной около треугольника окружности.*

Доказательство

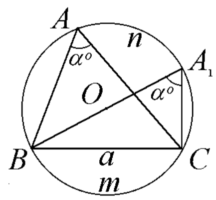


рис. 3.15 а

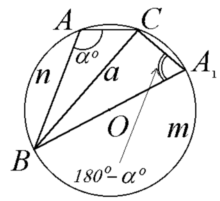


рис. 3.15 б

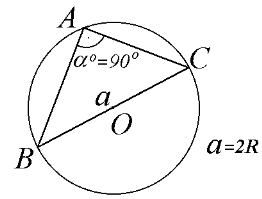


рис. 3.15 в

Опишем окружность около треугольника ABC окружность $(O; R)$ (O — центр окружности, $R > 0$ — ее радиус). Тогда все внутренние углы $\triangle ABC$ становятся вписанными в эту окружность углами.

Напомним, что *углом, вписанным в окружность, называется угол, вершина которого лежит на этой окружности, а его стороны пересекают окружность* (стало быть, имеют с окружностью кроме вершины еще по одной общей точке). Этот угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается. Это означает, что мера вписанного угла (градусная, радианная) равна половине меры (соответственно градусной, радианной) дуги, внутренние точки которой лежат во внутренней этого области угла, а концы этой дуги лежат на сторонах угла.

Рассмотрим случаи.

$\angle BAC$ — острый (см. рис. 3.15 а), тогда дуга $\smile BmC$, на которую опирается угол $\angle BAC$, меньше полуокружности, следовательно, центр O и вершина A лежат в одной полуплоскости относительно прямой (BC). Поэтому, если провести диаметр BA_1, то все его точки (кроме точки B), в том числе и конец A_1 окажутся в той же полуплоскости относительно прямой (BC), что и точка A, стало быть, точки A и A_1 будут внутренними точками одной дуги $\smile BnC$, дополнительной по отношению к дуге $\smile CmB$. Таким образом, $\angle BAC$ и $\angle BA_1C$ — вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну дугу $\smile BmC$, а потому $\angle BAC = \angle BA_1C$, откуда $\widehat{BA_1C} = \widehat{BAC} = \alpha°$. В треугольнике BA_1C $\angle A_1CB$ прямой, так как опирается на диаметр BA_1. Согласно определению синуса величины острого угла прямоугольного треугольника $a = |BC| = |BA_1| \sin\alpha° = 2R\sin\alpha°$.

$\angle BAC$ — тупой (см. рис. 3.15 б), тогда дуга $\smile BmC$, на которую опирается угол $\angle BAC$, больше полуокружности, следовательно, центр O и вершина A лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (BC). Поэтому, если провести диаметр BA_1, то все его точки (кроме точки B), в том числе и конец A_1 окажутся в той же полуплоскости относительно прямой (BC), что и центр O, стало быть, точки A и A_1 будут внутренними точками взаимно дополнительных дуг $\smile CmB$ и $\smile CnB$. Таким образом, $\angle BAC$ и $\angle BA_1C$ — вписанные в окружность углы, опирающиеся на взаимно дополнительные дуги $\smile BmC$ и $\smile BnC$, а потому если $\widehat{BAC} = \alpha^\circ$, то $\widehat{BA_1C} = 180^\circ - \alpha^\circ$. В треугольнике BA_1C $\angle A_1CB$ прямой, так как опирается на диаметр BA_1. Согласно определению синуса величины острого угла прямоугольного треугольника и равенству $\sin(180^\circ - \alpha^\circ) = \sin\alpha^\circ$ $a = |BC| = |BA_1|\sin(180^\circ - \alpha^\circ) = 2R\sin\alpha^\circ$.

Если $\angle BAC$ — прямой (см. рис. 3.15 в), то BC — диаметр описанной окружности, $\widehat{BAC} = \alpha^\circ = 90^\circ$. Так как $|BC| = a = 2R$ и $\sin 90^\circ = 1$ то равенство $a = |BC| = 2R\sin\alpha^\circ$ верно и в этом случае.

Равенства $b = |AC| = 2R\sin\beta^\circ$, $c = |AB| = 2R\sin\gamma^\circ$ доказываются аналогично. Теорема синусов доказана.

Замечание. На основе теоремы синусов можно доказать, что в треугольнике против большей (меньшей) стороны лежит больший (меньший) угол, откуда, в частности, вытекает, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза — наибольшая сторона, а в тупоугольном треугольнике наибольшая сторона лежит против тупого угла. Об этом см. в учебнике А.В. Погорелова "Геометрия", §12, п. 111 и разобранную в тексте учебника (в этом же §) задачу 17. Однако эти соотношения между сторонами и углами треугольника могут быть доказаны и без терормы синусов, о чем можно прочитать, например, в учебнике геометрии А.П. Киселева.

Читателям предлагается самостоятельно сформулировать и доказать теорему, обратную теореме синусов.

3.5. Теоремы о параллельных прямых на плоскости

Из аксиомы о том, что через две различные точки можно провести единственную прямую, вытекает, что две различные прямые на плоскости или в пространстве имеют не более одной общей точки.

Определение 1. Две прямые, имеющие единственную общую точку, называются **пересекающимися**, *указанная точка называется их* **точкой пересечения**. Обозначаются $a \cap b$ или $a \cap b \equiv M$ (M — точка пересечения прямых a и b).

Из аксиомы о том, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость вытекает, что через прямую и не лежащую на ней точку, так же как и через две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна (единственная) плоскость.

Определение 2. Две прямые на плоскости называются **параллельными**, *если они не имеют общих точек (не пересекаются)* Обозначаются $a \parallel b$.

Из этого определения непосредственно вытекает, что $a \parallel b \Leftrightarrow b \parallel a$.

Из определения 2 и утверждения о разбиении на две полуплоскости прямой, лежащей на плоскости, вытекает, что каждая из двух различных параллельных прямых целиком располагается в одной полуплоскости относительно другой прямой, поскольку в противном случае эти прямые пересекались бы.

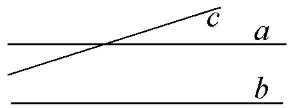


рис. 3.16 а

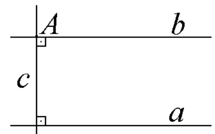


рис. 3.16 б

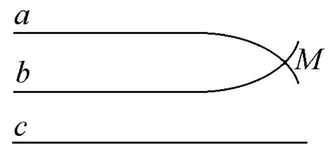


рис. 3.16 в

Аксиома. Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести на плоскости (проходящей через указанные точку и прямую) более одной прямой, параллельной данной.

Следствие. Если некоторая прямая, проходящая в плоскости некоторых двух параллельных прямых, пересекает одну из них, то она пересекает и другую.

В качестве теоремы можно доказать, что *через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости (проходящей через указанные точку и прямую) по крайней мере одну прямую, параллельную данной.* В частности, это может быть обосновано путем решения соответствующей задачи на построение циркулем и линейкой.

Следствие. Из аксиомы параллельности прямых и указанной теоремы вытекает, что через точку, не лежащую на прямой (в плоскости, содержащей эту точку и прямую), можно провести в указанной плоскости единственную прямую, параллельную данной. Стало быть, уже двух таких параллельных прямых провести нельзя.

От противного несложно доказать, что *две различные прямые на плоскости, параллельные третьей прямой на этой плоскости, параллельны.* Аналогичное утверждение справедливо и для трех прямых в пространстве.

Определения 3. Пусть даны две прямые a и b, лежащие в одной плоскости.

А) Прямая c, пересекающая каждую из них и не проходящая через их общую точку (если такая есть), называется **секущей**.

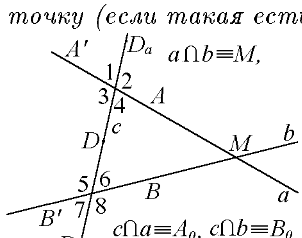


рис. 3.16 г

рис. 3.16 д

Б) Пары углов $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$ ($\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$) называются *внутренними (внешними) односторонними.*

В) Пары углов $\angle 3$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 5$ ($\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$) называются *внутренними (внешними) накрест лежащими.*

Г) Пары углов $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 8$ называются *соответственными.*

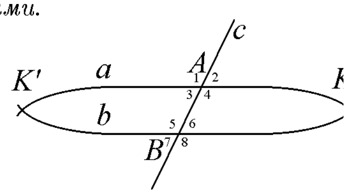


рис. 3.16 е

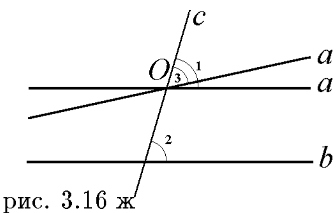


рис. 3.16 ж

Отметим характерные особенности накрест лежащих и односторонних углов (см. рис. 3.16 г, д, на которых не обозначены точки $A_0 \equiv c \cap a$ и $B_0 \equiv c \cap b$).

У накрест лежащих углов (как внутренних, так и внешних) образующие их лучи на прямых a и b (A_0A и B_0B' или A_0A' и B_0B) расположены в *разных полуплоскостях* относительно прямой c.

У односторонних углов (как внутренних, так и внешних) образующие их лучи на прямых a и b (A_0A и B_0B или A_0A' и B_0B') расположены в *одной полуплоскости* относительно прямой c.

У внутренних углов (как накрест лежащих, так и односторонних) образующие их лучи на прямой c (A_0D и B_0D) таковы, что точка D *лежит между* точками A_0 и B_0.

У внешних углов (как накрест лежащих, так и односторонних) образующие их лучи на прямой c (A_0D_a и B_0D_b) таковы, что точка D_a и точка D_b *не лежат между* точками A_0 и B_0.

Теорема 1 (признаки параллельности прямых). *Если какие-нибудь два внутренних или два внешних накрест лежащих угла равны, или сумма каких-нибудь внутренних или внешних односторонних углов равна развернутому углу (сумма градусных (радианных) мер этих углов равна* 180° (π)*), или какие-нибудь два соответственных угла равны, то прямые параллельны.*

Следствие. Две различные прямые на плоскости, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.

Теорема 2 (свойство параллельных прямых), обратная теореме 1.

Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой (секущей), то равны углы: внутренние накрест лежащие, внешние накрест лежащие, соответственные, а развернутому углу равны: сумма внутренних *односторонних углов, сумма внешних односторонних углов (сумма их градусных (радианных) мер равна $180^\circ(\pi)$).*

Следствие. Если прямая, лежащая в плоскости двух параллельных прямых, перпендикулярна одной из них, то она перпендикулярна и другой.

Доказательства этих теорем и их следствий можно найти, например, в книге [1] и многих учебниках геометрии.

3.6. Некоторые теоремы о четырехугольниках: признаки параллелограмма, свойства параллелограмма, тождество параллелограмма. Частные виды параллелограммов

Рассматриваемые здесь и далее четырехугольники являются частными случаями многоугольников с $n \geqslant 3$ сторонами (n- угольников при $n = 4$). Треугольник — n- угольник при $n = 3$.

Мы приведем ряд определений, связанных с многоугольником.

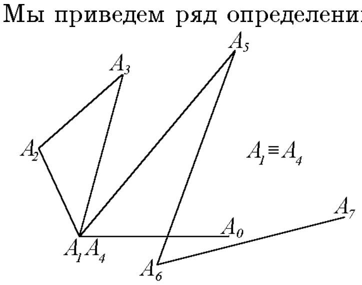


рис. 3.17 а

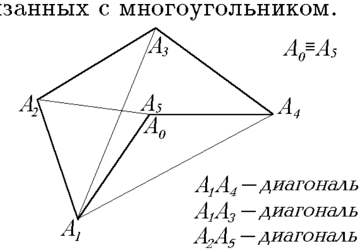


рис. 3.17 б

Определение 1. Геометрическая фигура (линия) на плоскости, образуемая отрезками A_0A_1, $A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$, расположенными так, что конец i-го отрезка (точка A_i) является началом $i+1$-го отрезка ($i = 1, 2, ..., n-1$, $n \geqslant 2$) и при всех этих $i \geqslant 1$ отрезки $A_{i-1}A_i$ и A_iA_{i+1} не лежат на одной прямой, называется **ломаной** *(ломаной линией)* и обозначается $A_0A_1A_2...A_{n-1}A_n$.

Указанные отрезки называются *сторонами* (или *звеньями*) ломаной, а точки A_0, A_1, ..., A_n — *вершинами* ломаной. Внутренние точки сторон ломаной и вершины ломаной называют *точками* ломаной.

Определение 1 А. Ломаная называется **замкнутой**, *если ее концы A_0 и A_n совпадают (являются одной точкой), при этом отрезки A_0A_1 и $A_{n-1}A_n$ не лежат на одной прямой.*

Определение 1 Б. Ломаная называется **простой**, *если она не имеет самопересечений (то есть никакие из ее вершин не совпадают, никакая из ее вершин не является внутренней точкой какой-либо из ее сторон и никакая пара ее сторон не имеет общей внутренней точки (то есть не* *пересекается)). В замкнутой простой ломаной совпадают только первый и последний концы.*

Определение 2. *Многоугольником (простым многоугольником) называется замкнутая ломаная (простая замкнутая ломаная).*

Вершины ломаной называются **вершинами** *многоугольника, а звенья ломаной —* **сторонами многоугольника**. Обозначается $A_1A_2...A_n$. *Отрезки, соединяющие не соседние вершины (то есть вершины, не являющиеся концами одного звена) многоугольника, называются* **диагоналями** (см. рис. 3.17 б).

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только простые многоугольники и под термином "многоугольник" будет пониматься простой многоугольник.

Определение 3. *Многоугольник с n вершинами и n сторонами называется n-***угольником** ($n \geqslant 3$).

Выше на рис. 3.17 а изображена ломаная, не являющаяся замкнутой и не являющаяся простой, на рис. 3.17 б изображена простая замкнутая ломаная — многоугольник, не являющийся выпуклым.

Определение 4. *Периметром многоугольника или ломаной называется сумма длин его сторон (соответственно) сумма длин ее звеньев.*

Определение 5. *Многоугольник называется* **выпуклым**, *если он лежит целиком в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости.*

Определение 6. *Общая часть полуплоскостей, фигурирующих в предыдущем определении, без сторон выпуклого многоугольника называется его* **внутренней** *областью, а остальная часть плоскости также без его сторон — его* **внешней** *областью.*

Определение 7. *Внутренняя область выпуклого многоугольника вместе с его сторонами называется* **плоским** *выпуклым многоугольником.*

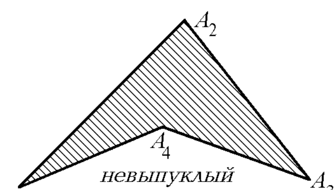


рис. 3.17 в

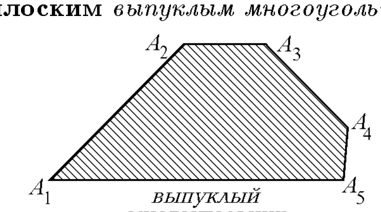


рис. 3.17 г

На приведенных рис. 3.17 в и г внутренние области многоугольников заштрихованы. О внутренней области невыпуклого многоугольника см. ниже, в дополнительной части этого вопроса.

Определение 8. **Внутренним углом** *при вершине* A_i $(i = 1, 2, ...n)$ *многоугольника* $A_1A_2...A_n$ *называется угол, образованный полупрямыми* A_iA_{i-1} *и* A_iA_{i+1} $(i = 2, 3, ..., n-1)$, *полупрямыми* A_1A_2 *и* A_1A_n *(при* $i = 1$*) и полупрямыми* A_nA_{n-1} *и* A_nA_1 *(при* $i = n$*). При этом внутренней областью этого угла считается та часть плоскости, которая содержит внутреннюю область многоугольника.*

Внутренний угол плоского многоугольника определяется таким же образом вместе с присоединенной к нему его внутренней областью (то есть как плоский угол).

Внутренней точкой многоугольника считается всякая точка, лежащая в его внутренней области.

Аналогично определениям $2'$, 3, 4 п. 3.1 определяются граница многоугольника, точка, лежащая на стороне многоугольника, внешняя точка многоугольника.

Пусть $ABCD$ — четырехугольник.

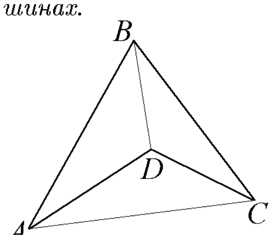
Определение 9. Стороны четырехугольника называются **противолежащими** *или* **противоположными**, *если они не имеют общих вершин.*

Определение 10. Стороны четырехугольника называются **смежными**, *если они имеют общую вершину.*

Определение 11. Вершины четырехугольника называются **противолежащими** *или* **противоположными**, *если они не являются концами одной из его сторон.*

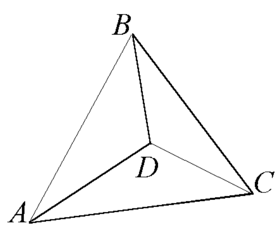
Определение 12. Углы четырехугольника называются **противолежащими** *или* **противоположными**, *если их вершины являются* **противолежащими** *или* **противоположными** *вершинами четырехугольника.*

Определение 13. В соответствии с определением 2 **диагональю** *четырехугольника называется отрезок с концами в его противолежащих вершинах.*



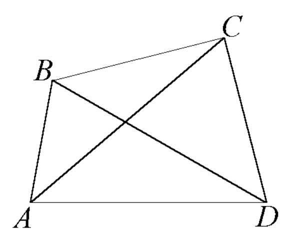
ABCD — четырехугольник
AC , BD — его диагонали

рис. 3.18 а



ADBC — четырехугольник
AB , CD — его диагонали

рис. 3.18 б



ABDC — четырехугольник
AD , CB — его диагонали

рис. 3.18 в

Обычно при выписывании обозначающих четырехугольник вершин их порядок таков, что противолежащие вершины *не стоят рядом.* Так, например, один и тот же четырехугольник $ABCD$ может быть обозначен как

$BCDA$, $CDAB$, $DABC$, $DCBA$, $CBAD$, $BADC$, $ADCB$, его противолежащими вершинами будут: пара вершин A и C, а также пара вершин B и D, его противолежащими сторонами будут пара сторон AB и CD и пара сторон AD и BC, его смежными сторонами будут стороны AB и BC, BC и CD, CD и AD, его диагоналями будут отрезки AC и BD. Однако в четырехугольнике $ACBD$ отрезки AC и BD уже будут сторонами, противолежащими сторонами будут пара сторон AC и BD и пара сторон BC и AD, а отрезки AB и CD — диагоналями. Поэтому четырехугольник $ACBD$ уже другой, нежели четырехугольник $ABCD$. См. рис. 3.18 а, б. На рис. 3.18 в изображен четырехугольник $ABDC$, у которого противоположные стороны AC и BD оказались даже пересекающимися.

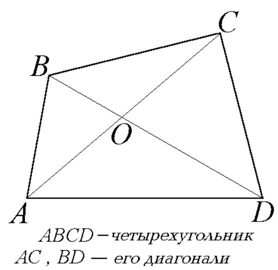


рис. 3.18 г

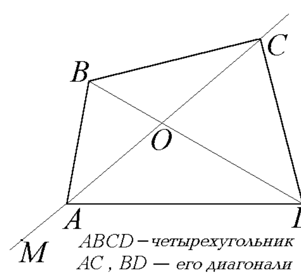


рис. 3.18 д

Можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. У выпуклого четырехугольника диагонали пересекаются, то есть имеют общую внутреннюю точку (точку их пересечения), которая находится во внутренней области этого четырехугольника.

Замечание 1. Отметим, что всякая внутренняя точка диагонали выпуклого четырехугольника (и вообще выпуклого многоугольника) принадлежат внутренней области этого четырехугольника (многоугольника), а всякая внешняя точка указанной диагонали находится во внешней области этого четырехугольника (многоугольника).

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 и замечание 1 не верны для невыпуклых четырехугольников (см. рис. 3.18 а, б, в).

Теорема 2 (обратная теореме 1). *Если в четырехугольнике диагонали пересекаются (как отрезки), то этот четырехугольник выпуклый.*

Доказательства теорем 1 и 2 и замечаний к теореме 1 можно найти в книге [1].

В предыдущем п. 3.5 были приведены важные понятия, связанные с пересекаемостью и параллельностью прямых, и сформулированы основные признаки и свойства (а стало быть, *критерии*) параллельности прямых. Некоторые из них будут применены в этом пункте.

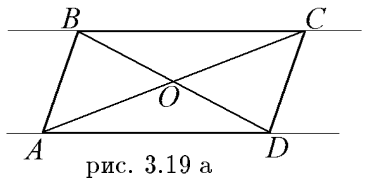


рис. 3.19 а

Определение 6. Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (то есть лежат на параллельных прямых). Обозначается параллелограмм знаком $\#$.

Свойства параллелограмма.

Теорема 3. Параллелограмм — выпуклый четырехугольник.

Доказательство

См. рис. 3.19 а. Пусть $ABCD$ — $\#$, $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, тогда как отмечалось выше, после определения 2 п. 3.5 вся прямая (BC) будет располагаться в одной полуплоскости плоскости относительно прямой (AD). Стало быть, в частности, в этой же полуплоскости будут лежать точки B и C, а потому — и луч AB, и отрезок AB, и луч DC, и отрезок DC, то есть $\#ABCD$ оказался в одной полуплоскости относительно прямой (AD), содержащей его сторону AD. Совершенно аналогично мы докажем расположение $\#ABCD$ в одной полуплоскости относительно прямой (BC), в одной полуплоскости относительно прямой (AB) и в одной полуплоскости относительно прямой (DC). В соответствии с определением 4 это означает, что $\#ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Теорема 3 доказана.

Следствие. Диагонали параллелограмма пересекаются (как отрезки) в некоторой точке его внутренней области (см. рис. 3.19 а).

Доказательство

Это утверждение сразу вытекает из теорем 1 и 3 этого вопроса.

Теорема 4. В параллелограмме:

1) *диагональ делит его на два равных треугольника*;
2) *противоположные стороны равны*;
3) *противоположные углы равны*;
4) *сумма углов, прилежащих одной стороне, равна развернутому углу (сумма их градусных (радианных) мер равна* 180° (π)*)*;
5) *диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам*;
6) *сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.*

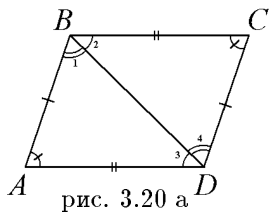


рис. 3.20 а

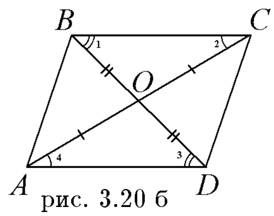


рис. 3.20 б

Доказательства

См. рис. 3.20 а. Пусть $ABCD$ — #, $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, BD — диагональ, рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle DBC$, у них сторона BD — общая, $\angle 1 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при $(AB) \parallel (CD)$ и секущей (BD), $\angle 2 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при $(BC) \parallel (AD)$ и секущей (BD), следовательно, $\triangle ABD = \triangle CDB$ (по второму признаку, то есть по стороне и двум прилежащим ей углам). Так как в равных треугольниках против соответственно равных углов (сторон) лежат соответственно равные стороны (углы), то $AB = CD$, $BC = AD$ и $\angle A = \angle C$. Проводя другую диагональ AC, мы аналогичным образом докажем, что $\angle B = \angle D$. Отметим, что так как $\angle B = \angle 1 + \angle 2$, $\angle D = \angle 3 + \angle 4$, то отсюда вытекает равенство углов B и D. Таким образом, доказаны первые три свойства параллелограмма. Четвертое свойство вытекает из свойств параллельных прямых (см. выше п. 3.5 теорема 2).

См. рис. 3.20 б. Пересечение диагоналей у $\#ABCD$ доказано выше (см. следствие теоремы 3), пусть $O \equiv AC \cap BD$. Рассмотрим $\triangle AOD$ и $\triangle COB$, у них $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BD, $\angle 2 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC, $AD = BC$ по доказанному, следовательно $\triangle AOD = \triangle COB$ (по второму признаку), а потому соответственно $OC = OA$ и $OB = OD$. Итак, первые пять свойств параллелограмма доказаны. Шестое свойство о соотношении квадратов длин диагоналей и сторон параллелограмма доказано выше, в п. 3.4 как следствие теоремы косинусов для треугольника.

Признаки параллелограмма.

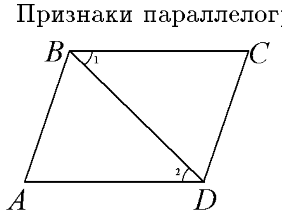


рис. 3.20 в

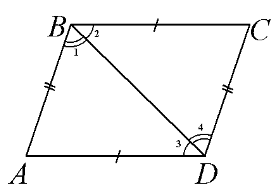


рис. 3.20 г

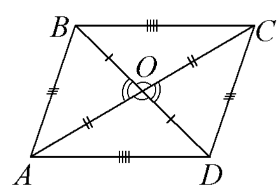


рис. 3.20 д

Теорема 5. Если у выпуклого четырехугольника две стороны параллельны и равны, то он — параллелограмм.

Доказательство

См. рис. 3.20 в. Пусть у четырехугольника $ABCD$: $AD \parallel BC$ и $AD = BC$, проведем в $ABCD$ диагональ BD, в силу выпуклости $ABCD$ эта диагональ будет находиться в его внутренней области, $\triangle ABD$ и $\triangle CDB$ будут расположены в разных полуплоскостях плоскости этого четырехугольника относительно прямой (BD). Рассмотрим $\triangle ADB$ и $\triangle DBC$, у них $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при $(BC) \parallel (AD)$ и секущей (BD), $AD = BC$ по условию, BD — общая сторона, следовательно, $\triangle CDB = \triangle ADB$ (по первому признаку — по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, так как в равных треугольниках против равных сторон (углов) лежат равные углы (стороны), $\angle ABD = \angle BDC$, а потому в силу признака параллельности прямых $(AB) \parallel (CD)$, поскольку $\angle ABD$ и $\angle BDC$ — внутренние накрест лежащие при прямых (AB) и (CD) и секущей (BD), следовательно, у четырехугольника $ABCD$ $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$, а потому по определению 6 он — параллелограмм. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Если у выпуклого четырехугольника противолежащие стороны попарно равны, то он — параллелограмм.

Доказательство

См. рис. 3.20 г. Пусть у четырехугольника $ABCD$: $AB = CD$ и $AD = BC$, проведем в $ABCD$ диагональ BD, в силу выпуклости $ABCD$ эта диагональ будет находиться во его внутренней области, $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ будут расположены в разных полуплоскостях плоскости этого четырехугольника относительно прямой (BD). Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle CDB$, у них сторона BD — общая, $AB = CD$ и $AD = BC$, следовательно, $\triangle ABD = \triangle CDB$ (по третьему признаку — по трем сторонам). Следовательно, так как в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$, а потому в силу признака параллельности прямых $(AB) \parallel (CD)$, поскольку $\angle 1$ и $\angle 4$ — внутренние накрест лежащие при прямых (AB) и (CD) и секущей (BD), $(BC) \parallel (AD)$, поскольку $\angle 2$ и $\angle 3$ — внутренние накрест лежащие при прямых (BC) и (AD) и секущей (BD), следовательно у четырехугольника $ABCD$: $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$, а потому по определению 6 он — параллелограмм. Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам (на два равных отрезка), то он — параллелограмм.

Доказательство

См. рис. 3.20 д. Пусть у четырехугольника $ABCD$: AC и BD — диагонали, O — точка их пересечения, в силу теоремы 2 $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Рассмотрим пару треугольников AOD и COB, у них $OA = OC$, $OB = OD$ по условию, $\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные, следовательно по первому признаку равенства треугольников $\triangle AOD = \triangle COB$, а потому $AD = BC$. Аналогично, рассматривая пару треугольников AOB и COD, у которых $OA = OC$, $OB = OD$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные, мы также получим, что (по первому признаку) эти треугольники равны, а потому $AB = CD$. Следовательно, у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны оказались попарно равны, а потому в силу теоремы 6 $ABCD$ — параллелограмм. Теорема 7 доказана.

Теорема 8. Если в выпуклом четырехугольнике противоположные углы попарно равны, то он — параллелограмм.

Доказательство

Пусть в четырехугольнике $ABCD$: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, в силу теоремы 3 п. 3.5 сумма всех внутренних углов выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна удвоенному развернутому углу, то есть — полному углу. Так как из равенств $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$ следует, что $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ и равны эти суммы развернутому углу, откуда вытекает, что $AB \parallel CD$, аналогично $\angle A + \angle D = \angle C + \angle B$ и равны эти суммы также развернутому углу, откуда следует, что $AD \parallel BC$, следовательно $ABCD$ — параллелограмм. Теорема 8 доказана.

Отметим еще замечание к теореме 5, выражающей признак параллелограмма.

Замечание. В условии теоремы 5 можно не требовать выпуклости четырехугольника, достаточно потребовать, чтобы он был простым (см. выше определение 2).

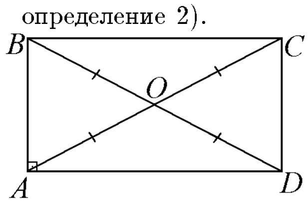


рис. 3.21 а

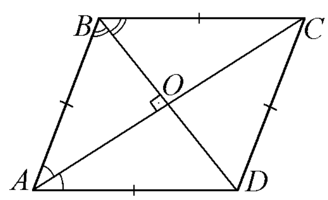


рис. 3.21 б

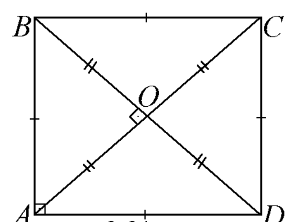


рис. 3.21 в

Рассмотрим некоторые частные случаи параллелограммов с доказательством некоторых их свойств.

Определение 7. **Прямоугольником** *называется параллелограмм, у которого хотя бы один внутренний угол прямой.*

Из этого определения и свойств углов параллелограмма (см. выше теорему 4, свойства 3) и 4) вытекает, что если в параллелограмме имеется прямой угол, то противолежащий ему угол также прямой и остальные два угла, как прилежащие к одной стороне этого параллелограмма и составляющие в сумме с ним развернутый угол, тоже прямые. Следовательно, в параллелограмме все углы — прямые.

Замечание. Традиционно в учебной и справочной литературе прямоугольник *определяется* как параллелограмм, у которого все углы прямые. Однако, как видно из приведенных рассуждений, такое "переопределенное" определение прямоугольника по сути дела является теоремой, доказываемой на основе определения 7 и свойств углов параллелограмма.

Отметим, что прямоугольник как частный случай параллелограмма обладает всеми его свойствами (см. выше теорему 4), однако его диагонали обладают свойством, которым диагонали произвольного параллелограмма, вообще говоря, не обладают. А именно, имеет место теорема.

Теорема 9. Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство

См. рис. 3.21 а. Рассмотрим треугольники ABD и ADC, у которых сторона AD — общая, $AB = DC$ по свойству параллелограмма, $\angle BAD = \angle CDA$ как прямые углы, следовательно, $\triangle ABD = \triangle ADC$ по двум сторонам и углу между ними, а потому $AC = BD$. Теорема 9 доказана.

Имеет место и обратная теорема.

Теорема $9'$. *Если в параллелограмме диагонали равны, то он — прямоугольник.*

Доказательство этой теоремы проводится на основе равенства треугольников DAB и ADC по трем сторонам, откуда вытекает равенство углов DAB и ADC. Поскольку в силу параллельности сторон AB и DC $\angle DAB + \angle ADC$ — развернутый угол, то каждый из углов $\angle DAB$ и $\angle ADC$ — прямой, это по определению 7 означает, что $ABCD$ — прямоугольник.

Определение 8. **Ромбом** *называется параллелограмм, у которого хотя бы две смежные стороны равны.*

Из этого определения и свойств сторон параллелограмма (см. выше теорему 4, свойство 2) вытекает, что если в параллелограмме хотя бы две смежные стороны равны, то им будут равны и другие две его стороны как соответственно противоположные им. Следовательно, в ромбе все стороны равны.

Замечание. Традиционно в учебной и справочной литературе ромб *определяется* как параллелограмм, у которого все стороны равны. Однако, как видно из только что приведенных рассуждений, такое "переопределенное" определение ромба по сути дела является теоремой, доказываемой на основе определения 8 и свойств сторон параллелограмма.

Отметим, что ромб как частный случай параллелограмма обладает всеми его свойствами (см. выше теорему 4), однако его диагонали обладают свойствами, которыми диагонали произвольного параллелограмма, вообще говоря, не обладают. А именно, имеет место теорема.

Теорема 10. Диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов и взаимно перпендикулярны.

Доказательство

См. рис. 3.21 б. Рассмотрим треугольники ABD и CBD, каждый из них является равнобедренным с общим основанием BD. Так как в силу свойства диагоналей параллелограмма (см. теорему 4, свойство 5) $OB = OD$ OA и OC — медианы $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ соответственно. Следовательно, в силу свойств равнобедренного треугольника (см. выше вопрос 2) $\angle DAO = \angle BAO$, $\angle DCO = \angle BCO$ и $AC \perp BD$. Аналогичным образом, рассматривая $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$, докажем равенства углов: $\angle ABO = \angle CBO$, $\angle ADO = \angle CDO$. Теорема 10 доказана. Имеет место и обратная теорема.

Теорема $10'$. *Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны или хотя бы одна из его диагоналей является биссектрисой хотя бы одного из его внутренних углов, то он — ромб.*

Доказательство

Если в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, то, рассматривая, например, $\triangle ABC$, у которого высота BO (по условию) является медианой (по свойству диагоналей параллелограмма), получим, что он равнобедренный ($AB = BC$), в силу определения 8 это означает, что $ABCD$ — ромб.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A, тогда $\angle BAC = \angle DAC$, поскольку в силу параллельности сторон AD и BC, вытекают равенства углов $\angle BAC = \angle ACD$, откуда в силу транзитивности равенства углов $\angle DAC = \angle ACD$, а потому $\triangle ADC$ — равнобедренный, $AD = DC$, получили, что в параллелограмме $ABCD$ равны две смежные стороны AD и DC, следовательно в силу определения 8 $ABCD$ — ромб. Теорема $10'$ полностью доказана.

Определение 9. **Квадратом** *называется параллелограмм, у которого хотя бы один внутренний угол прямой и хотя бы две смежные стороны равны* (см. рис. 3.21 в).

Из этого определения и определений 7 и 8 вытекает, что квадрат — это параллелограмм, который является и прямоугольником, и ромбом. Поэтому он обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба, в частности все его стороны равны, а все его внутренние (и внешние) углы — прямые; его диагонали обладают всеми свойствами диагоналей параллелограмма, прямоугольника и ромба, то есть, в частности, они равны, взаимно перпендикулярны, являются биссектрисами его внутренних углов.

Можно сформулировать и доказать аналогичные теоремам $9'$ и $10'$ признаки квадрата. Например, если у параллелограмма диагонали равны и взаимно перпендикулярны, то он квадрат.

Замечание. Квадрат можно определить и как прямоугольник, у которого хотя бы две смежные стороны равны, и как ромб, у которого хотя бы один внутренний угол прямой.

Выше вводилось определение расстояния от точки до прямой как длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую. Докажем следующую теорему.

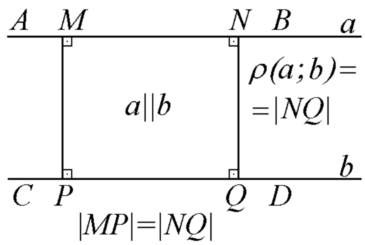


рис. 3.21 г

Теорема 11. Если две прямые параллельны, то расстояния от любой точки одной из этих прямых до другой прямой равны. Другими словами, все точки одной из параллельных прямых одинаково удалены от другой из этих прямых, это означает, что параллельные прямые везде одинаково удалены одна от другой.

Доказательство

См. рис. 3.21 г. Пусть $(AB) \parallel (CD)$, опустим из точки $M \in (AB)$ перпендикуляр MP на прямую (CD), точка $P \in (CD)$ — основание перпендикуляра MP, опустим также из точки $N \in (AB)$, $N \not\equiv M$ перпендикуляр NQ на прямую (CD), точка $Q \in (CD)$ — основание перпендикуляра NQ. Как отмечалось выше, в следствиях из теорем 3 и 4 п. 3.5 из того, что $(MP) \perp (CD)$ и $(NQ) \perp (CD)$ вытекает, что $(MP) \parallel (NQ)$, $(MP) \perp (AB)$ и $(NQ) \perp (AB)$ а так как $(AB) \parallel (CD)$, то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, причем с прямыми внутренними углами, то есть — прямоугольник. Следовательно, в силу второго свойства параллелограмма (см. выше теорему 4) $MP = NQ \Rightarrow |MP| = |NQ|$. Теорема 11 доказана.

На основе результата этой теоремы можно ввести определение расстояния между параллельными прямыми.

Определение 10. Пусть прямые a и b параллельны (см. рис. 3.21 г). *Расстоянием между параллельными прямыми a и b называется длина их общего перпендикуляра (то есть отрезка прямой, перпендикулярной им, концы которого лежат на этих прямых).* Обозначения $\rho(a;b)$ или $\rho((AB);(CD))$, $\rho(a;b) = \rho((AB);(CD)) = |MP| = |NQ|$.

3.7. Свойства средней линии треугольника. Свойства средней линии трапеции

Определение 1. **Трапецией** *называется четырехугольник,* * [8] *у которого по крайней мере две стороны параллельны.*

Из этого определения вытекает, что параллелограмм является трапецией (то есть # — частный случай трапеции). См. рис. 3.22 а, б.

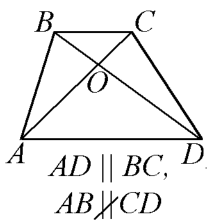


рис. 3.22 а

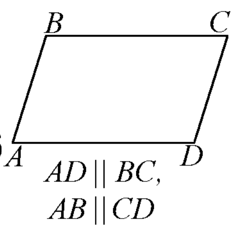


рис. 3.22 б

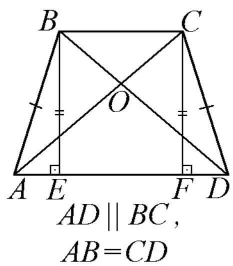


рис. 3.22 в

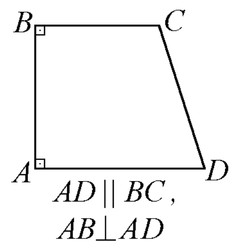


рис. 3.22 г

Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями***, а две другие стороны — ее* **боковыми сторонами**.

Если боковые стороны трапеции равны, но или не параллельны между собой, или перпендикулярны одному из ее оснований, то она называется **равнобедренной (равнобокой или равнобочной)**. См. рис. 3.22 в.

Если трапеция имеет хотя бы один прямой угол, то она называется **прямоугольной**. См. рис. 3.22 г.

Так как (см. доказательство теоремы 11 п. 3.6) все отрезки с концами на основаниях трапеции, которые лежат на прямых, перпендикулярных этим основаниям, равны между собой, то можно определить *высоту* трапеции, как любой такой отрезок.

Имеет место теорема.

Теорема 1. Трапеция — выпуклый четырехугольник.

Доказательство см. в книге [1].

Следствие. В силу теоремы 1 п. 3.6 диагонали трапеции (как отрезки) пересекаются и точка их пересечения находится во внутренней области трапеции.

Теорема 2. У равнобедренной трапеции внутренние углы при каждом из оснований равны и диагонали равны.

[8]* Напомним, что под термином "четырехугольник" мы понимаем простой многоугольник с четырьмя сторонами, определение простого многоугольника см. выше, в п. 3.6.

Доказательство

Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, у которой $AD \parallel BC$ и $AB = CD$ (см. рис. 3.22 в). Пусть $BE \perp AD$ и $CF \perp AD$, в силу теоремы 11 п. 3.6 $BE = CF$, а потому по катету и гипотенузе $\triangle ABE = \triangle DCF$. Следовательно, $\angle BAD = \angle CDA$, а потому и $\angle ABC = \angle DCB$. Если провести в этой трапеции диагонали AC и BD, то рассматривая $\triangle ABD$ и $\triangle DCA$, у которых $AB = CD$, AD — общая сторона $\angle BAD = \angle CDA$, получим, что они равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AC = BD$.

Определение 2. **Средней линией** *треугольника называется отрезок с концами на серединах (соединяющий середины) двух его сторон.*

Определение 3. **Средней линией** *трапеции называется отрезок с концами на серединах (соединяющий середины) ее боковых сторон.*

Теорема 3. Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух каких-либо его сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Теорема 4. Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.

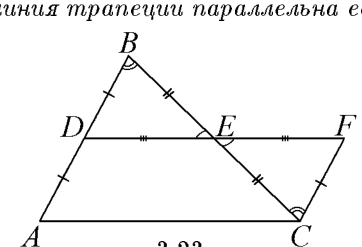


рис. 3.23 а

Доказательство теоремы 3

Формулировка теоремы 3 означает, что прямая, содержащая среднюю линию треугольника, параллельна прямой, содержащей его третью сторону.

См. рис. 3.23 а. Пусть в $\triangle ABC$ DE — средняя линия, которая соединяет отрезком середины D и E сторон AB и BC соответственно. Тогда по определению 2 $AD = DB$, $CE = EB$. Отложим на полупрямой, дополнительной относительно полупрямой ED, отрезок $EF = EA$, стало быть, точки D и F будут в разных полуплоскостях относительно прямой (BC). А поскольку D — середина стороны AB, то точки A и D будут в одной плоскости относительно прямой (BC), тогда точки A и F будут в разных полуплоскостях относительно прямой (BC). Стало быть, лучи BA и CF будут в разных полуплоскостях относительно прямой (BC), а потому $\angle ABC$ и $\angle BCF$ будут внутренними накрест лежащими углами при прямых (BA) и (CF) и секущей (BC). Далее, в треугольниках EDB и

EFC: $\angle DEB = \angle FEC$ как вертикальные, стороны $BE = EC$ согласно условиям теоремы, стороны $DE = EF$ по построению. Следовательно, $\triangle EDB = \triangle EFC$ (по двум сторонам и углу между ними), стало быть, стороны $CF = DB$ и $\angle DBE = \angle ECF$. Согласно соответствующему признаку параллельности прямых (см. п. 3.5) $CF \parallel BD$, а, стало быть, и $CF \parallel DA$, далее, поскольку по условию $DB = AD$, то $CF = DA$. Таким образом, в четырехугольнике $ADFC$ есть пара противоположных параллельных и равных сторон, а потому $ADFC$ — параллелограмм, откуда уже следует параллельность DE и AC и равенство сторон $AC = DF$. По построению $DF = 2DE$, стало быть, и $AC = 2DE$, откуда $DE = \dfrac{AC}{2} \Leftrightarrow |DE| = \dfrac{|AC|}{2}$. Теорема 3 доказана.

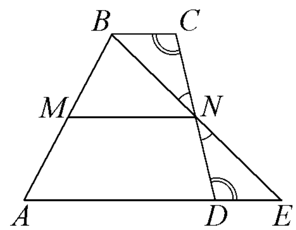


рис. 3.23 б

Доказательство теоремы 4

Формулировка теоремы 4 означает, что прямая, содержащая среднюю линию трапеции параллельна прямым, содержащим ее основания.

См. рис. 3.23 б. Пусть $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, MN — ее средняя линия, которая соединяет отрезком середины M и N сторон AB и CD соответственно. Тогда по определению 3: $AM = MB$, $CN = ND$.

Проведем прямую через точки B и N, так как точки B, C и N не лежат на одной прямой, то точка B — точка пересечения прямых (BC) и (BN). В силу следствия из аксиомы параллельности прямых так как $(BC) \parallel (AD)$, то прямая (BN) пересечет прямую (AD) в некоторой точке E. В силу выпуклости трапеции $ABCD$ (см. теорему 1) точки B и N лежат в одной полуплоскости относительно прямой (AD). Следовательно, точки E и N — различные. Точка E так же отлична от точки D, поскольку в противном случае прямые (CD) и (BE) совпадали бы, а это не так. Если предположить, что точка E лежит на луче (DA), то тогда отрезок BE целиком лежал бы в полуплоскости относительно прямой (CD) и не мог бы пересекать сторону CD в точке N. Таким образом, точка E лежит на луче, дополнительном лучу DA, стало быть, точка D лежит между точками A и E, лучи DE и DA будут в разных полуплоскостях относительно прямой (BC), а потому $\angle NED$ и $\angle NBC$ будут внутренними накрест лежащими при $(AD) \parallel (BC)$ и секущей (BE).

Рассмотрим $\triangle BNC$ и $\triangle END$. У них $\angle BNC = \angle DNE$ как вертикальные, $\angle NCB = \angle NDE$ как внутренние накрест лежащие при $(CB) \parallel (DE)$ и секущей (CD), $CN = ND$ по условию. Следовательно, $\triangle BNC = \triangle END$ по стороне и двум прилежащим ей углам, а потому $BN = NE$ и $BC = DE$ как стороны, лежащие против соответственно равных углов. Таким образом, для $\triangle ABE$: MN — средняя линия, а поэтому по теореме 2 $MN = AE/2 = (AD + DE)/2 = (AD + BC)/2$. Теорема 4 полностью доказана.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 4 мы нигде не использовали параллельность или не параллельность боковых сторон трапеции AB и CD. В случае $AB \parallel CD$ вытекало бы, что $AM = MB = AB/2 = CD/2 = CN = ND$, откуда в силу $AM \parallel DN$, $MB \parallel NC$ следовало, что $AMND$ и $MBCN$ — параллелограммы, а потому $AD \parallel MN \parallel BC$ и $AD = MN = BC = (AD + BC)/2$.

Замечание 2. Поскольку применительно к параллелограмму верна и теорема о площади трапеции (она равна произведению длины средней линии трапеции на длину ее высоты), то естественно считать параллелограмм частным случаем трапеции, что не во всех учебниках принято.

Замечание 3. Поскольку около любой равнобедренной трапеции (в смысле определения 1) можно описать окружность, а около параллелограмма, не являющегося прямоугольником, описать окружность нельзя, то поэтому в определении равнобедренной трапеции условие непараллельности или перпендикулярности хотя бы одному из ее оснований боковых сторон является существеным.

3.8. **Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности**

Для вывода формулы расстояния между точками на координатной плоскости необходимо рассмотреть вопрос и о расстоянии между точками на числовой оси (числовой прямой или координатной прямой). Напомним определение числовой прямой.

Определение 1. Пусть на некоторой прямой a выбраны: точка O — начало отсчета, масштабный отрезок OE, где точки O и E различные, длина которого считается равной единице (единица измерения отрезков), и положительное (от точки O к точке E) и противоположное ему отрицательное направления. Тогда эту прямую называют **числовой** *или* **координатной прямой**.

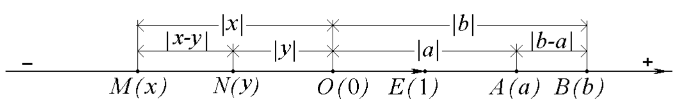


рис. 3.24 а

Напомним теорему об обосновании координатного метода на прямой.

Теорема 1. Между множествами всех действительных чисел R и всех точек числовой прямой (оси) M можно установить взаимно однозначное соответствие, причем если прямая расположена горизонтально, то из двух точек M_1 и M_2 на этой прямой лежащей правее (левее) соответствует большее (меньшее) действительное число и наоборот, из двух действительных чисел большему (меньшему) из них соответствует точка на числовой прямой, лежащая правее (левее).

Действительное число x, взаимно однозначно соответствующее точке M на числовой оси, называется **координатой** *(числовой координатой) этой точки.* Обозначается $M(x)$. Точке O — началу отсчета соответствует число 0, то есть $O(0)$, точке E соответствует число 1, то есть $E(1)$ (см. рис. 3.34 а).

Подробнее об этой теореме и всех фигурирующих в ней терминах можно найти в книге [1].

Определение 2. **Расстояние**м *между двумя точками M и N или на прямой, или на плоскости, или в пространстве называется длина отрезка MN, то есть $|MN|$* . Обозначается расстояние между точками M и N $\rho(M;N)$.

Таким образом, $\rho(M;N) \overset{df}{=} |MN|$ и оно положительно во всех случаях кроме случая совпадения точек, когда оно равно нулю.

Отметим, что справедлива теорема о том, что $\forall a > 0$ от данной точки на данной полупрямой (то есть на полупрямой с началом в данной точке) можно отложить единственный отрезок, длина которого равна a. При этом можно убедиться, что если в качестве начальной точки полупрямой выступает начало отсчета O, именно точка M — $M(a)$, лежащая правее точки O, такова, что $|OM| = a$, и именно точка M' — $M'(-a)$, лежащая левее точки O, такова, что $|OM'| = a$. Точек $\tilde{M}$ на числовой оси, отличных как от M, так и от M' таких, что $|O\tilde{M}| = a$, не существует. Следовательно, если число $x \in R$ является координатой точки M на числовой оси, то $\rho(O;M) = |OM| = |x|$. Таким образом, геометрический смысл модуля действительного числа x — расстояние от точки M на числовой оси с координатой x до точки O — начала отсчета на этой оси.

Теорема 2. Пусть $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — точки на числовой оси со своими координатами. Тогда $\rho(M_1;M_2) = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|$.

Доказательство

Рассмотрим следующие случаи:

А) $M_1 \equiv A(a)$, $M_2 \equiv B(b)$. См. рис. 3.24 а, где точка A лежит не левее точки O на числовой оси, то есть или $A \equiv O$, или A лежит правее O, а точка B лежит правее точки A. В силу теоремы 1: $b > a \geqslant 0$. При указан-

ных условиях при расположении точки A правее точки O эта точка будет лежать между точками O и B, а потому в силу определений суммы отрезков, длины отрезка, свойств длины отрезка в рассматриваемом случае (в том числе и когда $A \equiv O$) $OB = OA + AB \Rightarrow |OB| = |OA| + |AB| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |AB| = |OB| - |OA| = |b| - |a| = b - a = |b - a| = |a - b|$.

Б) $M_1 \equiv M(x),\ M_2 \equiv N(y)$. См. рис. 3.24 а, где точка N лежит не правее точки O на числовой оси, то есть или $N \equiv O$, или N лежит левее O, а точка M лежит левее точки N. В силу теоремы 1: $x < y \leqslant 0$. При указанных условиях при расположении точки N левее точки O эта точка будет лежать между точками O и M, а потому аналогично случаю А) в рассматриваемом случае (в том числе и когда $N \equiv O$) $OM = ON + NM \Rightarrow |OM| = |ON| +$
$+|NM| \Leftrightarrow |NM| = |OM| - |ON| = |x| - |y| = -x + y = |y - x| = |x - y|$.

В) $M_1 \equiv N(y),\ M_2 \equiv A(a)$. См. рис. 3.24 а, где точка N лежит левее точки O на числовой оси, а точка A лежит правее точки O. В силу теоремы 1: $y < 0 < a$. При указанном расположении точек N, O и A точка O будет лежать между точками N и A, а потому $NA = NO + OA \Rightarrow |NA| =$
$= |ON| + |OA| = |y| + |a| = -y + a = |a - y| = |y - a|$.

Г) $M_1 \equiv M_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ (в силу теоремы 1). При этом
$\rho(M_1; M_2) \stackrel{df}{=} |M_1M_2| \stackrel{df}{=} 0 = |x_2 - x_1|$. Теорема 2 полностью доказана.

Определение 3. Отрезок AB называется **направленным**, *если он задан* **упорядоченной парой** *[9] *точек A и B*. Обозначается $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$. В этих обозначениях точка A первая (начальная), точка B вторая (конечная).

Если точки A и B различные, то направление вектора $\overrightarrow{AB}$ (от начальной точки A к конечной точке B) считается таким, при котором на выбранном направлении на прямой (AB) точка A *предшествует* точке B (по поводу понятия "предшествует" см. [1], О11 стр. 158).

Если точки A и B совпадают ($A \equiv B$), то направленный отрезок $\overline{AA}$ или $\overrightarrow{AA}$ называется *нулевым*. Направление нулевого вектора *считается неопределенным*. Для нулевых направленных отрезков используются обозначения $\overline{0}$ или $\overrightarrow{0}$.

Для направленных отрезков вводится понятие *длины*, имеющее такой же смысл, что и для обычного отрезка AB. Длина направленного отрезка обозначается $|\overline{AB}|$. С учетом того, что длина отрезка AB обозначалась $|AB|$, $|\overline{AB}| = |AB|$. Поэтому длина любого ненулевого направленного отрезка — число положительное, а длина нулевого вектора равна нулю ($|\overline{AA}| = 0$).

[9]* Пара точек считается упорядоченной, если указано, какая из них — первая, а какая из них — вторая.

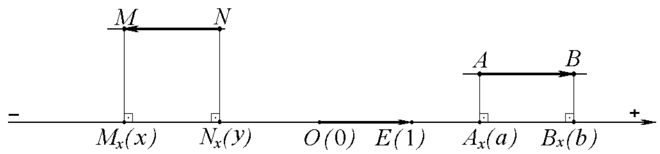


рис. 3.24 б

Пусть некоторый направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ или лежит на числовой оси, или лежит на прямой, параллельной числовой оси. Тогда x_1 и x_2 — координаты точек M_1 и M_2 соответственно (в случае принадлежности числовой оси отрезка $\overline{M_1M_2}$), или x_1 и x_2 — координаты точек M_{1x} и M_{2x}, где M_{1x} и M_{2x} — основания перпендикуляров, проведенных из точек M_1 и M_2 (проекций точек M_1 и M_2) соответственно, на числовую ось.

Определение 4. **Величиной** *направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ называется число, равное x_2-x_1, где x_1 и x_2 — координаты точек начала и конца указанного направленного отрезка (или их проекций) на числовой оси.* Величина направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ обозначается M_1M_2, при этом существенен порядок точек M_1 и M_2 (в отличии от обычного отрезка M_1M_2).

Из этого определения вытекает, что при $M_1 \not\equiv M_2$ $M_1M_2 = |M_1M_2|$, если направление $\overline{M_1M_2}$ совпадает с положительным направлением числовой оси (то есть точка M_1 или ее проекция предшествует точке M_2 или ее проекции на числовую ось), и $M_1M_2 = -|M_1M_2|$, если направление $\overline{M_1M_2}$ противоположно положительному направлению (совпадает с отрицательным направлением) числовой оси (то есть точка M_2 или ее проекция предшествует точке M_1 или ее проекции на числовую ось). Если $M_1 \equiv M_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ($\overline{M_1M_2}$ — нулевой), то его величина равна нулю ($M_1M_1 = M_2M_2 = 0$). Если изменить порядок концов направленного отрезка, то его длина не изменится, а величина изменит знак на противоположный $M_1M_2 = -M_2M_1$, $|M_1M_2| = |M_2M_1|$.

Выше, на рис. 3.24 б $AB = |AB| = |b-a| = b-a$,
$MN = -|MN| = -|y-x| = -(y-x) = x-y$, $OE = |OE| = 1-0 = 1$.

Определение 5. Если на некоторой плоскости α заданы две взаимно перпендикулярные числовые прямые с общим началом отсчета (точкой O их пересечения), равными на этих осях единицами измерения отрезков (то есть единым масштабом на всей плоскости), то говорят, что на этой плоскости задана **декартова прямоугольная система координат***, эта плоскость называется* **координатной плоскостью***, а эти оси называются* **координатными осями***, точка O называется* **началом координат**.

Если одна из этих осей расположена горизонтально — ось абсцисс, а другая — вертикально — ось ординат, то положительное (отрицательное) направления на них выбраны соответственно вправо (влево) и вверх (вниз) от точки O. Ось абсцисс обозначается Ox, ось ординат обозначается Oy, координатная плоскость обозначается Oxy.

Теорема 3. Между множествами всех точек M координатной плоскости и всех упорядоченных пар действительных чисел $(x;y)$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Схему доказательства этой теоремы см. [1], стр. 304 — 306. Упорядоченную пару чисел $(x;y)$, где $x;y \in R$ называют *координатами* точки M *на плоскости*, обозначают $M(x;y)$, x — абсцисса точки M, y — ордината точки M. Точка O — начало координат имеет координаты равные нулю, то есть $O(0;0)$ (см. рис. 3.25 а). Координаты точки $M(x;y)$ — координаты ее проекций *на оси абсцисс* $M_x(x)$ и *на оси ординат* $M_y(y)$ соответственно (см. рис. 3.25 а). Отметим, что две упорядоченные пары чисел $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ считаются совпадающими (различными), если

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x_2 - x_1)^2 + \\ +(y_2 - y_1)^2 = 0 \end{matrix} \quad \left(\left[\begin{matrix} x_1 \neq x_2 \ ; \\ y_1 \neq y_2 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{matrix} (x_2 - x_1)^2 + \\ +(y_2 - y_1)^2 > 0 \end{matrix} \right) .$$

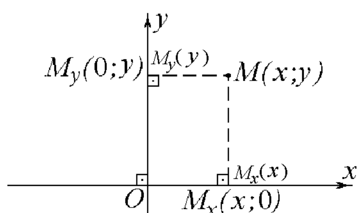


рис. 3.25 а

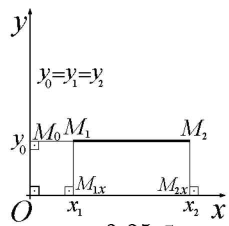


рис. 3.25 б

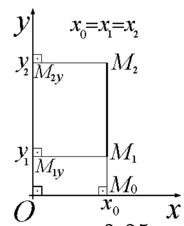


рис. 3.25 в

Теорема 4. Пусть M_1 — $M_1(x_1;y_1)$; M_2 — $M_2(x_2;y_2)$, тогда

$$|M_1M_2| = \rho(M_1;M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ .$$

Доказательство

Пусть точки M_1 и M_2 различные. Рассмотрим следующие случаи.

А) $(M_1M_2) \parallel Ox$ или $(M_1M_2) \in Ox$, тогда так как $Ox \perp Oy$, то в силу следствия из теоремы 4 п. 3.5 $(M_1M_2) \perp Oy$. Пусть $M_0(y_0) \equiv$
$\equiv (M_1M_2) \cap Oy$, M_0 — совпадающие проекции точек M_1 и M_2 на ось Oy, поэтому ординаты точек M_1 и M_2 равны, $y_1 = y_2 = y_0 \Rightarrow y_2 - y_1 = 0$ (см. рис. 3.25 б). Если отрезок $M_1M_2 \in Ox$, то в силу теоремы 2 о расстоянии между двумя точками на числовой прямой $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$. Если отрезок $M_1M_2 \notin Ox$, то если опустить их этих точек перпендикуляры на ось Ox, M_{1x} и M_{2x} — основания этих перпендикуляров, мы получим прямоугольник $M_{1x}M_1M_2M_{2x}$, у которого (по соответствующему свойству) стороны $M_{1x}M_{2x}$ и M_1M_2 равны, откуда и в силу теоремы 2 $|M_1M_2| = |M_{1x}M_{2x}| = |x_2 - x_1|$. Следовательно, в рассматриваемом случае:

$$\rho(M_1;M_2) = |M_1M_2| = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+0^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Б) $(M_1M_2) \parallel Oy$ или $(M_1M_2) \in Oy$, тогда так как $Ox \perp Oy$, то в силу следствия из теоремы 4 п. 3.5 $(M_1M_2) \perp Ox$. Пусть $M_0(x_0) \equiv$
$\equiv (M_1M_2) \cap Ox$, M_0 — совпадающие проекции точек M_1 и M_2 на ось Ox, поэтому абсциссы точек M_1 и M_2 равны, $x_1 = x_2 = x_0 \Rightarrow x_2 - x_1 = 0$ (см. рис. 3.25 в). Если отрезок $M_1M_2 \in Oy$, то в силу теоремы 2 о расстоянии между двумя точками на числовой прямой $|M_1M_2| = |y_2 - y_1|$. Если отрезок $M_1M_2 \notin Oy$, то, опуская их этих точек перпендикуляры на ось Oy, M_{1y} и M_{2y} — основания этих перпендикуляров, мы получим прямоугольник $M_{1y}M_1M_2M_{2y}$, у которого (по соответствующему свойству) стороны $M_{1y}M_{2y}$ и M_1M_2 равны, откуда и в силу теоремы 2: $|M_1M_2| = |M_{1y}M_{2y}| =$
$= |y_2 - y_1|$. Следовательно, в рассматриваемом случае:

$$\rho(M_1;M_2) = |M_1M_2| = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2-y_1)^2} = \sqrt{0^2+(y_2-y_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

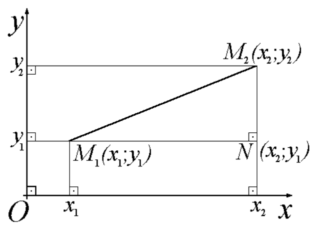


рис. 3.25 г

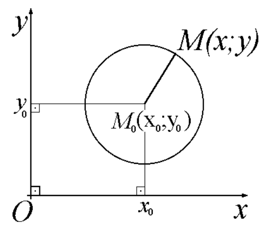


рис. 3.25 д

В) $(M_1M_2) \nparallel Ox$ и $(M_1M_2) \nparallel Oy$ (см. рис. 3.25 г). Через точку M_1 проведем прямую $\ell_1 \parallel Ox$ (если $M_1 \in Ox$, то $\ell_1 \equiv Ox$), через точку M_2 проведем прямую $\ell_2 \parallel Oy$ (если $M_2 \in Oy$, то $\ell_2 \equiv Oy$). Так как $\ell_1 \parallel Ox$ или $\ell_1 \equiv Ox$, то в силу $Ox \perp Oy$ и следствия из теоремы 4 п. 3.5 $\ell_1 \perp Oy$, а так как $\ell_2 \parallel Oy$ или $\ell_2 \equiv Oy$, то в силу того же следствия $\ell_1 \perp \ell_2$. Следовательно, прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекутся в некоторой точке N. Эта точка N отлична как от точки M_1, так и от точки M_2. Предполагая противное, что, например, $N \equiv M_1$ поскольку $N \in \ell_2$, то и $M_1 \in \ell_2$. А так как $M_2 \in \ell_2$ и $M_1 \not\equiv M_2$, то $\ell_2 \equiv (M_1M_2)$. Последнее обстоятельство означает, что $(M_1M_2) \parallel Oy$, что противоречит рассматриваемому случаю. Аналогично устанавливается невозможность совпадения точек M_2 и N. Пусть N — $N(x';y')$. Так как $(M_1N) \parallel Ox$, то согласно случаю А) $y' = y_1$, а так как $(M_2N) \parallel Oy$, то согласно случаю Б) $x' = x_2$, следовательно, N — $N(x_2;y_1)$. Из условий $N \not\equiv M_1$ и $N \not\equiv M_2$ соответственно вытекает, что

$$\left[\begin{array}{l} x_1 \neq x_2\ ; \\ y_1 \neq y_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{l} x_2 \neq x_2\ ; \\ y_1 \neq y_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow y_1 \neq y_2\ .$$

Таким образом, попутно установлено, что из условий $M_1(x_1; y_1) \not\equiv M_2(x_2; y_2)$ и $M_1M_2 \not\parallel Ox$, $M_1M_2 \not\parallel Oy$, вытекает, что

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \neq x_2, \\ y_1 \neq y_2\ . \end{array}\right.$$

Отметим, что $(M_1M_2) \parallel Ox(Oy) \Leftrightarrow y_2 = y_1(x_1 = x_2)$, откуда вытекает обратное к сформулированному перед этим утверждение

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \neq x_2, \\ y_1 \neq y_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M_1M_2 \not\parallel Ox, \\ M_1M_2 \not\parallel Oy\ . \end{array}\right.$$

$\triangle M_1NM_2$ — прямоугольный, так как $(M_1N) \perp (NM_2)$, по доказанному в случаях А) и Б) $|M_1N| = |x_2 - x_1|$, $|NM_2| = |y_2 - y_1|$, следовательно по теореме Пифагора для $\triangle M_1NM_2$ и в случае В) получаем, что

$$\rho(M_1; M_2) = |M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2 + |NM_2|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Осталось рассмотреть последний, простейший случай, когда $M_1 \equiv M_2$. В силу теоремы 3 это означает, что координаты этих точек совпадают, то есть $x_1 = x_2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1) = 0$ и $y_1 = y_2 \Leftrightarrow (y_2 - y_1) = 0$. Так как по определению в этом случае $\rho(M_1; M_2) = |M_1M_2| = 0$, то

$$\rho(M_1; M_2) = |M_1M_2| = 0 = \sqrt{0} = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Теорема 4 полностью доказана.

Уравнение окружности. Сформулируем (еще раз) определение окружности.

Определение 6. **Окружностью** *называется фигура, состоящая из всех точек* **плоскости**, *расположенных на равном положительном расстоянии от некоторой фиксированной точки этой плоскости. Указанная точка называется* **центром окружности**.

Радиусом *окружности называется любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, а также* **радиусом** *называется* **расстояние** *(длина отрезка) от любой точки окружности до ее центра.*

Замечание. Требование положительности расстояния в определении 6 вызвано тем, что если бы это расстояние равнялось нулю (а это возможно между совпадающими точками), то тогда окружностью (с нулевым радиусом) могла быть и всего одна точка. Традиционно одну точку не принято считать окружностью.

В силу доказанной теоремы 4 о расстоянии между двумя точками на координатной плоскости и определения 6 точка $M(x; y)$ принадлежит окружности с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ радиуса $R > 0$ тогда и только тогда, когда $\rho(M; M_0) = R$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Следовательно, урав-

нение окружности с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ радиуса $R > 0$ имеет вид (см. выше рис. 57 д) $\quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.
Если M_0 — $O(0;0)$, то есть $x_0 = y_0 = 0$, то следовательно, $\quad x^2 + y^2 = R^2$ — уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат.

3.9. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Теорема о трех перпендикулярах

В случае пространства кроме ситуации, когда две прямые находятся в одной плоскости и не имеют общих точек (то есть параллельны), возможно и такое расположение прямых, когда они не лежат в одной плоскости.

Определение 1. Прямые в пространстве, которые не лежат в одной плоскости, называются **скрещивающимися**.

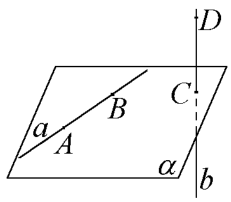


рис. 3.26 а

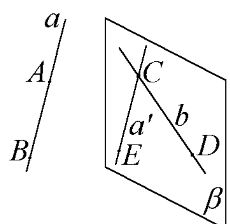


рис. 3.26 б

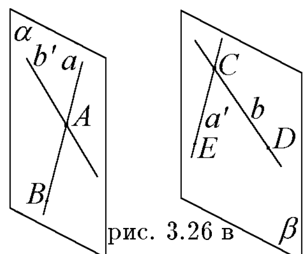


рис. 3.26 в

Теорема 1 (о существовании скрещивающихся прямых). *Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая из этих прямых пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то такие прямые являются скрещивающимися.*

Доказательство

См. рис. 3.26 а. Пусть прямая a лежит в плоскости α, прямая b пересекает плоскость α в точке C. Следует отметить, что подобная конфигурация существует. Если провести через точки A и B прямую a (по соответствующей аксиоме см. [1], раздел II, п. 2.3.0) она будет лежать в плоскости α, точка C (существование такой точки C также гарантируется одной из аксиом, см. [1], раздел II, п. 2.3.0), а также если через точки C и D ($D \notin$) провести прямую b, то прямая b не будет лежать в плоскости α, так как в противном случае точка D лежала бы в плоскости α, что неверно. Если предположить, что существует некоторая плоскость β, содержащая прямые a и b, а стало быть, и все четыре точки A, B, C, D, то в силу единственности плоскости, проходящей через точки A, B, C, плоскости β и α совпадут, стало быть, точка D должна будет оказаться в плоскости α, что неверно. Следовательно, прямые a и b не лежат в одной плоскости, а потому они скрещиваются. Теорема 1 доказана.

Замечание. Скрещивающиеся прямые не имеют общих точек. Это легко доказывается от противного. Предполагая существование общей точки у этих прямых, мы получим, что если эти прямые различны, то они лежат в одной плоскости, если эти прямые совпадают (а это при наличии у них двух различных общих точек), то через них проходит бесконечное множество плоскостей.

Теорема 2. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит **единственная** *плоскость, параллельная другой прямой, причем эти плоскости параллельны.*

Доказательство

См. рис. 3.26 б. Пусть $a \equiv (AB)$ и $b \equiv (CD)$ — две скрещивающиеся прямые. Докажем, что, например, через прямую (CD) проходит единственная плоскость, параллельная прямой (AB). Проведем через точку C прямую $a' \equiv (CE)$, параллельную прямой a, Так как $b \not\parallel a$, то прямые b и a' — различные. Поскольку эти прямые имеют общую точку C, то C — точка их пересечения. Через прямые a' и b можно провести единственную плоскость (обозначим ее за β), при этом, так как прямые a и b скрещиваются, a не лежит в плоскости β. Так как $a \parallel a'$, $a' \in \beta$, то $a \parallel \beta$. Существование плоскости, проходящей через прямую b, параллельно прямой a, доказано. Докажем ее единственность. Предположим, что через прямую b проходит еще одна плоскость $\beta' \not\equiv \beta$, параллельная прямой a. С одной стороны, эта плоскость проходит через точку C, с другой стороны, она не содержит прямую a' (иначе она совпадала бы с плоскостью β). Следовательно, плоскость β' пересекает прямую a', так как $a' \parallel a$, то плоскость β' пересекает прямую a, пришли к противоречию с тем, что $a \parallel \beta'$. Полученное противоречие доказывает единственность плоскости $\beta \parallel a$ такой, что $b \in \beta$ и прямые a и b скрещиваются. Аналогичным образом, проводя через точку $A \in a$ прямую $b' \parallel b$ и затем через прямые a и b' — плоскость α, мы получим, что $b \parallel \alpha$ (см. рис. 3.26 в). Единственность этой плоскости доказывается точно так же, как доказывается единственность плоскости β. Далее, получив, что в плоскости β имеются две пересекающиеся прямые b и a' соответственно параллельные прямым b' и a, лежащим в плоскости α, а потому будем иметь, что $\alpha \parallel \beta$. Теорема 2 полностью доказана.

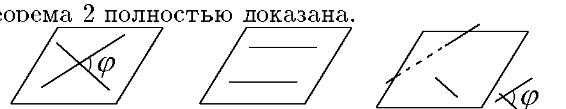


рис. 3.27 а рис. 3.27 б рис. 3.27 в

Отметим *три* возможных взаимных расположения двух прямых в пространстве:

а) прямые пересекаются (имеют единственную общую точку), через них проходит единственная плоскость (см. рис. 3.27 а);

б) прямые параллельны (они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек), плоскость, в которой они лежат, единственная (см. рис. 3.27 б);

в) прямые скрещиваются (они не лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, см. рис. 3.27 в).

Замечание. Единственность плоскости, в которой лежат параллельные прямые, обосновывается так. Пусть a и b — параллельные прямые. Выберем произвольные две точки на прямой a и одну точку на прямой b. Через эти три точки проходит единственная плоскость. Прямая a лежит в этой плоскости. В силу единственности прямой в пространстве, проходящей через точку, не лежащую на другой прямой, которая параллельна этой другой прямой, всякая прямая, параллельная прямой a и проходящая через третью точку, может только совпадать с прямой b, поэтому прямая b лежит в построенной плоскости. Предполагая, что через эти прямые пройдет еще одна плоскость, мы получим, что она пройдет и через выбранные выше три точки, тем самым, получим противоречие с тем, что через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость. Это противоречие доказывает единственность плоскости, проходящей через параллельные прямые.

При пересечении двух прямых a и b образуются четыре угла, имеющие общую вершину в точке пересечения этих прямых. Из них две пары вертикальных углов, а также четыре пары смежных углов. В силу равенства вертикальных углов неравными могут быть только смежные углы, при условии, что один из них острый, другой — тупой. Острый угол является меньшим из этих углов, тупой — большим из них.

Соответствующие определения и утверждения см. подробнее в книге [1].

Договоримся всюду в дальнейшем *углом между пересекающимися не перпендикулярными прямыми считать* **меньший** *из углов, образующихся при их пересечении.* Если эти прямые *взаимно перпендикулярны*, то угол между ними **прямой**.

Угол между параллельными или совпадающими прямыми будем считать **нулевым**.

Определение 2. **Углом между скрещивающимися прямыми** *называется угол между пересекающимися прямыми, которые соответственно параллельны данным скрещивающимся прямым.*

При этом *мерой такого угла естественно считать меру угла между соответственно параллельными им пересекающимися прямыми* (см. рис. 3.27 в).

В учебниках геометрии доказывается, что этот угол не зависит от того, какие берутся пересекающиеся прямые и где расположена их точка пересечения.

Определение 3. Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными**, *если угол между ними прямой.*

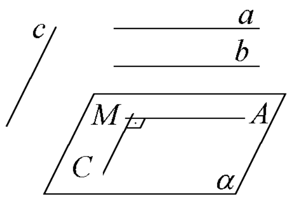


рис. 3.28 а

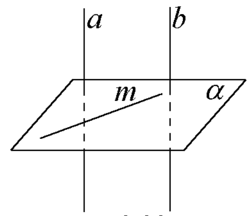


рис. 3.28 б

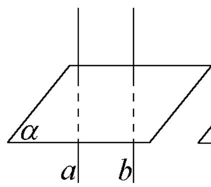
Теорема 3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая из них перпендикулярна этой прямой.

Доказательство

Пусть a, b и c — прямые в пространстве, $a \parallel b$, $a \perp c$. Требуется доказать, что $b \perp c$. См. рис. 3.28 а. Для этого через произвольную точку M пространства, не принадлежащую ни одной из прямых a, b и c, проведем прямые $(MA) \parallel a$, $(MC) \parallel c$. По определению перпендикулярности прямых в пространстве $\angle AMC$ — прямой. Так как $(MA) \parallel a$, $a \parallel b$, то $(MA) \parallel b$, согласно определениям 2 и 3 $b \perp c$. Теорема 3 доказана.

Замечание. Существование точки M в доказательстве теоремы 3 следует из следующих рассуждений. Если прямые a, b и c лежат в одной плоскости, то в качестве точки M можно взять произвольную точку, не лежащую в этой плоскости. Если прямая c не лежит в плоскости γ параллельных прямых a и b, то c имеет не более одной общей точки с плоскостью γ. Выберем, например, точку A на прямой a, которая не лежит на прямой c и точку C на прямой c такую, что C не лежит в плоскости γ (очевидно, что $A \not\equiv C$). В качестве точки M можно взять, например, середину отрезка AC, $M \not\equiv A$, $M \not\equiv C$. Точка $M \notin \gamma$ (в противном случае вся прямая (AM), в том числе и точка C будет в плоскости γ, что неверно), следовательно $M \notin a$ и $M \notin b$, точка M также не лежит на прямой c (в противном случае прямая $(CM) \equiv c$, а потому $A \in c$, что неверно).

Определение 4. Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** *этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости. При этом также плоскость называется* **перпендикулярной** *указанной прямой.*



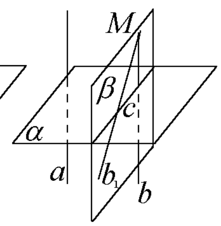


рис. 3.28 в   рис. 3.28 г

Теорема 4. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая из них перпендикулярна этой плоскости.

Доказательство

Пусть a, b — прямые в пространстве, $a \parallel b$, α — плоскость, $a \perp \alpha$. Требуется доказать, что $b \perp \alpha$. См. рис. 3.28 б. Проведем в плоскости α произвольную прямую m. В силу произвольности прямой m и определения 4 следует $a \perp m$, а в силу теоремы 3 вытекает, что $b \perp m$. В силу произвольности прямой m и определения 4 следует, что $b \perp \alpha$. Теорема 4 доказана.

Имеет место и обратная теорема.

Теорема 5. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

Доказательство

См. рис. 3.28 в и г. Пусть прямые a и b перпендикулярны плоскости α, требуется доказать, что они параллельны. Проведем через некоторую точку $M \in b$ прямую b_1, параллельную прямой a. В силу теоремы 4: $b_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямые b_1 и b совпадают, тогда будет следовать $a \parallel b$. Предположим, что прямые b и b_1 не совпадают, тогда они пересекаются в точке M и через них можно провести единственную плоскость β. Поскольку согласно определению 4: прямая b и плоскость α пересекаются, то они имеют общую точку. Следовательно, плоскости β и α имеют общую точку и потому они имеют общую прямую c, по которой они пересекаются. Так как $b \perp \alpha$ и $b_1 \perp \alpha$, то в силу определения 4 $b \perp c$ и $b_1 \perp c$, получили, что из точки M к прямой c в плоскости β проведено два перпендикуляра, что невозможно. Следовательно, $b_1 \equiv b \Rightarrow a \parallel b$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6 (признак перпендикулярности прямой и плоскости). *Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.*

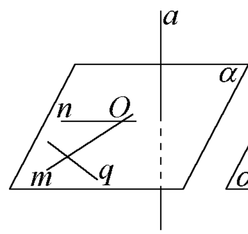


рис. 3.29 а

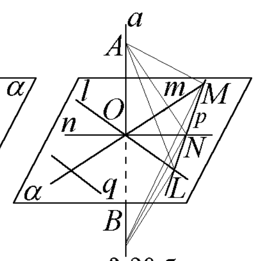


рис. 3.29 б

Доказательство

См. рис. 3.29 б. Рассмотрим прямую a, такую, что $a \perp m$, $a \perp n$, $m, n \in \alpha$, $m \cap n \equiv O$ (m и n — указанные в условии теоремы прямые, O — точка их пересечения). Требуется доказать, что прямая a перпендикулярна плоскости α ($a \perp \alpha$). Для этого (согласно определению 4) достаточно доказать, что прямая a перпендикулярна произвольной прямой q, лежащей в плоскости α.

Рассмотрим случай, когда прямая a проходит через точку O, причем $q \not\equiv m$ и $q \not\equiv n$. *[10] Через точку O в плоскости α проведем прямую $l \parallel q$ (если оказалось, что q проходит через точку O, то в качестве прямой l можно взять прямую q). Выберем на прямой a точку A, отличную от точки O и на дополнительном по отношению к лучу OA луче OB выберем точку B такую, что $OB = OA$ тем самым, точка O будет серединой отрезка AB. Проведем в плоскости α прямую p, пересекающую прямые l, m и n соответственно в точках L, M и N. Подробнее об этом см. в книге [1]. Для определенности будем считать, что точка N на прямой p лежит между точками L и M. Прямые m и n являются серединными перпендикулярами, проведенными соответственно в плоскостях (AMB) и (ANB), к отрезку AB. В силу свойства серединного перпендикуляра к отрезку $AM = BM$ и $AN = BN$. В $\triangle AMN$ и $\triangle BMN$ также сторона MN — общая. Следовательно, $\triangle AMN = \triangle BMN$ (по трем сторонам), а потому $\angle AML = \angle BML$. Далее, рассмотрим $\triangle AML$ и $\triangle BML$, у них сторона ML — общая, $AM = BM$, $\angle AML = \angle BML$, следовательно, $\triangle AML = \triangle BML$ (по двум сторонам и углу между ними), а потому $AL = BL$. Последнее равенство означает, что $\triangle ALB$ — равнобедренный, OL — его медиана, проведенная к основанию AB, которая (согласно свойствам равнобедренного треугольника) является высотой. Таким образом, $a \equiv (AB) \perp (OL) \equiv l$. В

[10]* Существование такой прямой q можно получить, например, выбирая на каждой из прямых m и n точки M и N, отличные от точки O их пересечения, соединяя их прямой, затем, выбирая на прямой (MN) отличную от M и N точку L и проводя прямую $q \equiv (OL)$.

случае $l \equiv q$ сразу следует, что $a \perp q$. В случае $l \parallel q$ так как по доказанному $l \perp a$, то в силу теоремы 3: $a \perp q$. В силу произвольности выбранной прямой $q \in \alpha$ и определения 4 следует, что прямая $a \perp \alpha$.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая a не проходит через точку O. Проведем через точку O прямую $a_1 \parallel a$, в силу теоремы 3 $a_1 \perp m$ и $a_1 \perp n$, по доказанному в предыдущем случае $a_1 \perp \alpha$, теперь в силу теоремы 4 получаем, что $a \perp \alpha$. Теорема 6 полностью доказана.

Замечание. Утверждение, обратное теореме, 6 непосредственно вытекает из определения 4.

Определение 5. **Общим перпендикуляром** *двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них* (то есть этот отрезок лежит на прямой, перпендикулярной каждой из этих скрещивающихся прямых).

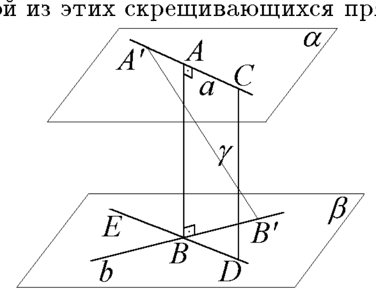


рис. 3.30

Теорема 7. Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

Доказательство

Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые. Согласно теореме 2 через прямую a проходит единственная плоскость α, параллельная прямой b, а через прямую b проходит единственная плоскость β, параллельная прямой a, причем $\alpha \parallel \beta$. Из произвольной точки $C \in a$ проведем прямую $(CD) \perp \beta$, тогда в силу определения 4: $(CD) \perp b$, а также силу теоремы 8 $(CD) \perp \alpha$ (откуда $(CD) \perp a$), $D \in \beta$. Если оказалось, что $D \in b$, то (CD) и есть общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым a и b.

Предположим, что точка $D \notin b$. Так как прямая (CD) имеет общую точку с плоскостью β, а прямая a не имеет с ней общих точек, то эти прямые различны. Следовательно, они пересекаются в точке C. Проведем через прямые a и (CD) плоскость γ, которая пересечет плоскость β по прямой $(DB) \parallel a$. Прямая (DB) пересечет прямую $b \in \beta$ в точке B (если предположить, что $(DB) \parallel b$, то $a \parallel b$, а это неверно). Через точку B проведем прямую $(BA) \parallel (DC)$, следовательно, прямая $(BA) \in \gamma$, а потому эта прямая пересечет прямую a в точке A. В силу теоремы 4: $(BA) \perp \beta$, а в силу $\alpha \parallel \beta$ и (см. ниже) теоремы 8: $(BA) \perp \alpha$. Таким образом, (BA) есть общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым a и b.

Докажем единственность общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым a и b. Допустим, что существует еще один общий перпендикуляр $(A'B')$ к этим прямым. Пусть прямая $(BE) \parallel a$, ((BE) — прямая пересечения плоскостей γ и β). Тогда так как прямые (AB) и $(A'B')$ перпендикулярны a и b, то они будут перпендикулярны пересекающимся прямым (BE) и b в плоскости β и потому в силу теоремы 5: $(AB) \parallel (A'B')$, стало быть точки A и A' различные, а также точки B и B' различные и все они лежат в одной плоскости. Следовательно, прямые $a \equiv (AA')$ и $b \equiv (BB')$ лежат в одной плоскости, что неверно, так как прямые a и b скрещиваются. Тем самым единственность общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым доказана. Перпендикулярность прямой (AB) каждой из плоскостей α и β была установлена в процессе доказательства теоремы. Теорема 7 полностью доказана.

Определение 6. Длина общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым называется **расстоянием** *между этими прямыми, а также —* **расстоянием** *между соответствующими параллельными плоскостями.*

Имеют место следующие теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости, доказательства которых можно найти в учебниках геометрии, например, А.П. Киселева.

Теорема 8. Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой из них.

Теорема 9 (обратная теореме 8). *Если две плоскости перпендикулярны к одной прямой, то они параллельны.*

Теорема 10. Через всякую точку пространства можно провести к данной плоскости единственную перпендикулярную ей прямую.

Теорема 11. Через всякую точку пространства можно провести к данной прямой единственную перпендикулярную ей плоскость.

Теорема о трех перпендикулярах

Сформулируем ряд определений, которые будут использованы при доказательстве этой теоремы.

Пусть даны плоскость и не лежащая на ней точка.

Определение 7. **Перпендикуляром**, *проведенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется* **основанием перпендикуляра**. **Длина** *этого перпендикуляра называется* **расстоянием от точки до плоскости**.

Определение 8. **Наклонной** *к данной плоскости α называется прямая l, не являющаяся ни перпендикулярной, ни параллельной этой плоскости. Отрезок, соединяющий точку A с точкой на плоскости α и лежащий на прямой l, наклонной к плоскости α, называется* **отрезком наклонной**.

Замечание. Часто для упрощения терминологии под наклонной, проведенной из данной точки A к плоскости α подразумевают именно отрезок наклонной, одним из концов которого является точка A. Другой конец этого отрезка, лежащий на плоскости α, называется **основанием наклонной**.

Определение 9. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки к плоскости, называется **проекцией наклонной**.

Замечание. Отметим, что прямая и отрезок называются *перпендикулярными*, если эта прямая перпендикулярна той прямой, на которой расположен отрезок. Плоскость и отрезок называются *перпендикулярными*, если эта плоскость перпендикулярна прямой, на которой расположен этот отрезок.

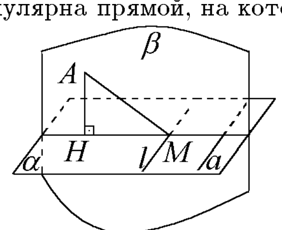


рис. 3.31

Теорема 12 (о трех перпендикулярах). *Если прямая, проведенная на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна этой наклонной.*

Доказательство

См. рис. 3.31. Пусть AH — перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α, точка H — основание этого перпендикуляра. AM — отрезок наклонной, проведенной из точки A к плоскости α, точка M — основание этой наклонной, отрезок HM — проекция этой наклонной, прямая a перпендикулярна проекции HM. Точки H, M и A — различные, так как $A \notin \alpha$, $H, M \in \alpha$, поэтому $H \not\equiv A$ и $M \not\equiv A$ и также $A \notin (HM)$; $H \not\equiv M$, так как H — основание перпендикуляра (он единственен), M — основание наклонной (поэтому $AM \not\perp \alpha$). Таким образом, через не лежащие на одной прямой точки A, H и M можно провести единственную плоскость β. В силу теоремы 1 так как прямая $(AH) \perp \alpha$ и $(AH) \in \beta$, то плоскость $\beta \perp \alpha$. Согласно определению перпендикулярных прямой и плоскости $a \perp (HA)$, в то же время по условию $a \perp (HM)$. Поскольку прямые (HM) и (HA) — различные и имеют общую точку H, то они в ней пересекаются, а потому в силу признака перпендикулярности прямой и плоскости прямая $a \perp \beta$. Следовательно $a \perp (AM)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 13 (обратная теореме 12). *Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной.*

Доказательство

См. рис. 3.31. Оно проводится аналогично доказательству теоремы 2. Отличие лишь в том, что вместо $a \perp (HM)$ теперь по условию $a \perp (AM)$, прямые (MA) и (HA) — различные и имеют общую точку A, поэтому они в ней пересекаются, стало быть, в силу теоремы 6 (признака перпендикулярности прямой и плоскости) прямая $a \perp \beta$. Следовательно $a \perp (MH)$. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Теоремы 12 и 13 доказаны *для произвольной* прямой a, лежащей в плоскости α, перпендикулярной соответственно проекции наклонной и самой наклонной. Прохождение прямой a через основание наклонной, точку M *не предполагалось*. На рис. 3.31 изображен случай прямой $l \perp HM$ и $l \perp AM$, в частности, для нее справедливы утверждения теорем 12 и 13.

Замечание 2. Смысл названия теорем 12 и 13 "о трех перпендикулярах" заключается в том, что в них идет речь о перпендикуляре, проведенном из точки к плоскости и о перпендикулярности прямой к наклонной и к проекции этой наклонной.

Следует также привести определение угла между прямой и плоскостью, которое часто применяется при решении задач.

Пусть даны плоскость β и некоторая прямая (AB), являющаяся наклонной к этой плоскости и пересекающая ее в точке A.

Определение 11. Углом между прямой (AB) (точнее полупрямой BA) и плоскостью β называется **острый угол** *между этой полупрямой и прямой, содержащей проекцию на плоскость β любого отрезка BA с концом B на этой полупрямой.*

Этот угол обладает тем свойством, что он является наименьшим среди всех углов, которые наклонная (AB) образует с прямыми, проведенными в плоскости β через основание B этой наклонной (см. рис. 3.32).

Обоснование этого факта см., например, в учебнике А.П. Киселева.

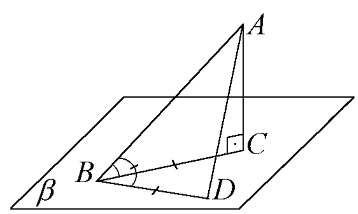


рис. 3.32
