

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН*

Разработка математических моделей вибраторных антенн представляет одну из важных и актуальных проблем антенной техники. Вибраторная антенна появилась в радиотехнике с момента ее возникновения, когда А.С. Попов впервые использовал радиоволны для передачи сигнала в 1895 году и начал эру радио. В настоящее время системы вибраторных излучателей широко применяются для разработки антенн КВ и УКВ диапазонов. Задача возбуждения конечного цилиндрического вибратора имеет давнюю и интересную историю.

Вопрос о распределении тока вдоль вибратора впервые был рассмотрен в статьях С. Poklingtona [1] и М. Abagam [2]. Они показали, что основному колебанию тока в вибраторе соответствует синусоидальное распространение тока вдоль провода антенны. Было установлено, что резонансная длина волны основного колебания близка к удвоенной длине вибратора. В работе [3] М. Abagam рассмотрел излучение вертикального заземленного провода. Он считал Землю хорошо проводящей средой и показал, что её влияние можно учесть вводя зеркальное изображение антенны. Достаточно подробно результаты излучения антенны, как линии открытой на конце, рассмотрены в книге И.Г. Клячкина [4].

Строгая постановка задачи о распределении тока в вибраторе основана на сведениях задачи о возбуждении вибратора к интегральным уравнениям относительно функции распределения тока. Первая работа в этом направлении принадлежит Е. Hallen [5]. В этой работе для передающей антенны полагалось, что сторонняя напряженность тока сосредоточена в зазоре, а на поверхности вибратора $E^{\text{ct}} = 0$, а следовательно, и касательная составляющая полного поля равна нулю. Для распределения тока $I(z)$ вдоль вибратора длиной $2l$ Е. Hallen получил интегральное уравнение

$$\int_{-l}^l I(z') dz' \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr}}{2\pi r} d\psi = U \sin k|z| + A_1 \cos kz,$$

где $r = \sqrt{|z - z'|^2 + 4a^2 \sin^2 \psi}$, $k = \frac{\omega}{c}$, a - радиус вибратора, U - напряжение в зазоре, а A_1 - определяется из условия $I(l) = 0$.

Далее Е. Hallen решает это уравнение путем разложения в ряд

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект № 99-02-16972) и межвузовской научной программы "Университеты России - фундаментальные исследования" (проект № 990894).

функции распространения тока по параметру $\Omega = 2 \ln \frac{l}{2a}$.

Систематическому исследованию интегрального уравнения Е. Hallen посвящена монография [6].

Оригинальный метод исследования интегрального уравнения был разработан М.А. Леонтовичем и М.Л. Левиным [7], однако принятые исходные положения математической модели остались теми же, что и у Е. Hallen.

Математическая модель, на основе которой получено уравнение Галлена, не учитывает согласования токов в линиях, питающих антенну и токов в излучателях. В данной модели эти процессы не зависят друг от друга. Это приводит к определенным противоречиям в постановке задачи. Как показано в работе Л.А. Вайнштейна, [8] возбуждение вибратора бесконечно-малым зазором, что описывается заданием $E^{ct} = U\delta(z)$ приводит к сингулярному распределению тока. В точке питания распределение тока имеет слабую особенность. Это приводит ко многим трудностям как при решении уравнения, так и при применении результатов, поскольку одной из основных целей моделирования является определение условий согласования фидерных линий и излучателя.

Самосогласованная модель возбуждения вибратора рассмотрена в работе [9]. В ней рассмотрено возбуждение вибратора двухпроводной линией, при этом волны тока отражаются от излома двухпроводной линии, что позволяет строго определить входные сопротивления вибратора. В работе [10] на основе прямого решения системы интегральных уравнений относительно токов как непосредственно в вибраторе, так и в проводящей двухпроводной линии получены поправки к входному сопротивлению, учитывающие взаимную связь излучателя и фидера.

Для успешного применения модели интегрального уравнения к расчету вибраторных антенн важной была работа А.Н. Тихонова и В.И. Дмитриева [11], где был предложен общий метод решения системы интегральных уравнений описывающих распределение тока в системе параллельных линейных вибраторов. В этой работе получена система интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядрах при совпадении аргументов и разработан метод их эффективного решения. Эта работа стимулировала ряд работ, позволяющих создать комплекс прикладных программ расчета вибраторных антенн [12], [13].

Однако ряд важных вопросов теории возбуждения вибраторных антенн требует дальнейшего решения. Это вопросы достаточного универсального учета различных способов возбуждения антенн, учет электрических контактов между вибраторами, расчет антенн в широком

диапазоне частот. Это привело к разработке математических моделей вибраторных антенн на основе метода интегральных уравнений. Рассмотрим некоторые из этих вопросов.

Будем рассматривать задачу возбуждения круглого цилиндрического вибратора, представляющего собой конечный отрезок тонкостенной круглой трубы радиуса a и длины $2l$. Толщиной трубы будем пренебрегать. Поверхность S цилиндрической оболочки будем считать идеально проводящей. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , в качестве начала координат выбираем точку O на оси трубы, равноудаленную от ее концов так, что поверхность S задается в цилиндрических координатах как множество точек $S: \{r = a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |z| < l\}$.

Будем рассматривать осесимметричное возбуждение вибратора, которое описывается распределением стороннего электрического поля $\vec{E}^{CT}$, не зависящего от угловой координаты φ и направленного вдоль оси вибратора: $\vec{E}^{CT} = (0, 0, E^{CT})$.

Электромагнитное поле излучения в любой точке пространства R^3 вне S имеет компоненты (E_z, E_r, H_φ) и может быть выражено через векторный потенциал $\vec{A} = A(M)\vec{i}_z$:

$$\vec{E}(M) = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} (\text{grad div } \vec{A} + k^2 \vec{A})$$

$$\vec{H}(M) = \text{rot } \vec{A}, \quad M \in R^3 \setminus S.$$

Зависимость от времени выбрана $e^{-i\omega t}$, ω - круговая частота волнового процесса, $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, ε_0, μ_0 - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ - импеданс среды. Функция удовлетворяет

уравнению Гельмгольца всюду в $R^3 \setminus \bar{S}$:

$$\Delta A + k^2 A = 0. \quad (1)$$

Составляющие электромагнитного поля следующим образом выражаются через A :

$$E_z = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A(r, z)$$

$$E_r = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial^2 A(r, z)}{\partial z \partial r}$$

$$H_\varphi = -\frac{\partial A(r, z)}{\partial r}.$$

Электромагнитное поле излучения должно удовлетворять на поверхности S граничному условию на поверхности вибратора:

$$E_z + E_z^{CT} = 0, \quad P \in S. \quad (2)$$

Кроме того, поля должны удовлетворять условиям излучения на бесконечности и условию Мейкснера на кромках бесконечно тонкой цилиндрической поверхности S . Условия на ребре состоят в том, что в произвольной ограниченной окрестности кромки вибратора электромагнитное поле должно быть интегрируемо с квадратом. Это условие означает, что функция $A(M)$ должна принадлежать пространству $H_{loc}^1(R^3 \setminus \bar{S})$, то есть

$$\int_{G \setminus S} (|\nabla A|^2 + |A|^2) dv < \infty$$

для любой ограниченной области G .

Пусть Σ - поверхность бесконечного цилиндра, содержащая поверхность S , $S \subset \Sigma$. Введем пространства Соболева для функций, имеющих осевую симметрию по азимутальному углу φ и определенных на поверхности бесконечного цилиндра Σ .

Введем пространство $H^s(\Sigma)$ как множество функций $v \in L_2(\Sigma)$, для которых $(1 + |\xi|^2)^s \hat{v} \in L_2(R^1)$, где $\hat{v}$ - преобразование Фурье. Это пространство является гильбертовым с нормой

$$\|v\|_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{v}|^2 d\xi.$$

Отметим, что пространства с индексами s и $-s$ являются антидвойственными при всех $s \in R^1$ относительно полуторалинейной формы, являющейся продолжением по непрерывности формы

$$\langle v, w \rangle = \int_{-l}^l v(z) \bar{w}(z) dz.$$

Поскольку S является подмножеством Σ , положим

$$H^s(S) = \{v|_S, v \in H^s(\Sigma)\}$$

$$\tilde{H}^s(S) = \{v \in H^s(\Sigma) : \text{supp } v \in \bar{S}\}.$$

Пространства $H^s(S)$ и $\tilde{H}^{-s}(S)$ являются антидвойственными друг другу для всех $s \in R$ относительно полуторалинейной формы, являющей-

ся продолжением по непрерывности формы $\int_{-l}^l v(z) \bar{w}(z) dz$. Пространство $\tilde{H}^s(S)$ может быть получено замыканием $C_0^\infty(S)$ по норме $\|\cdot\|_s$.

Введем операторы: γ_0 - оператор следа на Σ , γ_1 - оператор следа нормальной производной на Σ с каждой стороны поверхности Σ .

$$\gamma_0 : u \rightarrow u|_{\Sigma} : H_{loc}^1(G) \rightarrow H^{1/2}(\Sigma)$$

$$\gamma_1 : u \rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} : H_p^1(G) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma),$$

где $G = G_1$ или G_2 - области внутри и вне цилиндра Σ , а

$$H_p^1(G) = \{u \in H^1(G) : \Delta u \in L_2(G)\}.$$

Определим также оператор q продолжения нулем с S на Σ

$$q : \varphi \rightarrow \tilde{\varphi} : \tilde{H}^s(S) \rightarrow H^s(\Sigma), \quad \tilde{\varphi} = 0 \text{ на } \Sigma \setminus \bar{S}$$

и оператор p сужения функции с Σ на S

$$p : \varphi \rightarrow \varphi|_S : H^s(\Sigma) \rightarrow H^s(S).$$

Будем понимать равенство (2) как равенство элементов в пространстве $H^{-1/2}(S)$, причем равенства должны выполняться с обеих сторон поверхности S . Хорошо известно, что решения однородного уравнения Гельмгольца из $H_{loc}^1(R^3 \setminus \bar{S})$ будут бесконечно дифференцируемы в $R^3 \setminus \bar{S}$, поэтому можно сразу считать, что решение уравнения (1) $A \in C^2(R^3 \setminus \bar{S})$ и понимать в классическом смысле.

Будем искать решение краевой задачи (1), (2) в виде потенциала простого слоя

$$A(M) = \int_S j(P) \frac{e^{ikR_{MP}}}{4\pi R_{MP}} ds_P,$$

где R_{MP} - расстояние между точками $M(r, 0, z) \in R^3 \setminus \bar{S}$ и $P(a, \varphi, \xi)$,

$j(z) \in \tilde{H}^{1/2}(S)$, причем $j(z) = \left[\frac{\partial A}{\partial n} \right]_S$ и $[A]_S = 0$,

где $[A]_S = p(\gamma_0(A_{G_1}) - \gamma_0(A_{G_2}))$, $\left[\frac{\partial A}{\partial n} \right]_S = p(\gamma_1(A_{G_1}) - \gamma_1(A_{G_2}))$.

В силу свойства потенциала простого слоя все условия на функцию A , кроме условия (2), удовлетворены, а краевое условие (2) дает операторное уравнение

$$Nj = \left(\frac{\partial^2}{\partial z_{P_0}^2} + k^2 \right) \int_S j(P) \frac{e^{ikR_{P_0P}}}{4\pi R_{P_0P}} ds_P = -\frac{\omega \varepsilon_0}{i} E^{CT}(P_0), \quad P_0 \in S \quad (3)$$

$$N: \tilde{H}^{1/2}(S) \rightarrow H^{-1/2}(S).$$

Если $P, P_0 \in S$ то $R_{PP_0} = \sqrt{|z - \xi|^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}$ и, обозначая через

$$K(\xi) \text{ ядро } K(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ikR_{PP_0}}}{R_{PP_0}} d\varphi, \text{ перепишем уравнение (3) в виде одно-}$$

мерного уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-l}^l j(z) K(|z - \xi|) d\xi = -\frac{2}{\pi} \frac{\omega \varepsilon_0}{i} E^{CT}(z) = -g(z), \quad |z| < l,$$

которое можно рассматривать как операторное уравнение $\tilde{H}^{1/2}(S) \rightarrow H^{-1/2}(S)$.

Покажем, что задача излучения тонкого вибратора эквивалентна решению интегрального уравнения (3). Пусть E_z, E_r, H_φ - решения задачи излучения. Тогда существует функция

$j(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (H_\varphi(a + \varepsilon, z) - H_\varphi(a - \varepsilon, z))$, которая равна нулю в точках $z \leq l$, $z \geq l$ и $j \in \tilde{H}^{1/2}([-l, l])$, поскольку $H_\varphi(r, z)$ удовлетворяет уравнению

Гельмгольца, при этом $H_\varphi(r, z) = -\frac{\partial A}{\partial r}$, и условию на ребре, где A также

удовлетворяет уравнению Гельмгольца и справедлива теорема о следах [2]. Функция

$$j(z) = \gamma_1 \left(-\frac{\partial A}{\partial r} \Big|_{r=0+0} \right) - \gamma_1 \left(-\frac{\partial A}{\partial r} \Big|_{r=0-0} \right)$$

порождает потенциал

$$A(r, z) = \int_S j(\xi) \frac{e^{ikR_{MP}}}{4\pi R_{MP}} ds_P, \quad M(r, z), \quad P(a, \xi)$$

и, следовательно, $j(z)$ удовлетворяет уравнению (3). Если уравнение (3) может иметь лишь единственное решение в указанном классе функций, то всякое решение уравнения (3) определяет поле излучения и поле излучения порождает решение уравнения (3).

Покажем, что решение уравнения (3) может иметь лишь единственное решение в соответствующем классе функций. Допустим противное. Обозначим через $j_0(z)$ решение однородного уравнения (3). Постро-

им потенциал простого слоя с плотностью $j_0(z)$

$$u(r, z) = \int_S j_0(z) \frac{e^{ikR_{MP}}}{4\pi R_{MP}} ds_P.$$

Функция $u(r, z)$ определяет электромагнитное поле $E_z^0, E_r^0, H_\varphi^0$, которое является решением однородной задачи излучения, решение же в силу теоремы единственности [22] для задачи излучения равно нулю тождественно $u(r, z) \equiv 0$, $(r, z) \in R^2 \setminus \bar{S}$. Вычислим всюду для точек S скачок магнитного поля, пользуясь теоремой о скачке потенциала простого слоя [14]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (H_\varphi^0(a + \varepsilon, z) - H_\varphi^0(a - \varepsilon, z)) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a+\varepsilon} - \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a-\varepsilon} \right) = -2\pi j_0(z).$$

С другой стороны, поскольку $H_\varphi^0(r, z) \equiv 0$, скачок равен нулю, следовательно, $j_0(z) \equiv 0$, $z \in [-l, l]$. Вопрос о разрешимости уравнения (3) связан с рассмотрением уравнения (3) как уравнения в гильбертовых пространствах. В работе [14] установлена теорема разрешимости уравнения (3) как уравнения в нормированном пространстве $\tilde{H}^{1/2}([-l, l])$, при этом оператор A является фредгольмовым оператором, действующим из $\tilde{H}^{1/2}([-l, l])$ в $H^{-1/2}([-l, l])$.

Для применения общей схемы метода Галеркина выделим главную сингулярную часть оператора A . Вначале заметим, что ядро интегрального оператора $K(\xi)$ имеет логарифмическую особенность. Действительно, ядро $K(\xi)$ имеет следующее представление:

$$K(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{ikR} - 1}{R} d\varphi + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{R} d\varphi,$$

оценивая асимптотически поведение интеграла, запишем ядро в виде

$$K(\xi) = \frac{1}{\pi a} \ln \frac{8a}{\xi} + K_1(\xi).$$

Ядро $K_1(\xi)$ имеет устранимую особенность в нуле. Таким образом, уравнение (3) можно представить в виде $A_0 j + B j = -g$, где

$$A_0 j = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-l}^l j(\xi) \left(\frac{1}{\pi a} \ln \frac{8a}{|\xi - z|} \right) d\xi,$$

$$Bj = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-1}^1 j(\xi) K_1(|\xi - z|) d\xi.$$

Из явного вида ядра $K_1(\xi)$ следует, что оператор B - вполне непрерывный оператор $B: H^{1/2} \rightarrow H^{-1/2}$. Оператор A_0 - симметричный положительно определенный оператор, имеющий ограниченный обратный. Уравнение (3) можно переписать в виде

$$j + Tj = g', j \in H_0, g' = -A_0^{-1}g, T = A_0^{-1}B. \quad (4)$$

Уравнение (4) и уравнение (3) эквивалентны. Рассмотрим схему вычисления приближений уравнения (3) или (4) по методу Галеркина.

Рассмотрим метод Галеркина для уравнения $Nj = -g$. Пусть $\{H^h\}$ - семейство подпространств $\tilde{H}^{1/2}(S)$ таких, что для любого $v \in \tilde{H}^{1/2}: \|v - Q^h v\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0$, где Q^h - ортопроектор на H^h в $\tilde{H}^{1/2}(S)$.

Метод Галеркина состоит в том, чтобы найти $\psi^h \in H^h$, такую, что

$$\langle N\psi^h, v \rangle = \langle -g, v \rangle, v \in H^h. \quad (5)$$

Здесь скобки означают соотношения антидвойственности пространств $H^{-1/2}(S)$ и $\tilde{H}^{1/2}(S)$, то есть продолжения по непрерывности на $H^{-1/2}(S)$ и $\tilde{H}^{1/2}(S)$ формы $\langle g, v \rangle = \int_S g v ds$. Если H^h - конечномерно, то

схема метода Галеркина приводит к системе линейных алгебраических уравнений. Пусть ψ_i^h - базис в H^h . Тогда соотношение (5) эквивалентно

$$N^h u_h = -b_h, \quad (6)$$

$$\text{где } N^h = \left\{ \langle N\psi_i^h, \psi_j^h \rangle \right\}, b_h = \left\{ \langle g, \psi_j^h \rangle \right\}, u_h = \left\{ u_i^h \right\}, \psi^h = \sum_{i=1} u_i^h \psi_i^h.$$

Коэффициенты u_i^h определяются из системы уравнений Галеркина для уравнения (3):

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \langle A_0 \psi_i^h, \psi_j^h \rangle + \langle B \psi_i^h \psi_j^h \rangle \right\} u_i^h = \langle -g, \psi_j^h \rangle, j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Для сходимости метода Галеркина имеет место следующее утверждение.

Существует $h_0 > 0$ такое, что при всех $0 < h < h_0$, уравнение (6) имеет единственное решение $\psi^h \in H^h$. При $h \rightarrow 0$ ψ^h сходится к

точному решению ψ квазиоптимально, то есть существует постоянная C такая, что для всех h , $0 < h < h_0$, имеет место оценка $\|\psi - \psi^h\|_{1/2} \leq C \inf_{v \in H^h} \|\psi - v\|_{1/2} = CE_{1/2}(\psi; H^h)$. Норма $\|\cdot\|_{1/2}$ означает $\|\cdot\|_{\tilde{H}^{1/2}(S)}$.

Принимая во внимание поведение аппроксимаций точного решения на заданной системе координатных функций, можно получить оценки скорости сходимости приближенного решения к точному.

Наиболее простой для реализации метод получается при использовании кусочно-линейных сплайнов. При этом все элементы матрицы системы метода Галеркина удастся выразить аналитически через значения ядра $K(\xi)$ в точках сетки сплайнов. В этом случае приближенное решение уравнения (3) ψ^h будем искать в виде суперпозиции B -сплайнов первой степени дефекта $\nu=1$:

$$\psi^h(z) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i B_i(z), \text{ где } B_i(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{i-1}}{h_i}, & z_{i-1} \leq z \leq z_i \\ 1 + \frac{z_i - z}{h_{i+1}}, & z_i \leq z \leq z_{i+1} \\ 0, & z \leq z_{i-1} \cup z \geq z_{i+1} \end{cases}$$

$z_i, i=0, \dots, n$ - точки разбиения отрезка $[-l, l]$, $z_0 = -l$, $z_n = l$, $z_i < z_{i+1}$, $h_i = z_i - z_{i-1}$.

Рассмотренная вычислительная схема решения одного интегрального уравнения полностью переносится на систему интегральных уравнений, которая получается при рассмотрении системы вибраторных излучателей.

Рассмотрим систему из n произвольно расположенных линейных вибраторов в однородном пространстве с волновым числом k . Каждый вибратор представляет собой идеально проводящий тонкостенный цилиндр радиуса a_m длины L_m . Вибраторы заданы координатами одного из концов (x_{0m}, y_{0m}, z_{0m}) и направляющими косинусами (p_m, q_m, r_m) . В некотором сечении каждого вибратора подключена по окружности разность потенциалов U_m .

При условии, что вибраторы удалены друг от друга на расстоянии много больше радиуса a_m , причем $a_m \ll \lambda$ (λ - длина волны в окружающем пространстве), можно считать, что ток в вибраторах направлен вдоль их осей. На концах вибраторов тока нет.

Свяжем с каждым вибратором декартову систему координат

$O_m x_m y_m z_m$, направив ось $O_m z_m$ вдоль m -го вибратора, причем начало координат O_m совпадает с заданным концом m -го вибратора. Обозначим матрицу направляющих косинусов системы координат $O_m x_m y_m z_m$ в заданной системе через B_m , где $|B_m| = 1$ и

$$\sum_{j=1}^3 b_{ij}^m b_{kj}^m = \sum_{j=1}^3 b_{ji}^m b_{jk}^m = \begin{cases} 1, i=k \\ 0, i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

причем $b_{13}^m = p_m, b_{23}^m = q_m, b_{33}^m = r_m, Z_m$ - координата сечения m -го вибратора, где подключена разность потенциалов в системе $O_m x_m y_m z_m$.

Перейдем к l -й системе координат $O_l x_l y_l z_l$. Введем следующие обозначения: $X_m = (x_{0m}, y_{0m}, z_{0m})$, $X_m^l = (x_{0m}^l, y_{0m}^l, z_{0m}^l)^T$ - координаты конца m -го вибратора в $O_l x_l y_l z_l$; $P_m = (p_m, q_m, r_m)^T$, $P_m^l = (p_m^l, q_m^l, r_m^l)^T$ - направляющие косинусы m -го вибратора в l -й системе координат. Тогда $X_m^l = (X_m - X_l)P_m$, $P_m^l = B_l P_m$.

Электромагнитное поле вибратора можно в нашем случае выразить через векторный потенциал $\vec{A}$ в виде

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = \frac{i}{\omega \varepsilon} \{ \text{grad} \text{div} \vec{A} + k^2 \vec{A} \}, \quad (8)$$

где ε - диэлектрическая постоянная. Временная зависимость взята в виде $e^{-i\omega t}$.

Так как в l -й системе координат

$$\vec{A} = \left\{ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^n A_m P_m^l, \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^n A_m q_m^l, \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^n A_m r_m^l + A_l \right\} = \{A_{x_l}, A_{y_l}, A_{z_l}\}, \quad (9)$$

где A_m создан m -м вибратором и направлен вдоль его оси $O_m z_m$, то

$$E_{z_l} = \frac{i}{\omega \varepsilon} \left\{ \frac{\partial^2 A_{z_l}}{\partial z_l^2} + k^2 A_{z_l} + \frac{\partial^2 A_{x_l}}{\partial x_l \partial z_l} + \frac{\partial^2 A_{y_l}}{\partial y_l \partial z_l} \right\}. \quad (10)$$

На поверхности l -го вибратора S_l тангенциальная составляющая электрического поля должна быть равна 0, т. е.

$$E_{z_l}^n = E_{z_l} + E_{z_l}^{\text{cm}} = 0, \quad (11)$$

где $E_{z_l}^{\text{cm}} = U_l \delta(z_l - Z_l)$ - стороннее электрическое поле, созданное заданной на вибраторе разностью потенциалов.

Согласно (10) и (11) получаем

$$\frac{i}{\omega \varepsilon} \left\{ \frac{\partial^2 A_{z_l}}{\partial z_l^2} + k^2 A_{z_l} + \frac{\partial^2 A_{x_l}}{\partial x_l \partial z_l} + \frac{\partial^2 A_{y_l}}{\partial y_l \partial z_l} \right\} + U_l \delta(z_l - Z_l) = 0.$$

Откуда после интегрирования по z_l будем иметь на поверхности l -го вибратора условие

$$\begin{aligned} A_{z_l} + \int_0^{L_l} \frac{\sin k|z_l - \xi|}{2k} \left[\frac{\partial^2 A_{x_l}}{\partial x_l \partial \xi} + \frac{\partial^2 A_{y_l}}{\partial y_l \partial \xi} \right] d\xi = \\ = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} U_l \sin k|z_l - Z_l| + C_l^1 \sin kz_l + C_l^2 \cos kz_l. \end{aligned} \quad (12)$$

Постоянные C_l^1 и C_l^2 определяются из условия равенства нулю токов на концах поверхности l -го вибратора. Векторный потенциал одного вибратора, имеющего ток $I_m(t)$, равен

$$A_m(M) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{L_m} I_m(t) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR_m}}{R_m} d\psi dt \quad (13)$$

где $R_m = \sqrt{(x_l - x_{0m}^l - tp_m^l)^2 + (y_l - y_{0m}^l - tq_m^l)^2 + (z_l - z_{0m}^l - tr_m^l)^2}$,

или в цилиндрической системе координат

$R_m = \sqrt{\rho_l^2 + a_m^2 - 2\rho a_m \cos(\varphi_l - \psi) + (z_l - t)^2}$ - расстояние от точки на m -м вибраторе $N_m = \{a_m, \psi, t\}$ или $\{x_{0m}^l + tp_m^l, y_{0m}^l + tq_m^l, z_{0m}^l - tr_m^l\}$ до некоторой фиксированной точки пространства $M = \{\rho_l, \varphi_l, z_l\}$ или $\{x_l, y_l, z_l\}$ в системе $O_l x_l y_l z_l$.

Если мы опустим точку M на поверхность l -го вибратора, то, учитывая что $\rho_l = a_l$ и что a_l много меньше расстояния между вибраторами и длины волн в окружающем пространстве, получим

$$A_l = \frac{1}{4\pi} \int_0^{L_l} I_l(t) K_{ll}(|z_l - t|) dt, \quad (14)$$

$$K_{ll}(|z_l - t|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{ik\sqrt{(z_l-t)^2 + 4a_l^2 \sin^2 \psi}}}{\sqrt{(z_l-t)^2 + 4a_l^2 \sin^2 \psi}} d\psi, \quad (0 \leq z_l \leq L_l) \quad (15)$$

$$A_m(M) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{L_m} I_m(t) \frac{e^{ikR_m^l(z_l, t)}}{R_m^l(z_l, t)} dt, \quad (16)$$

где

$$R_m^l = \sqrt{(x_{0m}^l + tp_m^l)^2 + (y_{0m}^l + tq_m^l)^2 + (z_l - z_{0m}^l - tr_m^l)^2} = \\ = \sqrt{(z_l p_l - (x_{0m} - x_{0l}) - tp_m)^2 + (z_l q_l - (y_{0m} - y_{0l}) - tq_m)^2 + (z_l r_l - (z_{0m} - z_{0l}) - tr_m)^2}.$$

Подставим (14) и (16), учтя (9), в (12)

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{L_l} I_l(t) K_{ll}(|z_l - t|) dt + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^n \int_0^{L_l} I_l(t) K_{lm}(z_l, t) dt = \\ = 2\pi i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} U_l \sin k|z_l - Z_l| + C_l^1 \sin kz_l + C_l^2 \cos kz_l. \quad (17)$$

где

$$K_{lm}(z_l, t) = r_m^l \frac{e^{ikR_m^l(z_l, t)}}{R_m^l(z_l, t)} - [(x_{0m} - x_{0l})(p_m - p_l r_m^l) + (y_{0m} - y_{0l})(q_m - q_l r_m^l) + \\ + (z_{0m} - z_{0l})(r_m - r_l r_m^l) + t(1 - (r_m^l)^2)] \int_0^{L_l} \frac{\sin k|z_l - \xi|}{2k} (\xi - z_{0m}^l - tr_m^l) [-k^2 - \\ - \frac{3ik}{R_m^l(\xi, t)} + \frac{3}{(R_m^l(\xi, t))^2}] \frac{e^{ikR_m^l(\xi, t)}}{R_m^l(\xi, t)} d\xi, \quad (0 \leq z_l \leq L_l).$$

Система интегральных уравнений (17) является слабо сингулярной системой интегральных уравнений с неоднородными коэффициентами C_l^1 и C_l^2 , которые определяются из условия принадлежности распределения тока $I_l(t)$ пространству функций $\tilde{H}^{1/2}([0, k_l])$. Корректная постановка задачи решения полученной системы уравнений рассмотрена в монографии Б.Г. Габдуллаева ([15], параграф 20). Для численного решения системы (17) удобно использовать метод аппроксимации неизвестных функций В-сплайнами, а систему линейных уравнений получать методом коллокации в узлах В-сплайна. Подобная вычислительная схема использована для расчета логопериодической антенны в работе [16].

Существенное развитие данная методика получила в работах [17], [18], где исследована самостоятельная задача о возбуждении системы вибраторов линией питания, причем получены коэффициенты отражения в линии питания от неоднородности, которой является активный вибратор.

Задача об излучении вибраторов с учетом влияния проводящей земли является одной из ключевых задач теории антенн. Однако в большинстве работ [19] исследуется влияние земли на характеристики излучения поля в дальней зоне. Влияние земли на согласование вибраторов с линией питания обычно не рассматривалась. Однако создание мобиль-

ных систем связи показало, что земля может влиять на уровень излучаемой мощности антенной. Это обстоятельство требует дальнейшего развития математических моделей в теории вибраторных антенн.

Рассмотрим вибратор, представляющий собой идеально проводящий тонкостенный цилиндр, расположенный над плоской однородной землей с параметрами ε_1 , μ_0 , σ_1 . Вибратор питается идеальным источником тока $E_{cm} = U_0 \delta(N - N_p)$, где U_0 - разность потенциалов в точке питания N_p , N - произвольная точка пространства; L , a_0 - длина и радиус вибратора.

Электромагнитное поле $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяет уравнением Максвелла (временная зависимость - $\exp(i\omega t)$)

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \tilde{\varepsilon} \mathbf{E} - \mathbf{j}_{ext},$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H},$$

где

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_m - i\sigma_m / \omega, \quad \mu = \mu_0,$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \varepsilon_0, & z > 0, \\ \varepsilon_1, & z < 0, \end{cases} \quad \sigma_m = \begin{cases} \sigma_0, & z > 0, \\ \sigma_1, & z < 0. \end{cases}$$

На поверхности земли $z = 0$ касательные составляющие $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ непрерывны, а на бесконечности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют условиям излучения.

На поверхности вибратора должно выполняться граничное условие равенства нулю тангенциальной составляющей полного электрического поля

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}^{total}(N)] = 0, \quad N \in S,$$

где $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к поверхности вибратора.

Введя векторный потенциал Герца $\mathbf{A}$, можно представить поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в виде

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{i}{\omega \tilde{\varepsilon}} \{ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + k^2 \mathbf{A} \}.$$

Перейдем к решению неоднородного дифференциального уравнения относительно $\mathbf{A}$.

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}_{cm}, \quad (18)$$

где

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \tilde{\varepsilon}.$$

Решение этого уравнения с учетом граничных условий на поверхности раздела ($z = 0$) может быть выражено формулой

$$\mathbf{A}(Q) = \frac{\mu_0 a_0}{4\pi} \int_S j(N) \hat{\mathbf{G}}(Q, N) \mathbf{l} ds, \quad (19)$$

где $j(N)$ - неизвестное распределение плотности тока по вибратору, $\mathbf{l} = \{p_x, q_y, r_z\}$ - единичный вектор, направленный вдоль оси вибратора (p_x, q_y, r_z - направляющие косинусы), тензорная функция Грина точечного источника $\hat{\mathbf{G}}(Q, N)$

$$\hat{\mathbf{G}}(Q, N) = \begin{bmatrix} G_1(Q, N) & 0 & 0 \\ 0 & G_1(Q, N) & 0 \\ \frac{\partial g(Q, N)}{\partial x} & \frac{\partial g(Q, N)}{\partial y} & G_{11}(Q, N) \end{bmatrix}$$

где для $z > 0$:

$$\begin{aligned} G_1(Q, N) &= \frac{\exp(-ik_0 R)}{R} + \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \frac{\exp[-\eta_0(z+z')]}{\eta_0} \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \lambda d\lambda, \\ G_{11}(Q, N) &= \frac{\exp(-ik_0 R)}{R} + \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \frac{\exp[-\eta_0(z+z')]}{\eta_0} \frac{\eta_0 \varepsilon - \eta_1}{\eta_0 \varepsilon + \eta_1} \lambda d\lambda, \\ g(Q, N) &= 2 \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \frac{\exp[-\eta_0(z+z')]}{\eta_0 + \eta_1} \frac{\varepsilon - 1}{\eta_0 \varepsilon + \eta_1} \lambda d\lambda, \\ R &= \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}, \quad \rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \\ \eta_0 &= \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}, \quad \eta_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1 - i\sigma_1/\omega)/\varepsilon_0, \\ k_0^2 &= \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0, \quad k_1^2 = \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_1 - i\sigma_1/\omega). \end{aligned}$$

Используя выражение (19) для векторного потенциала Герца, можно записать уравнение Галлена относительно неизвестного распределения тока $I(N) = 2\pi a_0 j(N)$.

Для вертикального вибратора (рис. 1) $\mathbf{l} = \{0, 0, 1\}$ и уравнения Галлена имеет вид

$$\int_{z_0}^{z_0+L} I(t) [K_1(t, z') + K_2(t, z')] dt = F(z'), \quad z' \in [z_0, z_0 + L], \quad (20)$$

где

$$K_1(t, z') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\exp(-ik_0 R)}{R} - \frac{\exp(-ik_0 R_0)}{R_0} \right] d\varphi,$$

$$K_2(t, z') = \int_0^\infty J_0^2(a_0 \lambda / 2) \frac{2\varepsilon}{\eta_0 \varepsilon + \eta_1} \exp[-\eta_0(t + z')] \lambda d\lambda,$$

$$R = \sqrt{(t - z')^2 + 4a_0^2 \sin^2 \varphi}, \quad R_0 = \sqrt{(t + z')^2 + 4a_0^2 \sin^2 \varphi},$$

$$F(z') = -4\pi i \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} U_0 \sin k_0(z' - z_p) h(z' - z_p) + C_1 \sin k_0 z' + \cos k_0 z'.$$

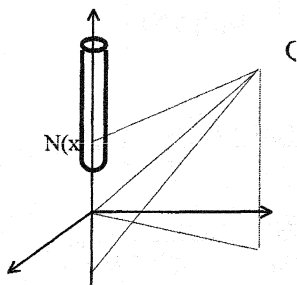


Рис.1

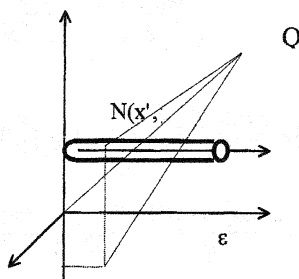


Рис 2

В случае горизонтального вибратора (рис. 2) уравнение Галлена примет вид

$$\int_0^L J(t) [K_1(t, z') + K_3(t, z') + K_4(t, z')] dt = F(z'), \quad z' \in [0, L], \quad (21)$$

где $K_1(t, z')$ имеет тот же вид, что и в случае вертикального вибратора,

$$K_3(t, z') = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi J_0(\lambda \rho) \frac{\exp[-\eta_0(2z_0 + a_0(1 - \cos \varphi))]}{\eta_0 + \eta_1} \lambda d\lambda d\varphi,$$

$$K_4(t, z') = -\frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi J_1(\lambda \rho) A_1(\lambda) (t - \xi) \cos k_0(z' - \xi) \frac{\lambda^2}{\rho} \exp(-2\eta_0 z_0) d\lambda d\xi,$$

$$A_1(\lambda) = \frac{1}{\eta_0 + \eta_1} \frac{\varepsilon - 1}{\eta_0 \varepsilon + \eta_1}.$$

Уравнения (20) и (21) являются интегральными уравнениями Фредгольма I рода. Для обеспечения устойчивости решения этих уравнений используется метод саморегуляризации (выделяется особенность в пер-вых слагаемых ядра $K_1(t, z')$).

Для решения уравнений (20) и (21) используем метод коллокаций. Представим неизвестную функцию распределения тока комбинацией M базисных кусочно-постоянных функций и найдем значения коэффициентов разложения, при которых данное представление тока является решением интегрального уравнения в M дискретных точках. Для нахождения коэффициентов разложения тока необходимо решить следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^M (a_{nm}^1 + a_{nm}^2) I_n = F_m, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Коэффициенты a_{nm}^1 для вертикального и горизонтального вибраторов вычисляются так же, как и для случая расположения вибраторов в свободном пространстве. Коэффициенты a_{nm}^2 содержат несобственные интегралы с осциллирующей подынтегральной функцией. Так как параметры a_0 в случае вертикального вибратора и ρ в случае горизонтального вибратора достаточно малы, функции Бесселя имеют большой период осцилляции, а подынтегральное выражение быстро убывает за счет экспоненциального множителя, то вычисление интегралов можно проводить по вещественной оси на отрезках между нулями подынтегральной функции, например по формулам Гаусса.

При нахождении поля, излучаемого вибратором в дальней зоне ($k_0 R \gg 1$), можно воспользоваться асимптотическим методом приближенного вычисления интегралов Зоммерфельда, называемым методом седловой точки. Запишем выражение (19) для элементарного вертикального диполя, заменив функцию Бесселя в интеграле Зоммерфельда на функцию Ханкеля

$$A_z^d(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} G_{11}(Q, N(t)) j(t) dt,$$

где

$$G_{11}(Q, N(t)) = \frac{\exp(-ik_0 R)}{R} + I,$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(\lambda \rho) \Gamma_\nu(\lambda) \frac{\exp[-\eta_0(z+t)]}{\eta_0} \lambda d\lambda,$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-t)^2}, \quad t \in [z_0, z_0 + L],$$

$H_0^{(2)}(\lambda \rho)$ - функция Ханкеля, $\Gamma_v(\lambda) = (\varepsilon \eta_0 - \eta_1) / (\varepsilon \eta_0 + \eta_1)$.

В результате исследования асимптотического выражения для интеграла I можно получить следующее представление для $G_{11}(Q, N(t))$ $k_0 R \gg 1$

$$G_{11}(Q, N(t)) = \frac{\exp(-ik_0 R)}{R} - \frac{\exp(-ik_0 R_0)}{R_0} \Gamma_v(\theta) - \\ - \frac{\exp(-ik_0 R_0)}{k_0 R_0^2} \Gamma_{v2}(\theta) + i \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{1 - \varepsilon^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} A_2,$$

где

$$\Gamma_v(\theta) = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \varepsilon \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta}.$$

$$\Gamma_{v2}(\theta) = \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \Gamma_v(\theta) - \operatorname{ctg} \theta \Gamma'_v(\theta) + \Gamma''_v(\theta),$$

$$\Gamma'_v(\theta) = \frac{2\varepsilon(\varepsilon - 1) \sin \theta}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)^2},$$

$$\Gamma''_v(\theta) = 2\varepsilon(\varepsilon - 1) \left[\frac{\cos \theta (\varepsilon - \sin^2 \theta + \sin \theta)}{(\varepsilon - \sin^2 \theta) (\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)} + \right. \\ \left. + \frac{2 \sin \theta (\cos \theta + \varepsilon \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \sin \theta)}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)^3} \right].$$

$$A_2 = 2h(\theta - \theta_p) \sqrt{\frac{2\pi i k_0}{R_0 \sin \theta}} \exp\{-ik_0 [\sqrt{\varepsilon} R_0 \sin \theta - (z+t)] \sqrt{1/(1+\varepsilon)}\},$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-t)^2}, \quad R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+t)^2}, \quad t \in [z_0, z_0 + L],$$

$$\theta_p = \operatorname{Re}(\psi_p) - \arccos[\operatorname{ch}(\operatorname{Im}(\psi_p))].$$

Для горизонтального вибратора вектор Герца имеет две составляющие

$$A_y^d(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} G_1(Q, N(t)) j(t) dt,$$

$$A_z^d(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial g(Q, N(t))}{\partial y} j(t) dt,$$

Проводя преобразования, аналогичные преобразованиям для случая вертикального вибратора, можно получить

$$G_1(Q, N(t)) = \frac{\exp(-ik_0 R)}{R} + \frac{\exp(-ik_0 R_0)}{R_0} \Gamma_h(\theta) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\exp(-ik_0 R_0)}{k_0 R_0^2} \Gamma_{h2}(\theta),$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}, \quad R_0 = \sqrt{\rho^2 + (z + z_0)^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + (t - y)^2}, \quad t \in [0, L],$$

$$\Gamma_h(\theta) = \frac{\cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}},$$

$$\Gamma_{h2}(\theta) = \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \Gamma_h(\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\varepsilon (\sin \theta - 1)}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 \cos \theta + \sin \theta \cos \theta}{(\varepsilon - \sin^2 \theta)^{3/2} (\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{\varepsilon \sin \theta (1 - \cos \theta) (\sin \theta - 1)}{(\varepsilon - \sin^2 \theta) (\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)},$$

$$\frac{\partial g(Q, N(t))}{\partial y} = 2|y - t| \frac{\exp(-ik_0 R_0)}{R_0^2} \Gamma_{h1}(\theta) -$$

$$- \sqrt{\frac{2ik_0}{\pi}} \frac{|y - t|}{\rho^{3/2}} \Gamma_{h3} \exp\{-ik_0 [\sqrt{\varepsilon} \rho - (z + z_0)] \sqrt{1/(1 + \varepsilon)}\},$$

где

$$\Gamma_{h1}(\theta) = \frac{(\varepsilon - 1) \cos \theta}{\varepsilon (\cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta})^2},$$

$$\Gamma_{h3} = -4 \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2 \sqrt{1 + \varepsilon}}.$$

Воспользовавшись представлением напряженностей электромагнитного поля через векторный потенциал Герца, проинтегрировав вдоль вибратора, можно получить выражения для диаграмм направленностей.

Предложенный метод расчета характеристик линейного вибратора, расположенного над полупроводящей землей, позволяет осуществлять численные исследования, связанные с разработкой конкретных антенных устройств с учетом влияния земли.

На основе изложенного алгоритма построены прикладные программы, позволяющие провести исследования влияния земли на распре-

Литература

1. Pocklington H.C. Proc. Cambridge Philosophical Society. 1897. №9. С. 324
2. Abraham M. Annalen der Physik (Wied. Ann.). 1988. № 66. С. 435.
3. Abraham M. Phisikalische Zeitschrift. 1901. № 2. С. 329
4. Кляцкин И.Г. Основы теории линейных антенн. Л.: ЛЭТИ им. проф. М.А. Бонч-Бруевича. 1966.
5. E. Hallen, "Theoretical investigation into transmitting and receiving antenna", Nova Acta Regide Soc. Sci. Upsaliensis, Ser.4. 11, p.1,1938.
6. King R.W.P. The Theory of Linear Antennas. Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1956.
7. Леонтович М.А., Левин М.Л. К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн. // ЖТФ. 1944. Т. 14. № 9. Сс. 481-506.
8. Вайнштейн Л.А. Симметричные электрические колебания идеально проводящего полого цилиндра конечной длины. Ч. II, III. ЖТФ. 1967. Т. 37. № 7. Сс. 1181-1195.
9. Шамеева Н.А. Электродинамический расчет симметричного вибратора, возбуждаемого в разрез двухпроводной линии. // Докл. АН СССР 1971. Т. 201. № 2. Сс. 328-330.
10. Ильинский А.С., Селин В.И. Влияние фидера на электрические характеристики вибраторных антенн. // Радиотехника. 1981. Т. 36. № 4. Сс. 62-66.
11. Тихонов А.Н., Дмитриев В.И. Метод расчета распределения токов в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы. // В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 10. М.: Изд-во МГУ. 1968. Сс.3-8.
12. Ильинский А.С., Бережная И.В. Исследование распределения тока в системе произвольно расположенных вибраторов. // В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 20. М.: Изд-во МГУ. 1973. Сс.263-270.
13. Бережная И.В. Комплекс программ решения задачи излучения многоэлементной вибраторной антенны с учетом влияния линии возбуждения. // Математическое и программное обеспечение библиотеки прикладных программ по электродинамике. М.: Изд-во МГУ. 1987. Сс. 44-49.
14. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР. 1996.
15. Габдулхаев Б.Г. Численный анализ сингулярных интегральных

- уравнений. Казань: Изд-во Казанского Университета. 1995.
16. Ильинский А.С., Бережная И.В., Коган Б.Л. Расчет логопериодического облучателя зеркальной антенны. // В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 36. М.: Изд-во МГУ. 1982. Сс. 84-90.
 17. Ильинский А.С., Бережная И.В. Математические модели тонких вибраторных антенн. // Математические модели и вычислительные методы. М.: Изд-во МГУ. 1987. Сс. 101-126.
 18. Ильинский А.С., Бережная И.В. Исследование влияния линии возбуждения на характеристики многоэлементных вибраторных антенн. // Числительные методы электродинамики. М.: Изд-во МГУ. 1983. Сс. 65-71.
 19. King R.W.P. and Smith G. Antennas in Matter. Fundamentals, Theory and Applications. The MIT Press., London, England, 1981.
 20. Альховский Э.А., Бережная И.В., Кондратьев А.Г. Учет влияния проводящей земли на распределение тока и диаграммы направленности линейного излучателя. // Методы математического моделирования и вычислительной диагностики. М.: Изд-во МГУ. 1990. Сс. 199-208.
 21. Ilinski A.S. Berezhnaya I.V. Alkhovski E.A. Kondratjev A.G. and Perfilov O.Ju. Investigations of HF and VHF Ground Antennas for Communication Systems. // Electromagnetics. Vol. 19. № 2. 1999. Pp. 171-185.
 22. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Н. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа. 1991.