Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Теория оптимизации**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические методы обработки информации и принятия решений**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к вариативной части ОПОП ВО.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу и линейной алгебре в объеме, соответствующем программе первого года обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат
* **ПК-5.Б** Способность определить совокупность математических методов и программных решений для отдельного этапа решения прикладной задачи в рамках заданной схемы

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. основные понятия и факты конечномерного выпуклого анализа и теории оптимизации.

**Уметь:**

1. применять на практике средства теории оптимизации для решения задач соответствующих классов; уметь строго обосновывать математические утверждения;
2. применять условия оптимальности для анализа и решения оптимизационных моделей.

**Владеть:**

1. современными средствами выпуклого анализа и теории оптимизации.

**4.** Формат обучения: лекции проводятся с использованием меловой доски.

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 4 з.е., в том числе 72 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 72 академических часа на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | |
| **Контактная работа  (работа во взаимодействии с преподавателем)**  **Виды контактной работы, часы** | | | **Самостоятельная работа обучающегося,**  **часы** |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |  |
| 1. Классические разделы теории оптимизации | **17** | 12 | 0 | **12** | **5** |
| 1. Линейное программирование | **17** | 12 | 0 | **12** | **5** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 1 | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| 1. Выпуклые множества | **16** | 12 | 0 | **12** | **4** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 2 | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| 1. **Промежуточная аттестация: устный экзамен** | **18** | 0 | 0 | **0** | **18** |
| 1. Выпуклые функции | **25** | 18 | 0 | **18** | **7** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 3 | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| 1. Нелинейное программирование | **25** | 18 | 0 | **18** | **7** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 4 | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| 1. Промежуточная аттестация: устный экзамен | **18** | 0 | 0 | **0** | **18** |
| **Итого** | **144** | **72** | **0** | **72** | **72** |

**7.** Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**7.1.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости

|  |  |
| --- | --- |
| Контрольная работа № 1 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Выписать двойственную задачу к задаче линейного программирования  2. Определить, какое из правил симплекс-метода выполняется в вершине допустимого множества задачи линейного программирования | 1. Выписать двойственную задачу к задаче линейного программирования  2. Решить симплекс-методом задачу линейного программирования  используя начальную вершину |
| Контрольная работа № 2 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Дать определения аффинного множества, выпуклого  множества, конуса, выпуклого конуса.  2. Сформулировать теорему Минковского об отделимости точки  от множества. | 1. Дать определения выпуклой, аффинной и неотрицательной  комбинации точек, а также выпуклой, аффинной и конической оболочки  множества.  2. Сформулировать теорему о собственно опорной  гиперплоскости и теорему Фенхеля о собственной отделимости. |
| Контрольная работа № 3 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Дать определения выпуклой и вогнутой функции.  2. Найти все (локальные и глобальные) решения задачи | 1. Дать определения субградиента и субдифференциала функции.  2. Решить задачу  2 |
| Контрольная работа № 4 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Сформулировать теорему Куна-Таккера.  2. Выдвинув из геометрических соображений гипотезу и  обосновав ее, решить задачу  *+* | 1. Сформулировать теорему Куна-Таккера о седловой точке.  2. Решить задачу |

**7.2.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации

**Вопросы к экзамену по первой части курса**

1. Общая задача оптимизации. Понятия решения. Теоремы о существовании глобального решения.
2. Квадратичные функции. Существование глобальных экстремумов у квадратичных функций.
3. Проекция точки на множество. Теоремы о существовании и единственности проекции.
4. Задача безусловной оптимизации. Дифференцируемые функции. Условия оптимальности в задаче безусловной оптимизации.
5. Дифференцируемые отображения. Теорема о неявной функции. Теорема Люстерника.
6. Классическая задача на условный экстремум. Принцип Лагранжа. Условия регулярности.
7. Условия оптимальности второго порядка в классической задаче на условный экстремум.
8. Понятия полиэдра, вершины полиэдра, вырожденной и невырожденной вершины. Теоремы о вершинах полиэдра.
9. Канонический полиэдр. Теоремы о вершинах канонического полиэдра.
10. Теоремы о разрешимости систем линейных неравенств и уравнений.
11. Постановка и формы записи задачи линейного программирования.
12. Основные свойства задач линейного программирования; достаточные условия существования решения, условия оптимальности в основной задаче линейного программирования, теорема о достижении экстремума в вершине допустимого множества.
13. Понятие двойственной задачи линейного программирования. Простейшие факты теории двойственности.
14. Основные факты теории двойственности задач линейного программирования; условия оптимальности в общей задаче линейного программирования, теорема двойственности, теорема о дополняющей нежесткости, теорема существования.
15. Базис вершины канонического полиэдра.
16. Метод полного перебора вершин. Общая схема симплекс-метода.
17. Итерация симплекс-метода. Теоремы о правилах симплекс-метода.
18. Явление зацикливания симплекс-метода. Правило Блэнда для устранения зацикливания.
19. Теорема о связи между параметрами последовательных итераций симплекс-метода. Симплекс-таблицы.
20. Метод искусственного базиса.
21. Аффинные множества.
22. Выпуклые множества. Выпуклые конусы. Теоремы о внутренних операциях в классе выпуклых множеств.
23. Комбинации точек и оболочки множеств.
24. Выпуклые многогранники, многогранные конусы и многогранные множества.
25. Теорема Каратеодори.
26. Теорема Радона. Теорема Хелли.
27. Относительная внутренность выпуклого множества. Теоремы о существовании относительно внутренней точки и об отрезке. Другие результаты об относительной внутренности и относительной границе.
28. Размерность выпуклого множества. Множества полной размерности.
29. Свойства неограниченных выпуклых множеств.
30. Теорема Минковского об отделимости точки от множества.
31. Опорные гиперплоскости. Теоремы о существовании опорных гиперплоскостей.
32. Отделимость двух множеств. Теоремы отделимости.
33. Сопряженные множества. Теорема о втором сопряженном множестве. Теорема двойственности выпуклых множеств. Множество, сопряженное к многогранному множеству.
34. Крайние точки выпуклых множеств. Крайние точки полиэдра. Критерий существования крайней точки.
35. Теорема о представлении выпуклого компакта.
36. Эквивалентность понятий полиэдра и многогранного множества.

**Типовые задачи для экзамена по первой части курса**

Существование решения. Геометрическая интерпретация задач оптимизации

1. Доказать теорему о глобальном минимуме квадратичной функции.

2. Доказать теорему о существовании проекции точки на замкнутое множество .

3. Пусть непрерывная функция имеет точку глобального минимума на . Следует ли отсюда, что имеет точку глобального минимума на любом непустом замкнутом множестве .

4. Пусть непрерывные функции и имеют точки глобального минимума на . Следует ли отсюда, что их сумма имеет точку глобального минимума на ?

5. Найти из геометрических соображений точку глобального минимума функции на множестве

6. Найти из геометрических соображений точку глобального минимума функции на множестве , .

7. При каких значениях параметра задача , имеет глобальное решение, а при каких лишь локальное?

Задача безусловной оптимизации

Доказать, что функция – бесконечно растущая на множестве .

2. Пусть - неотрицательно определенная симметричная . Доказать, что любая критическая точка квадратичной функции является точкой ее глобального минимума на .

3. Построить пример дифференцируемой на функции, имеющей ровно одну критическую точку, которая является точкой ее локального, но не глобального минимума.

4. Доказать, что при любом значении параметра система уравнений , относительно имеет решение, отличное от .

Классическая задача на условный экстремум

1. Найти точки экстремума функции при условии , .

2. Дать геометрическую интерпретацию задачи .

3. Найти все точки локального и глобального экстремума функции при условии , где - симметричная .

4. Среди всех треугольников заданного периметра найти тот, который имеет наибольшую площадь.

5 (о стрельбе с высоты). На заданной высоте над плоской поверхностью расположено артиллерийское орудие. Снаряд вылетает из орудия с заданной скоростью. Под каким углом к горизонту следует произвести выстрел, чтобы снаряд улетел как можно дальше?

Элементы теории линейных неравенств

1. Доказать формулу где

2 (теорема Александрова-Фана). Пусть , . Доказать, что имеет решение одна и только одна из двух систем: или , , .

3 (теорема Вороного-Карвера) . Пусть , . Доказать, что имеет решение одна и только одна из двух систем: или, , .

4 (теорема Штимке-Фана). Пусть , Доказать, что имеет решение одна и только одна из двух систем: , или

Теория линейного программирования

1. Пусть полиэдр ограничен и имеет внутренние точки. Требуется вписать в шар наибольшего радиуса. Сформулировать эту задачу как ЗЛП.

2. Построить задачу, двойственную к следующей блочной ЗЛП

*,*

*,*

где ,

3. Построить задачу, двойственную к динамической задаче планирования производства

*,*

*,*

где , .

4. Множество решений ЗЛП может:

1) состоять из одной точки;

2) состоять более чем из одной точки, но быть ограниченным;

3) быть неограниченным.

Привести примеры, показывающие, что для множеств решений взаимодвойственных задач возможно любое сочетание этих случаев.

5. Доказать, что допустимые множества основной ЗЛП и двойственной к ней не могут быть одновременно непустыми и ограниченными.

8 (задача о разгрузке состава) . На овощную базу прибыл железнодорожный состав, доставивший тонн овощей. На базе имеется хозрасчетных бригад грузчиков. Условия -й бригады: разгрузка тонн в день при расценке рублей за тонну, За каждый день простоя состава база платит железной дороге штраф рублей. Какие договоры база должна заключить с бригадами, чтобы стоимость разгрузки была минимальной?

Симплекс-метод

1. Доказать правило отсутствия решения, опираясь на теорию двойственности задач ЛП.

2. Доказать, что для невырожденной вершины канонического полиэдра справедливо утверждение, обратное правилу оптимальности: если - решение задачи, то выполнено условие , т.е. .

3. Привести пример, когда вырожденная вершина канонического полиэдра

является решением задачи, но условие не выполнено.

4. Доказать, что для невырожденной вершины канонического полиэдра справедливо следующее уточнение результата задачи 6.2: если x - единственное решение, то .

Начальные сведения о выпуклых множествах

1. Доказать теорему о линейном подпространстве параллельном аффинному множеству.

2. Доказать теорему о представлении аффинного множества как множества решений системы линейных уравнений.

3. Доказать теорему о пересечении выпуклых множеств.

4. Доказать теорему о линейной комбинации выпуклых множеств.

5. Доказать, что множество всевозможных выпуклых комбинаций точек любого множества выпукло.

6. Дать геометрическую интерпретацию доказательства утверждения 2) из теоремы о неограниченных выпуклых множествах.

7. Пусть матрица неотрицательно определена. Доказать, что множество выпукло.

8. Доказать, что выпуклая оболочка открытого множества открыта.

9. Пусть - линейный оператор, - выпуклое множество. Доказать, что образ множества при отображении - выпуклое множество, причем

10. Пусть - линейный оператор, - выпуклое множество. Доказать, что прообраз множества при отображении - выпуклое множество, причем если то Привести пример, показывающий, что условие не обеспечивает последнего равенства.

11. Пусть – выпуклые множества, и . Доказать, что . Можно ли опустить условие ?

12. Пусть - выпуклые множества. Доказать, что

13. Пусть - выпуклые множества, . Доказать, что , = , , Привести примеры, показывающие, что условие не обеспечивает этих равенств.

14. Пусть - неограниченное выпуклое множество. Доказать следующие утверждения:

1)

2) если при некоторых и , то .

Теоремы отделимости и их приложения

1. Доказать, что проекция любой точки на замкнутое выпуклое множество единственна.

2. Основываясь на теореме Минковского и теореме о замкнутости многогранного конуса доказать лемму Минковского-Фаркаша.

3. Основываясь на теореме о существовании опорной гиперплоскости для выпуклого множества доказать теорему об опорной гиперплоскости к выпуклому множеству.

4. Доказать достаточность в теоремы о сильной отделимости.

5. Доказать теорему о множестве, сопряженном к многогранному.

6. Доказать, что если выпуклое множество не является одноточечным, то .

7. Доказать, что для любого выпуклого множества справедливо аффинно.

8. Доказать, что непустой полиэдр , где , , не содержит прямых .

9. Доказать утверждение о пересечении, сумме и сопряженных множествах к многогранным множествам и полиэдрам.

10. Доказать следующие утверждения:

1) любая гиперплоскость, опорная к конусу в , проходит через 0;

2) любая гиперплоскость, опорная к аффинному множеству в , содержит это множество.

11. Пусть - замкнутое выпуклое множество, причем , и - выпуклое множество. Доказать, что - полупространство.

12. Доказать, что два непересекающихся полиэдра в сильно отделимы (воспользоваться теоремой Александрова-Фана).

13. Доказать, что единичный шар – единственное множество в , которое совпадает со своим сопряженным.

14. Привести пример выпуклого компакта в , множество крайних точек которого незамкнуто.

15. Доказать, что образ и прообраз полиэдра (многогранного множества) при линейном отображении есть полиэдр (многогранное множество).

**Вопросы к экзамену по второй части курса**

1. Понятия выпуклой и вогнутой функции. Надграфик выпуклой функции. Неравенство Йенсена.
2. Множества Лебега выпуклой функции. Квазивыпуклые функции.
3. Внутренние операции в классе выпуклых функций.
4. Дифференциальные признаки первого порядка выпуклости функций. Монотонные отображения.
5. Дифференциальный признак второго порядка выпуклости функций. Критерий выпуклости квадратичных функций.
6. Теорема о непрерывности выпуклых функций.
7. Теорема о дифференцируемости по направлениям выпуклых функций.
8. Теоремы об ограниченности множеств Лебега выпуклых функций.
9. Выпуклая задача оптимизации; теоремы о локальных решениях и о структуре множества решений. Задача оптимизации с сильно выпуклой целевой функцией (существование и единственность решения).
10. Дифференциальные условия экстремума в задаче минимизации на выпуклом множестве.
11. Дифференциальные условия экстремума в задаче минимизации при линейных ограничениях.
12. Задача максимизации выпуклой функции.
13. Теорема о промежуточной аффинной функции.
14. Понятия субградиента и субдифференциала. Теорема о существовании субградиента.
15. Теоремы о связи субдифференциала выпуклой функции с дифференцируемостью.
16. Субдифференциал суммы и максимума выпуклых функций.
17. Субдифференциальное условие экстремума в выпуклой задаче оптимизации.
18. Теорема Фана. Теорема регулярности для систем строгих выпуклых неравенств.
19. Теоремы регулярности для систем линейных неравенств и уравнений и для смешанных выпукло-линейных систем.
20. Постановка и классификация задач математического программирования.
21. Необходимые условия экстремума первого порядка для задачи математического программирования (принцип Лагранжа).
22. Понятие регулярности. Достаточное условие экстремума в задаче выпуклого программирования. Условия регулярности в задачах математического программирования с выпуклыми ограничениями. Теорема Куна - Таккера.
23. Условия экстремума второго порядка для задач математического программирования.
24. Понятие двойственной задачи к задаче математического программирования. Двойственные задачи к задачам линейного и квадратичного программирования.
25. Основные факты теории двойственности; теоремы о выпуклости двойственной задачи и о соотношении значений прямой и двойственной задачи, достаточные условия экстремума в прямой и двойственной задачах.
26. Основные факты теории двойственности; теорема двойственности для задачи выпуклого программирования, понятие вектора Куна - Таккера, теорема о существовании решения двойственной задачи.
27. Теорема Куна-Таккера в недифференциальной форме.
28. Теорема Куна-Таккера о седловой точке.

**Типовые задачи для экзамена по второй части курса**

Начальные сведения о выпуклых функциях

1. Основываясь только на определении доказать, что функция сильно выпукла на с константой.

2. Используя теоремы о выпуклых комбинациях и о надграфике доказать неравенство Иенсена.

3. Доказать, что для любых чисел справедливо

4. Привести примеры, показывающие, что квазивыпуклая на данном множестве функция не обязательно выпукла на этом множестве.

5. Доказать, что определение квазивыпуклости функции на выпуклом множестве условию

.

6. Доказать теорему о неотричательной линейной комбинации выпуклых функций.

7. Привести пример, показывающий, что условие неубывания функции *φ* в теореме о суперпозиции выпуклых функций существенно.

8. Доказать теорему о суперпозиции выпуклой функции и аффинного отображения.

9. Доказать, что функция

выпукла на .

10\*. Пусть даны числа Доказать, что так называемая *функция Кобба-Дугласа*

(широко используемая в математической экономике), вогнута на

11. Основываясь на дифференциальных признаках первого порядка, доказать дифференциальный признак второго порядка выпуклости функции.

12. При каких значениях параметра функция

выпукла на?

13. Пусть *X* и *Y* выпуклые множества в соответственно,  выпуклая функция на  ограниченная снизу по при каждом фиксированном  Доказать, что функция  выпукла на .

14. Пусть  *-* непрерывная сильно выпуклая функция на замкнутом выпуклом множествеДоказать, что  *-* бесконечно растущая функция на *X.*

Экстремальные свойства выпуклых функций

1. Доказать лемму об условиях оптимальности во внутренних точках допустимого множества.

2. Решить задачу

3. Решить задачу

4. Найти все значения параметра , при которых точка является решением задачи

,

5\*. Пусть функция дифференцируема и выпукла на . Доказать, что  числа  решение системы уравнений 

6.  Решить задачу

,

7.  Решить задачу

Субдифференциал выпуклой функции

1.  Решить задачу

2.  Решить задачу

3.  Решить задачу

4.  Найти точку в , сумма расстояний от которой до заданных точек  минимальна.

Дифференциальные условия экстремума в задаче нелинейного программирования

1. Выдвигая из геометрических соображений гипотезу, а затем проверяя ее по теореме Куна-Таккера, решить задачу

,

2. При каких значениях параметра  точка является решением задачи

3. При каких значениях параметра  точка является решением задачи

4. Найти глобальное решение задачи

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
| Оценка  РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания**  *Контрольная работа,экзамен* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения**  *Контрольная работа,экзамен* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципи-ального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки  (владения, опыт деятельности)**  *Контрольная работа,экзамен* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

|  |  |
| --- | --- |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** | |
| Результаты обучения | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**  основные понятия и факты конечномерного выпуклого анализа и теории оптимизации.  **Владеть:**  современными средствами выпуклого анализа и теории оптимизации. | **ПК-2.Б** |
| **Уметь:**  1. применять на практике средства теории оптимизации для решения задач соответствующих  классов; уметь строго обосновывать математические утверждения;  2. применять условия оптимальности для анализа и решения оптимизационных моделей. | **ПК-5.Б** |

**8.**Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. 2-е изд. М.: Физматлит, 2005.
2. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

Дополнительная литература:

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
3. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
5. Измаилов А.Ф. Чувствительность в оптимизации. М.: Физматлит, 2006.
6. Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2008.
7. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Физматлит, 2000.

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

**9.** Язык преподавания - русский.

**10.** Преподаватель: профессор факультета ВМК МГУ А.Ф. Измаилов

**11.** Авторы программы: профессор факультета ВМК МГУ А.Ф. Измаилов