МАТЕМАТИЧЕСКИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Дорогие первокурсники факультета ВМК МГУ!

Мы рады приветствовать вас в стенах Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова!

В этом году вам предстоит сделать первые серьезные шаги в красивейший мир, имя которого – МАТЕМАТИКА. Помогать вам в этом будут преподаватели разных кафедр нашего факультета.

В преддверии этих шагов полезно вспомнить, что представляет собой математическое определение, а также математическое утверждение и его доказательство. Это три составляющие практически любого математического текста.

1. Математическое определение

1.1. Математическое определение понятия или объекта выделяет его из уже известного класса, указывая на его неотъемлемые, только ему присущие особенности. В формулировке определения участвует, как правило, слово «**называется**».

Приведем несколько примеров.

Пример 1.1. Биссектрисой треугольника **называется отрезок** (*указан класс геометрических объектов, которому принадлежит биссектриса треугольника*), который **лежит на биссектрисе угла треугольника и соединяет вершину с точкой на противоположной стороне** (*выделена присущая только биссектрисе треугольника особенность*).

Пример 1.2. Биссектрисой угла **называется луч** (*указан класс геометрических объектов, которому принадлежит биссектриса угла*), который **делит угол пополам** (*выделена присущая только биссектрисе угла особенность*).

В некоторых случаях основной текст определения нуждается в предварительном комментарии (вступлении). Тогда определение обычно начинается словом «**пусть**».

Пример 1.3. **Пусть** отрезок $[a, b]$ входит в область определения функции $y = f(x)$. Наименьшим значением этой функции на отрезке $[a, b]$ **называется** число m такое, что

а) для любого $x \in [a, b]$:

$$f(x) \geq m,$$

б) при этом существует $x_0 \in [a, b]$, для которого

$$f(x_0) = m.$$

Пример 1.4. **Пусть** $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1, b > 0$. Логарифмом числа b по основанию a **называется** число x такое, что

$$a^x = b.$$

1.2. Корректность определения. Математическое определение должно быть корректным. Это означает, что оно **однозначно** определяет объект (или понятие) и определяемый им объект **существует**.

Пример 1.5. Определение высоты треугольника как «отрезка, соединяющего вершину с точкой на противоположной стороне и перпендикулярного этой стороне» некорректно, так как из него получается, что в тупоугольном треугольнике можно провести только одну высоту – из вершины тупого угла; две другие высоты соединяют вершины с точками на продолжениях противоположных сторон. Итак, правильное определение: «высотой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне или на ее продолжении и перпендикулярный этой стороне».

1.3. Эквивалентные определения. Два определения называются **эквивалентными** или **равносильными**, если они определяют один и тот же объект.

Пример 1.6. Известны следующие два определения параллелограмма.

Определение 1. Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется параллелограммом.

Определение 2. Четырехугольник, у которого две противоположные стороны равны и параллельны, называется параллелограммом.

Эти определения эквивалентны (доказательство их эквивалентности см. в примере 3.10).

Пример 1.7. Известны три определения абсолютной величины числа.

Определение 1. Абсолютной величиной числа x называется число $|x|$, которое равно x, если $x \geq 0$, и $(-x)$, если $x < 0$.

Определение 2. Абсолютной величиной числа x называется число $|x|$, равное наибольшему из двух чисел x и $(-x)$.

Определение 3. Абсолютной величиной числа x называется число $|x|$, равное тому из двух чисел x и $(-x)$, которое неотрицательно.

Все три определения эквивалентны (доказательство см. в задаче 3.11).

Наличие нескольких определений одного понятия часто бывает полезным при решении задач, так как это позволяет выбрать среди них то, которое ближе всего к контексту рассматриваемой задачи. В таких случаях доказательство того, что используемые определения эквивалентны, обязательно.

Задачи к разделу 1

1.1. Сформулируйте определение:

1) общего делителя двух целых чисел;

2) общего кратного двух целых чисел;

3) взаимно простых натуральных чисел;

4) наибольшего общего делителя двух целых чисел;

5) четной функции;

6) нечетной функции;

7) периодической функции;

8) возрастающей на $[a, b]$ функции;

9) невозрастающей на $[a, b]$ функции;

10) наибольшего значения функции;

11) наименьшего значения функции на множестве X;

12) области значений функции;

13) равенства треугольников;

14) подобия треугольников;

15) касательной к окружности;

16) скрещивающихся прямых;

17) касающихся окружностей;

18) окружности, вписанной в треугольник;

19) окружности, описанной около четырехугольника.

1.2. Укажите, почему сформулированные ниже «определения» некорректны. Исправьте все допущенные ошибки.

1) Арксинусом числа A называется число $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее равенству $\sin x = A$.

2) Арктангенсом числа A называется число $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее равенству $\operatorname{tg} x = A$.

3) Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот.

4) Число M называется наибольшим значением функции $y = f(x)$ на $[a, b]$, если $f(x) \leq M$ для всех $x \in [a, b]$.

5) Плоскости p_1 и p_2 называются перпендикулярными, если каждая прямая в одной плоскости перпендикулярна другой плоскости.

6) Биссектрисой треугольника называется биссектриса внутреннего угла этого треугольника.

7) Расстоянием от точки до плоскости называется перпендикуляр, опущенный из этой точки на плоскость.

2. Математическое утверждение

2.1. Теоремы простейшей структуры. Рассмотрим два высказывания A и B, т.е. суждения о некотором математическом объекте, для которых можно так или иначе установить, справедливы ли они или нет, истинны они или ложны. Наиболее простым с логической точки зрения является утверждение, которое может быть сформулировано следующим образом:

если верно высказывание A, **то** верно высказывание B.

Это теорема простейшей структуры. Высказывание A называется **условием теоремы**, а высказывание B – **утверждением теоремы**. Сама теорема формулируется известным образом: «**если** выполнено **условие** A, **то** имеет место **утверждение** B».

Пример 2.1. Теорема Пифагора – типичный пример такой теоремы. Ее краткая формулировка – «Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов» – в подробной формулировке имеет вид: «**Если** в треугольнике ABC угол C прямой, **то** $AB^2 = AC^2 + BC^2$».

2.2. Язык импликаций позволяет записать математическое утверждение в компактной форме. Под **импликацией** понимается логическая операция, связывающая высказывания A и B в новое высказывание «если A, то B». Она обозначается символом

$$A \Longrightarrow B$$

и читается следующим образом: «если верно высказывание A, то верно и высказывание B» (или «высказывание A влечет высказывание B», или «из высказывания A следует высказывание B»).

Для высказываний A и B, связанных импликациями

$$\begin{cases} A \Longrightarrow B, \\ B \Longrightarrow A, \end{cases}$$

используется обозначение

$$A \Longleftrightarrow B,$$

которая читается как «высказывание A верно тогда и только тогда, когда верно высказывание B» (см. далее п.2.4).

На языке импликаций формулировка теоремы простейшей структуры может быть записана с помощью одной импликации

$$A \Longrightarrow B.$$

Пример 2.2. Формулировку теоремы о логарифме произведения можно компактно записать в виде

$$a, b, c \in \mathbb{R},\ a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

П р и м е р 2.3. Известный признак делимости целого числа на 9 с помощью импликации может быть сформулирован следующим образом:

$$\begin{array}{c} A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}, \\ a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \text{ кратно } 9 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ кратно } 9\,.$$

П р и м е р 2.4. Теорема Виета для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ может быть сформулирована на языке импликаций следующим образом:

x_1, x_2 – вещественные корни уравнения $x^2 + px + q = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 + x_2 = -p,\ x_1 x_2 = q\,.$

2.3. Обратная теорема. Известно, что для многих теорем в математике справедливы и обратные теоремы. Логическая схема построения обратной теоремы такова: если исходное утверждение имеет вид

$$A \Longrightarrow B,$$

то обратное утверждение имеет вид (направление стрелки заменяется на противоположное)

$$B \Longrightarrow A,$$

т.е. условие A и утверждение B меняются ролями.

П р и м е р 2.5. Для теоремы Виета (см. пример 2.4) имеет место обратная теорема: «если x_1 и x_2 таковы, что выполнены равенства $x_1 + x_2 = -p,\ x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$».

Справедливость этой обратной теоремы вытекает из того, что

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = (x - x_1)(x - x_2)\,.$$

П р и м е р 2.6. Для теоремы Пифагора также имеет место обратная теорема: «если в треугольнике ABC: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то угол C – прямой». Это следует из теоремы косинусов: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C$.

Обратное утверждение может быть как верным, так и неверным. Если обратное утверждение неверно, то это указывает либо на достаточно общий характер высказывания B в рассматриваемой теореме, либо на излишне ограничительный, частный характер высказывания A в ней.

П р и м е р 2.7. Для верного утверждения: «Если целое число n кратно 4, то оно оканчивается (в десятичной записи) на четную цифру» – обратное утверждение

«Если последняя цифра десятичной записи числа n четная, то n кратно 4»

неверно (число 14 оканчивается на четную цифру, но оно не делится на 4). В данной ситуации:

а) высказывание «последняя цифра числа n четна» слишком общее для предлагаемого вывода, требуется добавить к нему еще какое-нибудь условие;

б) высказывание «n кратно 4» носит слишком частный характер, так как если последняя цифра числа четная, то оно делится на 2, но необязательно на 4.

Если наряду с теоремой рассматривается ей обратная, то исходную теорему также называют **прямой** теоремой.

2.4. Критерий. Если имеют место прямая и обратная теоремы, то их принято объединять в одно утверждение, которое называют **критерием**. Формулировка критерия имеет вид:
«высказывание A верно **тогда и только тогда, когда** верно высказывание B» или, на языке импликаций (см. п.2.2),

$$A \Longleftrightarrow B.$$

Критерии играют особую роль среди математических утверждений. По сути они указывают на то, что высказывания A и B взаимозаменяемы («синонимы»). Утверждения A и B в критерии $A \Longleftrightarrow B$ называют **равносильными**.

Часто теоремы-критерии называют «критерий чего-либо» – скажем, какой-либо характеристики рассматриваемого объекта или принадлежности этого объекта какому-то классу.

Пример 2.8. Прямая и обратная теоремы Виета (см. примеры 2.4 и 2.5) дают критерий того, что два числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Критерий имеет следующую формулировку: «Вещественные числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$» или, на языке импликаций,

$$x_1, x_2 \text{ – вещественные корни уравнения } x^2+px+q=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=q\,.$$

Пример 2.9. Критерий существования описанной около четырехугольника окружности формулируется следующим образом: «Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Около $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°» или, на языке импликаций,

$$\begin{array}{c}\text{около выпуклого четырехугольника } ABCD\\ \text{можно описать окружность}\end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \angle A+\angle C=180^\circ.$$

2.5. Необходимое и достаточное условие. Для формулировки критерия помимо характерного оборота «тогда и только тогда, когда» используют и другую терминологию.

Если имеет место утверждение

$$A \Longrightarrow B\,,$$

то говорят, что высказывание B – **необходимое условие** для высказывания A, а высказывание A – **достаточное условие** для высказывания B. В этой терминологии критерий

$$A \Longleftrightarrow B$$

может быть сформулирован следующим образом: «высказывание B является **необходимым и достаточным условием** для высказывания A» или «для справедливости высказывания A **необходимо и достаточно, чтобы** было справедливо высказывание B».

Пример 2.10. Признак делимости целого числа на 9 является достаточным условием делимости на 9 (см. пример 2.3). Вместе с тем, этот же признак является и необходимым условием делимости на 9, так как

$$\begin{aligned} A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 = \\ &= a_n \cdot (\underbrace{99\ldots9}_{n} + 1) + a_{n-1} \cdot (\underbrace{99\ldots9}_{n-1} + 1) + \ldots + a_1 \cdot (9+1) + a_0 = \\ &= \Big(a_n \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n} + a_{n-1} \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 9\Big) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Выражение в первой скобке кратно 9. Следовательно, если A кратно 9, то и $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ кратно 9.

Таким образом,

$$\begin{array}{c} A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}, \\ a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \text{ кратно } 9 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ кратно } 9.$$

Кстати, заметим, что любой признак (например, делимости целого числа, равенства и подобия треугольников и др.) можно рассматривать как достаточное условие. Многие из них являются и необходимыми условиями (см. задачи к разделу 2).

В геометрии критерии часто «скрываются» под термином «**геометрическое место точек**».

Пример 2.11. Известное утверждение в планиметрии: «Серединный перпендикуляр к отрезку есть **геометрическое место точек** плоскости, равноудаленных от его концов» – подразумевает следующий критерий: «Точка плоскости лежит на серединном перпендикуляре к данному отрезку **тогда и только тогда, когда** она равноудалена от его концов» или, на языке импликаций,

$$\begin{array}{c} M \in l, \text{ где} \\ l \text{ – серединный перпендикуляр к отрезку } AB \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad MA = MB.$$

Задачи к разделу 2

2.1. Сформулируйте, используя импликации, следующие утверждения:

1) признак делимости на 5;

2) признак делимости на 3;

3) признак делимости на 4;

4) признак делимости на 8;

5) признак делимости на 6;

6) теорема Виета для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$;

7) теорема Безу для многочленов;

8) теорема косинусов;

9) теорема синусов;

10) свойство медиан в треугольнике;

11) свойство биссектрис в треугольнике;

12) свойства равнобедренного треугольника;

13) теорема о вписанном угле;

14) признаки подобия треугольников;

15) признак перпендикулярности прямой и плоскости;

16) теорема о трех перпендикулярах;

17) свойство сечения сферы;

18) «простых чисел бесконечно много»;

19) «квадрат простого числа, большего 3, дает при делении на 3 остаток 1»;

20) «центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения его биссектрис»;

21) «в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон»;

22) «центром окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам»;

23) «среди четырехугольников заданного периметра максимальную площадь имеет квадрат».

2.2. Среди утверждений задачи 2.1 выделите те, которые могут быть критериями. Сформулируйте соответствующие обратные утверждения.

2.3. Критерии, выделенные в задаче 2.2, сформулируйте в терминах

а) «тогда и только тогда, когда»,

б) «необходимо и достаточно, чтобы».

2.4. Сформулируйте, используя импликации, следующие утверждения:

1) теорема о серединном перпендикуляре;

2) теорема о биссектрисе угла;

3) «в равнобедренном треугольнике и только в нем две медианы равны»;

4) «среди параллелограммов в ромб и только в ромб можно вписать окружность»;

5) «число 2 и только оно является четным простым числом»;

6) «в равнобедренном треугольнике и только в нем одна из медиан является одновременно высотой и биссектрисой»;

7) «среди четырехугольников в параллелограмме и только в нем диагонали точкой своего пересечения делятся пополам».

3. Математическое доказательство

Доказательства являются обязательной частью любого математического текста. Если какое-либо утверждение не имеет доказательства и нет аргументов, его опровергающих, данное утверждение может выступать лишь в качестве гипотезы. В учебных курсах могут встречаться утверждения без доказательств, но это не означает их отсутствия в принципе – просто соответствующие доказательства не приводятся (и, тем самым, оставляются для самостоятельного ознакомления).

3.1. Доказательство теоремы простейшей структуры. Схему математического доказательства можно наиболее наглядно разъяснить на примере утверждения, формулировка которого содержит одну импликацию

$$A \Longrightarrow B\,.$$

Умение доказывать такое утверждение состоит в построении и доказательстве истинности промежуточных высказываний $C_1, C_2, \ldots, C_n$, которые прокладывают путь от высказывания A к высказыванию B в виде цепочки импликаций

$$A \Longrightarrow C_1 \Longrightarrow C_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow C_n \Longrightarrow B.$$

Каждое звено (одна импликация) в этой цепочке следует из предыдущего. Начинаясь в A, она приводит к B. Все доказательство, тем самым, состоит из $n+1$ шагов.

Пример 3.1. Проиллюстрируем это на примере доказательства теоремы о биссектрисе треугольника:

$$BK \text{ – биссектриса } \triangle ABC \quad \Longrightarrow \quad AK : KC = AB : BC.$$

1 шаг. Пусть BH – высота $\triangle ABC$. Тогда BH является высотой как в $\triangle ABK$, так и в $\triangle BCK$. Поэтому

$$S_{ABK} : S_{BCK} = \Big(\frac{1}{2} BH \cdot AK\Big) : \Big(\frac{1}{2} BH \cdot KC\Big) = AK : KC.$$

2 шаг. С другой стороны, если $\alpha = \angle ABK = \angle KBC$, то

$$S_{ABK} : S_{BCK} = \Big(\frac{1}{2} AB \cdot BK \cdot \sin\alpha\Big) : \Big(\frac{1}{2} BC \cdot BK \cdot \sin\alpha\Big) = AB : BC.$$

Из цепочки импликаций

$$BK \text{ – биссектриса } \triangle ABC \Longrightarrow AK : KC = S_{ABK} : S_{BCK} \Longrightarrow S_{ABK} : S_{BCK} = AB : BC$$

следует, что

$$AK : KC = AB : BC.$$

Уже на этом простом примере математического доказательства можно увидеть, что вся цепочка импликаций основана на одной ключевой идее – привлечении площадей треугольников, в то время, как остальные этапы либо используют свойства участвующих в доказательстве объектов, либо носят технический характер. Выделение ключевой идеи (или ключевых идей) каждого доказательства помогает запоминанию всей строящейся цепочки импликацией.

П р и м е р 3.2. Разберем доказательство геометрической теоремы: «В треугольнике каждая медиана делится точкой пересечения с другой медианой в отношении $2:1$, считая от вершины» или, на языке импликаций,

$$\begin{matrix} AK, BM \text{ – медианы в } \triangle ABC, \\ O = AK \cap BM \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} AO = 2\cdot OK, \\ BO = 2\cdot OM. \end{cases}$$

1 шаг – дополнительное построение средней линии в треугольнике BMC:

$$\begin{matrix} AK, BM \text{ – медианы в } \triangle ABC, \\ O = AK \cap BM \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} KP, \text{ где } P \text{ - середина } MC: \\ KP \parallel BM,\ KP = BM/2 \text{ (как средняя линия)} \end{matrix}$$

2 шаг. Отсюда получим подобие треугольников с известным коэффициентом подобия (в силу признака подобия треугольников по двум углам):

$$\begin{gathered} \triangle AOM \sim \triangle AKP, \\ k = AM : AP = AM : (AM + \tfrac{1}{2}AM) = \tfrac{2}{3}. \end{gathered}$$

3 шаг. Запишем теперь отношения двух других пар соответствующих сторон в этих подобных треугольниках:

$$\begin{gathered} \tfrac{2}{3} = AO : AK = AO : (AO + OK), \\ \tfrac{2}{3} = OM : KP = OM : (\tfrac{1}{2}(BO + OM)). \end{gathered}$$

4 шаг. Отсюда, проводя преобразования, получим цепочку импликаций, приводящую к нужному ответу:

$$\begin{matrix} AK, BM \text{ – медианы в } \triangle ABC, \\ O = AK \cap BM \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} KP, \text{ где } P \text{ - середина } MC: \\ KP \parallel BM,\ KP = BM/2 \text{ (как средняя линия)} \end{matrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \triangle AOM \sim \triangle AKP, \\ k = AM : AP = AM : (AM + \tfrac{1}{2}AM) = \tfrac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \tfrac{2}{3} = AO : AK = AO : (AO + OK), \\ \tfrac{2}{3} = OM : KP = OM : (\tfrac{1}{2}(BO + OM)) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} AO = 2\cdot OK, \\ BO = 2\cdot OM. \end{cases}$$

Итак, в рассмотренном доказательстве – две ключевые идеи:

– дополнительное построение средней линии KP,
– использование подобия треугольников AOM и AKP.

В многошаговых математических доказательствах бывает так, что одна или несколько импликаций представляют самостоятельный интерес – например, используются в других доказательствах – или обосновываются отдельно для улучшения восприятия логической структуры всего доказательства. В таких случаях эти импликации выносятся в отдельные утверждения и называются **леммами** (вспомогательными теоремами).

П р и м е р 3.3. В доказательстве теоремы «Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке»:

$$\begin{array}{c} AK, BM, CN \text{ –} \\ \text{медианы в } \triangle ABC\text{:} \end{array} \implies \begin{array}{l} 1) \text{ Для } O_1 = AK \cap BM\text{: } AO_1 = 2O_1K \\ 2) \text{ Для } O_2 = AK \cap CN\text{: } AO_2 = 2O_2K \end{array} \implies$$

$$\implies \quad O_1 = O_2 \quad \implies \quad AK \cap BM \cap CN = O$$

предыдущая теорема (см. пример 3.2) является ключевым вспомогательным утверждением, т.е. леммой.

Справедливости ради, впрочем, надо отметить, что разделение утверждений на теоремы и леммы достаточно условно и оно, в большинстве случаев, указывает на то, какую роль отводит автор математического текста данному утверждению.

3.2. Доказательство критерия. Для доказательства критерия

$$A \Longleftrightarrow B$$

нужно обосновать, что одновременно имеют место два утверждения: $A \Longrightarrow B$ и $B \Longrightarrow A$, т.е.

$$\begin{cases} A \Longrightarrow B, \\ B \Longrightarrow A. \end{cases}$$

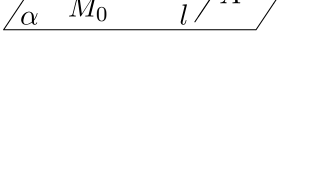
В различных терминологиях (см. п.2.4) это означает, что

– утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда выполнено условие B;

– условие B необходимо и достаточно для справедливости утверждения A;

– для утверждения $A \Longrightarrow B$ имеет место обратное утверждение.

П р и м е р 3.4. Докажем теорему о трех перпендикулярах. Ее формулировка: «Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна к ее проекции тогда и только тогда, когда она перпендикулярна и к самой наклонной».



Для описания доказательства введем обозначения: точка A – основание наклонной AM к плоскости α, MM_0 – перпендикуляр к этой плоскости, прямая l лежит в плоскости α и проходит через точку A.

Заметим, что $MM_0 \perp l$ (как и всякой другой прямой в плоскости α). Надо доказать, что

$$l \perp AM_0 \iff l \perp AM.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Сначала докажем, что

$$l \perp AM_0 \implies l \perp AM.$$

Имеем

$$l \perp AM_0 \implies \begin{cases} l \perp AM_0, \\ l \perp MM_0 \end{cases} \implies l \perp (AMM_0) \implies l \perp AM,$$

т.е. условие $l \perp AM$ – необходимое условие для $l \perp AM_0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Теперь докажем, что

$$l \perp AM \implies l \perp AM_0.$$

Имеем

$$l \perp AM \implies \begin{cases} l \perp AM, \\ l \perp MM_0 \end{cases} \implies l \perp (AMM_0) \implies l \perp AM_0,$$

т.е. условие $l \perp AM$ – достаточное условие для $l \perp AM_0$.

Таким образом, условие $l \perp AM$ – необходимое и достаточное для того, чтобы $l \perp AM_0$.

Пример 3.5. Пусть $x_{\max}$ – максимальный элемент числового множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Докажем, что

$$x_{\max} \le M \iff \begin{cases} x_1 \le M, \\ x_2 \le M, \\ \quad \ldots \\ x_n \le M. \end{cases}$$

Необходимость условия $x_k \le M$, $k = 1, \ldots, n$, очевидна, так как $x_k \le x_{\max} \le M$, $k = 1, \ldots, n$.

Достаточность этого условия еще более очевидна, так как если $x_k \le M$ для всех $x_k \in X$, то это же верно и для $x_{\max}$.

Иногда при доказательстве критерия удается в цепочке утверждений выполнять равносильные переходы (см. п.2.4). В этих случаях можно не разбивать доказательство на две части, указывающие отдельно на необходимость и достаточность.

Пример 3.6. Докажем, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \ne 0)$ с дискриминантом D имеет вещественное решение тогда и только тогда, когда $D \ge 0$.

Имеем

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \ne 0) \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Последнее уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда $D \geq 0$.

П р и м е р 3.7. Докажем, что известный признак делимости целого числа на 4 дает не только достаточное, но и необходимое условие делимости на 4.

Пусть $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ (в десятичной записи). Очевидно, что

$$A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} \cdot 100 + \overline{a_1 a_0} = 4\big(25 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2}\big) + \overline{a_1 a_0}.$$

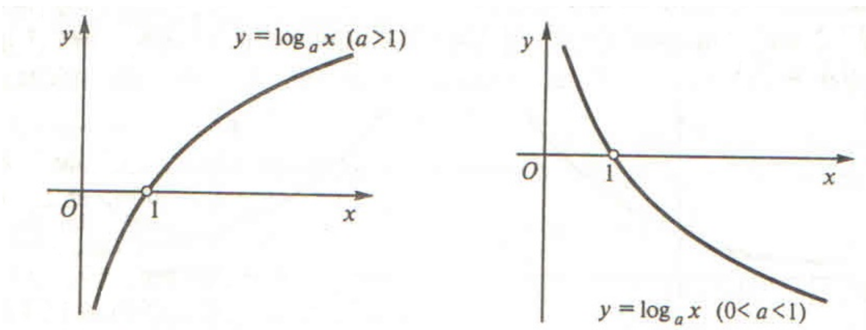
Отсюда следует, что

$$A \text{ кратно } 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{a_1 a_0} \text{ кратно } 4.$$

П р и м е р 3.8. Докажем, что если $a > 0, a \neq 1, b > 0$, то

$$\log_a b > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-1)(b-1) > 0.$$

Рассмотрим графики монотонной функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ и при $0 < a < 1$:



Из графиков следует, что $\log_a x > 0$, если при $a > 1$: $x > 1$, а при $0 < a < 1$: $x < 1$, т.е. если a и x либо оба больше 1, либо оба меньше 1, иными словами, если a и x находятся по одну сторону от 1. Аналогично, $\log_a x < 0$, если a и x находятся по разные стороны от 1.

Это означает, что

$$\log_a b > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \text{ и } b \text{ находятся по одну сторону от } 1 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad a-1 \text{ и } b-1 \text{ имеют одинаковый знак} \quad \Longleftrightarrow \quad (a-1)(b-1) > 0.$$

Понимание понятия необходимого и достаточного условия часто используется при решении серьезных задач. Например, в тех задачах, где из большого числа значений некоторой переменной надо исключить все «бесполезные» (для данной задачи) значения и рассматривать только те, которые соответствуют условию задачи.

П р и м е р 3.9. Требуется найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

имеет единственное решение.

Заметим, что неизвестная x входит в систему четным образом, поэтому если (x, y) – решение (1), то и $(-x, y)$ – тоже решение.

Найдем сначала необходимое условие единственности решения системы. Пусть система (1) имеет единственное решение (x, y). В этом решении $x = 0$, так как иначе пара $(-x, y)$ даст другое решение. Следовательно, только пара $(0, y)$ может быть единственным решением системы. Подставив его в систему, получим

$$\begin{cases} a - 1 = y, \\ y^2 = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Из второго уравнения следует, что $y = \pm 1$, откуда в силу первого уравнения: $a = 2$ и $a = 0$.

Итак, только при $a = 2$ и $a = 0$ система (1) *может иметь* единственное решение. Мы нашли необходимое условие единственности решения. Это означает, что другие значения a можно не рассматривать, так как для них система либо не имеет решений, либо имеет более одного решения.

Проверим достаточность найденных условий.

При $a = 2$ система (1) имеет вид

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2x^2 + |\sin x| + 1 \geq 1, \\ |y| = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x} \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Это единственное решение. Таким образом, при $a = 2$ система имеет единственное решение.

При $a = 0$ система (1) имеет вид

$$\begin{cases} y = |\sin x| - 1, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

Эта система имеет по крайней мере два решения: $(0, -1)$, $(\pi, -1)$.

Итак, только при $a = 2$ система (1) имеет единственное решение.

3.3. Доказательство эквивалентности определений. Как указывалось в п.1.3, эквивалентность двух определений (Опр.1 и Опр.2) означает, что эти определения относятся к одному и тому же объекту. Т.е. что если объект определен по Опр.1 (т.е. удовлетворяет описанному в нем свойству), то он соответствует и свойству, описанному в Опр.2; аналогично наоборот.

Таким образом, доказательство эквивалентности Опр.1 и Опр.2 сводится к доказательству критерия: «Объект определен Опр.1 тогда и только тогда, когда он соответствует Опр.2» или, в компактной записи,

$$\text{Опр.1} \iff \text{Опр.2}.$$

П р и м е р 3.10. Докажем эквивалентность двух определений параллелограмма из примера 1.6.

Пусть четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом по Опр.1, т.е. $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$. Тогда $\angle DBC = \angle ADB$, $\angle BDC = \angle ABD$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Отсюда следует, что $\triangle BCD = \triangle ABD$ (по двум углам и общей стороне). Следовательно, $BC = AD$ и четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом по Опр.2.

И наоборот, если четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм по Опр.2, то

$$\begin{cases} BC = AD, \\ BC \parallel AD \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \angle DBC = \angle ADB \text{ (как накрест лежащие)}, \\ BC = AD \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \triangle BCD = \triangle ABD \text{ (по двум сторонам и углу между ними)} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \angle BDC = \angle ABD \quad \Longrightarrow \quad AB \parallel CD \text{ (так как накрест лежащие углы равны)}.$$

Следовательно, $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$ и четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом по Опр.1.

П р и м е р 3.11. Докажем эквивалентность трех определений абсолютной величины числа из примера 1.7.

Согласно всем трем определениям, $|x|$ – это одно из двух чисел x и $-x$.

Если $x \geq 0$, то $-x \leq 0$, $-x \leq x$ и

- $|x| = x$ (по Опр.1),
- $|x|$ – наибольшее из двух чисел x и $-x$, что соответствует Опр.2,
- $|x|$ – неотрицательное из двух чисел x и $-x$, что соответствует Опр.3.

Если же $x \leq 0$, то $-x \geq 0$, $-x \geq x$ и

- $|x| = -x$ (по Опр.1),
- $|x|$ – наибольшее из двух чисел x и $-x$, что соответствует Опр.2,
- $|x|$ – неотрицательное из двух чисел x и $-x$, что соответствует Опр.3.

3.4. Язык кванторов. В математическом тексте часто встречаются обороты, логические связки, которые соответствуют так называемым кванторам – символам $\exists$ и $\forall$. Символ $\exists$ заменяет слова «**существует**», «**найдется**» и называется квантором существования; символ $\forall$ заменяет слова «**любой**», «**каждый**», «**всякий**» или «**для любого**», «**для каждого**» и называется квантором всеобщности.

П р и м е р 3.12. Запишем на языке кванторов определение наименьшего значения функции (см. пример 1.3).

«Пусть отрезок $[a, b]$ входит в область определения функции $y = f(x)$. Наименьшим значением этой функции на отрезке $[a, b]$ называется число m такое, что

а) $f(x) \geq m \ \ \forall x \in [a, b]$, б) $\exists x_0 \in [a,b]$ такое, что $f(x_0) = m$».

Обратим внимание, что кванторы всегда используются перед переменными величинами в высказывании (см. в примере 3.12: «$\forall x \in [a,b]$» и «$\exists x_0 \in [a,b]$»).

Игнорирование или подмена кванторов в утверждении может привести к искажению его смысла.

Пример 3.13. В определении: «Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на $[a,b]$, если для $x_1, x_2 \in [a,b]$: $x_1 < x_2$ выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$» – пропущен квантор всеобщности перед $x_1, x_2 \in [a,b]$. Если вместо оборота «$\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]$» подразумевать «$\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$», определение становится неверным – функция $y = x^2$ получается возрастающей на $[-3,3]$, так как при $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ имеет место верное неравенство $f(1) < f(2)$.

В определении: «Функция $y = f(x)$ называется ограниченной, если для $M \geq 0$ неравенство $|f(x)| \leq M$ выполнено при всех x из области определения $D(f)$» – пропущен квантор существования перед оборотом «$M \geq 0$», Если вместо «$\exists\, M \geq 0$» подразумевать «$\forall\, M \geq 0$», получится, что ограниченной является только функция, тождественно равная нулю на своей области определения.

Язык кванторов позволяет компактно записать математический текст. Но и не только. Как будет видно в п.3.5 и п.3.6, кванторы позволяют формализовать некоторые преобразования (а также анализ) математических утверждений.

3.5. Отрицание утверждения. Любое математическое утверждение после своего появления проходит этап неопределенности, когда оно является всего лишь гипотезой, искусной догадкой автора. На этом этапе оно либо обретает корректное доказательство, либо опровергается и тогда отвергается как ошибочный факт.

В истории математики одной из самых известных гипотез, обретших свое доказательство, является Великая или Последняя теорема Ферма: «Уравнение $x^n + y^n = z^n$ при любом натуральном $n \geq 3$ не имеет решений (x,y,z), в которых x, y, z – натуральные числа». Записанная на полях книги древнегреческого математика Диофанта французским математиком Пьером Ферма, она была доказана лишь в 1994 году Эндрю Уайлсом, т.е. 357 лет спустя. На протяжении всего этого времени она оставалась гипотезой, подтвержденной (доказанной) только для некоторых значений показателя степени n.

Это пример верной гипотезы. А вот пример гипотезы, оказавшейся неверной. Тот же Пьер Ферма предположил: «Все числа вида $2^{2^n} + 1$ простые для $\forall\, n \in \mathbb{N}$». Гипотеза была опровергнута Леонардом Эйлером, когда им был построен контрпример и было показано, что число $2^{32} + 1$ является составным.

Разберем, как правильно строить отрицания математических утверждений простейшего типа:

$$A \Longrightarrow B\,. \tag{3}$$

Отрицание или опровержение утверждения (3) означает, что оно неверно, т.е. при выполнении условия A высказывание B окажется ложным.

Иногда удается построить пример, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно. Такой пример называется контрпримером к утверждению (3). Наличие уже одного контрпримера означает, что утверждение (3) неверно.

Пример 3.14. Утверждение «Если число делится на 11, то его первая и последняя цифры совпадают» неверно. Для его опровержения достаточно найти число, которое делится на 11, но его первая и последняя цифры различны. Это число $1089 = 99 \cdot 11$.

Пример 3.15. Для опровержения утверждения «Любая функция, определенная на всей вещественной прямой, является либо четной, либо нечетной» приведем пример функции, не являющейся четной **и** не являющейся нечетной – это линейная функция $y = x + 2$.

В ряде случаев утверждение опровергается по-другому:

1) сначала строится отрицание высказывания B;

2) затем доказывается, что при выполнении условия A справедливо отрицание высказывания B.

Опишем один из подходов, дающий формальный алгоритм построения отрицания высказывания. Он используется в тех случаях, когда в этом высказывании участвуют

а) логические связки «**и**», «**или**»;

б) кванторы «**существует**» $\exists$, «**любой**» $\forall$.

Если в основном высказывании говорится о некотором свойстве, которое **должно выполняться** одновременно для двух объектов a **и** b, то высказывание будет ложным, если хотя бы для одного из объектов a **или** b это свойство **не выполняется**.

Таким образом, в отрицании высказывания связка «**и**» заменяется на «**или**», а основное утверждение («должно выполняться») заменяется на противоположное.

Аналогично,

– если в высказывании говорится о свойстве, которое **должно выполняться** хотя бы для одного объекта a **или** b, то высказывание не будет верным, если для обоих объектов a **и** b это свойство **не выполняется**;

– если в высказывании говорится о свойстве, которое **должно выполняться** для **любого** ($\forall$) объекта, то высказывание не будет верным, если **существует** ($\exists$) хотя бы один объект, для которого это свойство **не выполняется**;

– если в высказывании говорится о том, что **существует** ($\exists$) объект, для которого **должно выполняться** некоторое свойство, то высказывание не будет верным, если для **любого** ($\forall$) объекта это свойство **не выполняется**.

Таким образом, во всех четырех случаях формальный алгоритм построения отрицания высказывания состоит в следующем:

1) все логические связки «**и**», «**или**» заменяются соответственно на «**или**», «**и**»;

2) квантор **существования** $\exists$ заменяется на квантор **всеобщности** $\forall$, а квантор **всеобщности** $\forall$ – на квантор **существования** $\exists$;

3) итоговые высказывания (равенства, неравенства, отношения) заменяются на противоположные.

Пример 3.16. Построим отрицание высказывания «Прямая l перпендикулярна плоскости α». Это высказывание означает, что прямая l перпендикулярна любой ($\forall$) прямой, лежащей в плоскости α. После замены квантора $\forall$ на квантор $\exists$, а отношения «перпендикулярна» на «не перпендикулярна» получим отрицание: «Прямая l не перпендикулярна плоскости α, т.е. существует ($\exists$) хотя бы одна прямая в этой плоскости, которой она не перпендикулярна».

Пример 3.17. Построим отрицание высказывания «Функция $y = f(x)$, определенная на $[a, b]$, является строго монотонной на этом отрезке». Это высказывание означает, что она либо возрастает на $[a, b]$, либо убывает на $[a, b]$, т.е.

либо $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) < f(x_2)$,

либо $\forall x_3, x_4 \in [a, b] : x_3 < x_4$ выполнено $f(x_3) > f(x_4)$».

Производя замены, получим следующее: «Функций $y = f(x)$ не является строго монотонной на $[a, b]$, если

$\exists x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) \geq f(x_2)$ **и**

$\exists x_3, x_4 \in [a, b] : x_3 < x_4$ выполнено $f(x_3) \leq f(x_4)$».

3.6. Доказательство от противного. Одним из часто используемых приемов доказательства теорем простейшей структуры является метод доказательства от противного.

Он состоит в следующем. Если утверждение описывается схемой

$$A \Longrightarrow B, \tag{4}$$

то

1) строится отрицание этого утверждения, т.е. предполагается, что высказывание B ложно,

2) затем с помощью логических переходов (цепочки импликаций) приходят к высказыванию, которое противоречит высказыванию A.

После этого утверждение (4) будет доказано.

П р и м е р 3.18. Докажем методом от противного теорему: «Простых чисел бесконечно много» или, на языке импликаций,

p – простое число $\Longrightarrow$ каким бы ни было $(\forall)\, p$ найдется $(\exists)$ простое число $p' : p' > p$.

Предположим противное:

существует $(\exists)$ простое p: все $(\forall) A > p$ – составные $\Longrightarrow$ Занумеруем все простые числа до p включительно: $p_1, p_2, \ldots, p_N = p$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $A = p_1 p_2 \ldots p_N + 1$ составное, так как оно больше, чем p $\Longrightarrow$ Число A должно делиться без остатка хотя бы на одно из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_N$

Теперь зафиксируем получающееся противоречие:

– с одной стороны, A делится на некоторое p_k,

– с другой стороны, A при делении на p_k дает остаток 1.

Метод доказательства от противного является стандартным способом обоснования утверждений о единственности.

П р и м е р 3.19. Докажем, что уравнение $2^x = 6 - x$ имеет единственное решение $x = 2$.

То, что $x = 2$ удовлетворяет уравнению, проверяется непосредственно. Теперь предположим, что уравнение имеет по крайней мере два различных решения x_1 и x_2 (через x_1 обозначим большее из них):

$$\exists \text{ решения } x_1 > x_2 \Longrightarrow \underset{\text{(в силу монотонности)}}{\begin{cases} 2^{x_1} > 2^{x_2}, \\ 6 - x_1 < 6 - x_2 \end{cases}}$$

Но последнее противоречит тому, что одновременно $2^{x_1} = 6 - x_1$ и $2^{x_2} = 6 - x_2$.

Задачи к разделу 3

3.1. Докажите следующие утверждения:

1) теорема косинусов;

3) теорема синусов;

4) «если в треугольнике две медианы равны, то треугольник равнобедренный»;

5) «если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный»;

6) «если в треугольнике две высоты равны, то треугольник равнобедренный»;

7) теорема о величине вписанного угла;

8) «если натуральные числа x и y взаимно просты и целое число p делится на xy, то p делится и на x, и на y»;

9) «если произведение целых чисел x и y делится на простое число p, то либо x делится на p, либо y делится на p»;

10) «для любых натуральных чисел m, n, где $m > n$, их наибольший общий делитель равен наибольшему общему делителю чисел $m - n, n$»;

11) «сумма двух возрастающих на $[a, b]$ функций есть функция, возрастающая на $[a, b]$»;

12) «произведение двух неотрицательных убывающих на $[a, b]$ функций есть функция, убывающая на $[a, b]$»;

13) «высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, есть среднее геометрическое проекций катетов этого треугольника на гипотенузу».

3.2. Сформулируйте обратные теоремы к следующим утверждениям:

1) «диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам»;

2) «если в $\triangle ABC$: $AB^2 > AC^2 + BC^2$, то $\triangle ABC$ – тупоугольный»;

3) «если длина отрезка MN, соединяющего две внутренние точки на сторонах AB и AC треугольника ABC, равна половине стороны BC, то MN – средняя линия этого треугольника»;

4) «если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны между собой, то в этот четырехугольник можно вписать окружность»;

5) «если около выпуклого четырехугольника можно описать окружность, то суммы его противоположных углов равны».

3.3. Для каждого из утверждений задачи 3.2:

– докажите само утверждение,

– докажите обратное утверждение к нему,

– сформулируйте оба утверждения вместе в терминах: а) «необходимо и достаточно», б) «тогда и только тогда».

3.4. Для каждого из следующих утверждений укажите, будет ли условие утверждения

– достаточным, но не необходимым,

– необходимым, но не достаточным,

– необходимым и достаточным:

1) «если последняя десятичная цифра целого числа A есть 0, то A четно»;

2) «если целое число A кратно 10, то A кратно 5»;

3) «если целое число A кратно 3, то A кратно 6»;

4) «если целое число A кратно 12, то A кратно 4»;

5) «если $\triangle ABC$ – прямоугольный, то медиана, проведенная к его гипотенузе, равна ее половине».

3.5. Пусть A – целое число.

1. Сформулируйте признаки делимости числа A на числа $2, 3, 4, 5, 9, 11$.

2. Докажите эти признаки.

3. Докажите, что каждый из этих признаков является необходимым и достаточным условием делимости числа A на числа $2, 3, 4, 5, 9, 11$ соответственно.

3.6. Докажите, что каждый из признаков равенства и подобия треугольников является необходимым и достаточным условием равенства и соответственно подобия треугольников.

3.7. Сформулируйте отрицание для каждого из следующих утверждений:

1) «все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различны»;

2) «треугольник ABC – равносторонний»;

3) «треугольник ABC – равнобедренный»;

4) «функция $y = f(x)$, определенная на всей числовой прямой, является четной»;

5) «функция $y = f(x)$, определенная на всей числовой прямой, является нечетной»;

6) «функция $y = f(x)$, определенная на всей числовой прямой, является периодической»;

7) «функция $y = f(x)$, определенная на всей числовой прямой, является возрастаюшей»;

8) «треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны»;

9) «треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны»;

10) «окружность вписана в $\triangle ABC$»;

11) «окружность описана около $\triangle ABC$»;

12) «множество A входит в область определения функции $y = f(x)$»;

13) «множество A входит в область значений функции $y = f(x)$»;

14) «число m является наименьшим значением функции $y = f(x)$»;

15) «прямая l параллельна плоскости α»;

16) «прямые l_1 и l_2 в пространстве параллельны»;

17) «плоскости α_1 и α_2 параллельны».

3.8. Докажите или опровергните следующие утверждения:

1) «функция $y = \arcsin x$ является нечетной»;

2) «функция $y = \arccos x$ является четной»;

3) «если сторона и два угла одного треугольника равны соответствующим стороне и двум углам другого треугольника, то эти треугольники равны»;

6) «сумма двух периодических функций, определенных на всей действительной прямой, является периодической функцией»;

7) «функция $y = \sin(x^2)$ – периодическая».

3.9. Докажите следующие утверждения методом от противного:

1) «уравнение $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, где $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – целые числа, не может иметь нецелых рациональных корней»;

2) «если центр описанной около треугольника окружности лежит на его стороне, то треугольник прямоугольный».

3.10. Докажите или опровергните следующие критерии:

1) «последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов»;

2) «последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов»;

3) «среднее арифметическое двух неотрицательных чисел равно их среднему геометрическому тогда и только тогда, когда эти числа равны»;

4) «уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ имеет решения тогда и только тогда, когда $|c| \leq \sqrt{a^2+b^2}$»;

5) «в треугольнике ABC отрезок AM, соединяющий вершину A с точкой M на противоположной стороне, является медианой тогда и только тогда, когда площади треугольников ABM и ACM равны»;

6) «сумма квадратов диагоналей выпуклого четырехугольника равна сумме квадратов всех его сторон тогда и только тогда, когда этот четырехугольник – параллелограмм»;

7) «четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180°».