Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Математический анализ III**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические и компьютерные методы решения задач естествознания**

**Математические методы обработки информации и принятия решений**

**Системное программирование и компьютерные науки**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре в объеме, соответствующем программе первого года обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
* **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решении задач в области профессиональной деятельности
* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. основы теории числовых рядов;
2. основы теории функциональных последовательностей и рядов;
3. основы теории степенных рядов;
4. основы теории двойных и n-кратных интегралов и, в частности, несобственных интегралов;
5. основы теории криволинейных и поверхностных интегралов;
6. основы теории поля и интегральные формулы анализа.

**Уметь:**

1. применять на практике теоретические факты о числовых рядах, и, в частности, исследовать их на сходимость;
2. использовать подходы к исследованию функциональных последовательностей и рядов, также строить и исследовать степенные ряды;
3. применять теоретические подходы к анализу и вычислению кратных интегралов, и, в частности, анализировать несобственные кратные интегралы;
4. вычислять криволинейные и поверхностные интегралы, в том числе с использованием интегральных формул.

**Владеть:**

1. методами качественного анализа сходимости числовых рядов, а также методами суммирования расходящихся рядов;
2. навыками использования свойства равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов;
3. навыками замены переменных в кратных интегралах, а также параметризации при вычислении криволинейных и поверхностных интегралов.

**4.** Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 7 з.е., в том числе 144 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 108 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | |
| **Контактная работа  (работа во взаимодействии с преподавателем)**  **Виды контактной работы, часы** | | | **Самостоятельная работа обучающегося,**  **часы** |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |  |
| 1. Числовые ряды | **45** | 16 | 14 | **30** | **15** |
| 1. Функциональные последовательности и ряды | **39** | 14 | 12 | **26** | **13** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 1 | **2** | 0 | 2 | **2** | **0** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: коллоквиум | **6** | 0 | 2 | **2** | **4** |
| 1. Интегрирование функций нескольких переменных | **36** | 12 | 12 | **24** | **12** |
| 1. Кратные несобственные интегралы. Криволинейные интегралы | **24** | 10 | 8 | **18** | **8** |
| 1. Поверхностные интегралы | **26** | 8 | 10 | **18** | **8** |
| 1. Основные операции теории поля. Интегральные формулы анализа | **32** | 12 | 10 | **22** | **10** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 2 | **2** | 0 | 2 | **2** | **0** |
| Промежуточная аттестация: зачет | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| Промежуточная аттестация: устный экзамен | **36** | 0 | 0 | **0** | **36** |
| **Итого** | **252** | **72** | **72** | **144** | **108** |

**7.** Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**7.1.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

|  |
| --- |
| **Контрольная работа № 1** |
| **Вариант 1**  1. Исследовать на сходимость ряд .  2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд .  3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение .  4. Исследовать ряд на равномерную сходимость: .  5. Определить область  существования функции  и исследовать ее на дифференцируемость во внутренних точках .  6. Найти множество сходимости степенного ряда .  **Вариант 2**  1. Исследовать ряд на сходимость: .  2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: .  3. Найти область сходимости функционального ряда .  4. Исследовать на равномерную сходимость на области сходимости  а) ряд , б) последовательность .  5. Исследовать на непрерывность на области существования сумму ряда .  6. Определить радиус сходимости ряда .  7. Разложить в ряд Тейлора по степеням  функцию , указать область сходимости ряда. |
| **Контрольная работа № 2** |
| **Вариант 1**  1. Найти .  2. Найти , где  ограничено плоскостями .  3. Найти , где  – часть сферы .  4. Найти поток поля  через полную внешнюю поверхность  тела .  5. Найти циркуляцию поля  вдоль контура .  **Вариант 2**  1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:  .  2. Найти объем тела , ограниченного поверхностями:   точка .  3. Найти площадь части поверхности , заключенной внутри  цилиндра .  4. Вычислить криволинейный интеграл пересечение плоскости  и поверхности . Направление обхода – против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси .  5. Вычислить поверхностный интеграл   – направляющие косинусы внешней нормали.  6. Найти поток вектора  через поверхность . |

**Вопросы к коллоквиуму**

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. В каждый билет входит один теоретический вопрос из списка, а также предлагается дополнительная задача. Темы коллоквиума:

1. Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами.
2. Признаки сравнения.
3. Признаки Даламбера и Коши, их сравнение.
4. Признак Коши-Маклорена.
5. Теорема Римана о перестановке членов в числовых рядах.
6. Теорема Коши о перестановке членов в числовых рядах.
7. Последовательности с ограниченным изменением и их свойства.
8. Признаки сходимости произвольных числовых рядов (Абеля, Дирихле-Абеля, Лейбница).
9. Теорема Мертенса.
10. Взаимосвязь между сходимостью четырех рядов: повторных, двойного и "одинарного".
11. Метод Чезаро суммирования расходящихся рядов.
12. Метод Пуассона-Абеля суммирования расходящихся рядов.
13. Бесконечные произведения и их свойства.
14. Последовательности с равномерно ограниченным изменением и их свойства.
15. Признаки Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
16. Признак Дини равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.
17. Непрерывность суммы функционального ряда.
18. Почленное интегрирование функциональных рядов.
19. Почленное дифференцирование функциональных последовательностей.
20. Сходимость в среднем, связь с равномерной сходимостью, теорема о почленном интегрировании.
21. Теорема Арцела.
22. Теорема Коши-Адамара.

**Задачи для коллоквиума**

1. Пусть  и ряд  сходится. Доказать, что ряд  расходится.

2. Привести пример сходящегося ряда , для которого .

3. Привести пример расходящегося ряда , для которого .

4. Пусть  и  сходится абсолютно. Доказать, что сходимость ряда  эквивалентна сходимости интеграла .

5. Пусть последовательность  монотонна, но не является бесконечно малой. Доказать, что ряды , расходятся при всех  .

6. Пусть последовательность  монотонна и является бесконечно малой, причем ряд  расходится. Доказать, что ряды  и  сходятся условно при всех  .

7. Пусть ряды ,  сходятся условно, а их произведение по Коши  сходится. Доказать, что .

8. Доказать, что любую последовательность с ограниченным изменением можно представить в виде разности двух монотонных ограниченных последовательностей.

9. Для любого множества , обозначим   , . Проверить, что для двойных сумм имеет место *преобразование Харди*: , где . В качестве применения исследовать на сходимость двойной ряд  .

10. Пусть  – произвольное множество и последовательность  непрерывных на  функций сходится равномерно на . Доказать, что она сходится равномерно на .

11. Может ли последовательность разрывных на  функций равномерно сходиться на  к непрерывной функции?

12. Может ли последовательность непрерывных на  функций равномерно сходиться на  к разрывной функции?

13. Привести пример двух последовательностей , равномерно сходящихся на  таких, что последовательность  сходится на  неравномерно.

14. Показать, что последовательность гладких функций   равномерно сходится на , а последовательность расходится в каждой точке .

15. Исследовать последовательность  на равностепенную непрерывность на множестве , где: а) ; б) .

16. Найти сумму функционального ряда .

17. Просуммировать ряд  методом Пуассона-Абеля.

18. Пусть ряд  суммируем методом Чезаро и  при . Доказать, что ряд  сходится.

19. Доказать, что если ряд  суммируем методом Пуассона-Абеля, то для любого  имеем  при .

**7.2.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

|  |
| --- |
| **Работа для проведения зачетной комиссии** |
| 1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость относительно параметра :  .  2. Разложить в степенной ряд по степеням , определить область сходимости:  .  3. Исследовать функцию на непрерывность: .  4. Найти объём тела: .  5. Найти:  где .  6. Найти поток  через часть  поверхности , вырезаемую плоскостью :    (нормаль – внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями,  – *незамкнутая* поверхность). |

**Вопросы к экзамену**

Экзамен сдается в устной форме. В экзаменационном билете – один вопрос из приведенного ниже списка.

1. Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами.
2. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки сравнения, Даламбера, Коши, Коши-Маклорена).
3. Теоремы Коши и Римана о перестановке членов в числовых рядах.
4. Признаки сходимости произвольных числовых рядов (два признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Лейбница).
5. Арифметические операции над сходящимися числовыми рядами. Теорема Мертенса.
6. Бесконечные произведения, критерии их сходимости.
7. Необходимое условие сходимости двойного ряда. Связь между сходимостью двойного ряда и повторного ряда. Критерий сходимости двойного ряда с неотрицательными членами.
8. Абсолютная сходимость двойного ряда. Взаимосвязь между сходимостью четырех рядов: повторных, двойного и "одинарного".
9. Обобщенные методы суммирования расходящихся рядов (методы Чезаро и Пуассона-Абеля).
10. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши.
11. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов (два признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Вейерштрасса).
12. Признак Дини равномерной сходимости функциональных рядов и последовательностей. Почленный переход к пределу, непрерывность предельной функции функциональных последовательностей и рядов.
13. Почленное дифференцирование, существование первообразных функций для функциональных последовательностей и рядов.
14. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов (две теоремы). Сходимость в среднем, связь с равномерной сходимостью.
15. Теорема Арцела. Признак равностепенной непрерывности функциональной последовательности.
16. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды.
17. Определение и доказательство существования двойного интеграла при помощи прямоугольных разбиений области. Классы интегрируемых функций. Основные свойства двойного интеграла.
18. Определение двойного интеграла при помощи произвольных разбиений области. Эквивалентность двух определений.
19. Сведение двойного интеграла к повторному однократному.
20. Кратные несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сходимости.
21. Кратные несобственные интегралы от знакопеременных функций. Эквивалентность понятий сходимости и абсолютной сходимости.
22. Криволинейные интегралы первого и второго рода.
23. Понятие поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности. Лемма о проекции окрестности точки на касательную плоскость.
24. Площадь поверхности. Квадрируемость поверхности.
25. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
26. Преобразование базисов. Инварианты линейного оператора.
27. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля. Повторные операции теории поля.
28. Формула Грина. Формула Остроградского-Гаусса.
29. Формула Стокса.
30. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода на плоскости от пути интегрирования.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
| Оценка  РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания**  *Коллоквиум,*  *Экзамен* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения**  *Контрольная работа, зачет* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки (владения, опыт деятельности)**  *Экзамен* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

|  |  |
| --- | --- |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** | |
| Результаты обучения | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**   1. основы теории числовых рядов; 2. основы теории функциональных последовательностей и рядов; 3. основы теории степенных рядов; 4. основы теории двойных и n-кратных интегралов и, в частности, несобственных интегралов; 5. основы теории криволинейных и поверхностных интегралов; 6. основы теории поля и интегральные формулы анализа.   **Уметь:**   1. применять на практике теоретические факты о числовых рядах, и, в частности, исследовать их на сходимость; 2. применять теоретические подходы к анализу и вычислению кратных интегралов, и, в частности, анализировать несобственные кратные интегралы. | ОПК-1.Б |
| **Уметь:**   1. использовать подходы к исследованию функциональных последовательностей и рядов, также строить и исследовать степенные ряды; 2. вычислять криволинейные и поверхностные интегралы, в том числе с использованием интегральных формул.   **Владеть:**   1. навыками замены переменных в кратных интегралах, а также параметризации при вычислении криволинейных и поверхностных интегралов. | ОПК-2.Б |
| **Владеть:**   1. методами качественного анализа сходимости числовых рядов, а также методами суммирования расходящихся рядов; 2. навыками использования свойства равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. | ПК-2.Б |

**8.** Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Часть 2. М.: «Проспект», изд-во МГУ. 2004.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 2. М.: Физматлит, 2014.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука. 1990; М.: АСТ, Астрель. 2004.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1,2. М.: Физматлит. 2001.
5. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.. Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 2. М.: изд-во МГУ. 2017.

Дополнительная литература:

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 2. М.: Высшая школа. 1988, М.: Дрофа. 2003.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа, т. 2. М.: Наука. 1991.
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды). М.: Факториал, 1996.
4. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу, т. 2. М.: Наука. 1986. Т. 3. М.: Физматлит. 1995.
5. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967, М.: URSS. 2007.

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

**9.** Язык преподавания - русский.

**10.** Преподаватели:

профессора факультета ВМК МГУ И.С.Ломов, С.Д.Икрамов, Н.Ю.Капустин, В.Н.Денисов, Н.В.Соснин,

доценты факультета ВМК МГУ Т.А.Леонтьева, А.В.Домрина, Л.В.Крицков, Д.Ю.Сычугов, С.А.Волошин, Е.А.Григорьев, М.В.Абакумов, Э.А.Шагиров, Е.Ю.Ечкина, Е.Н. Хайлов,

ассистенты факультета ВМК МГУ А.И.Аристов, А.Ю.Мокин.

**11.** Авторы программы:

профессор факультета ВМК МГУ И.С.Ломов, доценты факультета ВМК МГУ Т.А.Леонтьева, А.В.Домрина.