Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Дополнительные главы математической статистики**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические методы обработки информации и принятия решений**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к вариативной части ОПОП ВО.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу и теории вероятностей в объеме, соответствующем программе первых двух лет обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие вероятностно статистические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
* **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решении задач в области профессиональной деятельности
* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. основные системные задачи и проблемы, решаемые в рамках аналитики процессов, протекающих в условиях неопределенности;
2. основные понятия и наиболее важные задачи, решаемые в рамках прикладных исследований, связанных со статистическим анализом данных;
3. основные методы анализа случайных данных, описывающих реальные процессы и явления.

**Уметь:**

1. строить вероятностно-статистические модели типовых задач анализа и обработки данных, проводить спецификацию задачи, и разрабатывать практические алгоритмы для решения этих задач;
2. применять на практике методы статистического анализа к задачам физики, социологии, финансовой математики и других разделов науки и техники;
3. решать базовые задачи анализа и проверки гипотез и разрабатывать процедуры принятия решений на основе этих методов.

**Владеть:**

1. навыками оптимального выбора методов и параметров при решении задач анализа и обработки данных;
2. ключевыми методами решения задач статистического анализа данных;
3. навыками оптимального выбора методов и параметров при решении задач анализа случайных процессов, описывающих реальные процессы и явления.

**4.** Формат обучения: лекции проводятся с использованием меловой доски.

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 6 з.е., в том числе 108 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 108 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Наименование раздела | Аудиторные часы (6 семестр) | | | Самостоятельная работа |
| № | Лекции | Семинары | Всего |
| 1. | Условные вероятности и условные математические ожидания. | 4 | 4 | 8 | 4 |
| 2. | Статистические структуры. Основные предельные теоремы теории вероятностей. | 6 | 6 | 12 | 6 |
| 3. | Понятие достаточности. Достаточные статистики. | 4 | 4 | 8 | 4 |
| 4. | Решения и стратегии. Функция потерь. | 6 | 6 | 12 | 6 |
| 5. | Несмещённые оценки и их свойства. | 4 | 4 | 8 | 4 |
| 6. | Оптимальные оценки и методы их построения. | 4 | 4 | 8 | 4 |
| 7. | Неравенство Крамера-Рао. Эффективные оценки. | 4 | 4 | 8 | 4 |
| 8. | Непараметрические оценки плотности распределения. | 4 | 4 | 8 | 4 |
|  | Промежуточная аттестация: экзамен |  |  |  | 36 |
|  | **Итого** | 36 | 36 | **72** | **72** |
|  | **Всего** | **144** | | | |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Наименование раздела | Аудиторные часы (7 семестр) | | | Самостоятельная работа |
| № | Лекции | Семинары | Всего |
| 1. | Байесовское и минимаксное оценивание. | 4 | - | 4 | 2 |
| 2. | Свободные статистики. Теорема Басу. | 4 | - | 4 | 2 |
| 3. | Функция полезности и её основные свойства. | 4 | - | 4 | 2 |
| 4. | Простейшие модели страхования, использующие функцию полезности. | 4 | - | 4 | 2 |
| 5. | Случайные суммы. Предельные теоремы для случайных сумм. Вероятность разорения страховой фирмы | 4 | - | 4 | 2 |
| 6. | Доверительное оценивание. Методы построения доверительных множеств. | 4 | - | 4 | 2 |
| 7. | Основные понятия теории проверки гипотез. Лемма Неймана-Пирсона и её применения. | 8 | - | 8 | 4 |
| 8. | Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия. | 4 |  | 4 | 2 |
|  | Аттестация: экзамен |  |  |  | **18** |
|  | **Итого** | 36 | - | **36** | **36** |
|  | **Всего** | **72** | | | |

***Формы контроля знаний. Критерии оценки знаний, навыков***

Структура дисциплины «Дополнительные главы математической статистики» по видам работ

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Раздел  дисциплины | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) | | | Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации |
| Лекции | Семинары | Сам.работа |
| 1. | Условная вероятность и условное математическое ожидание. | 4 | 4 | 4 |  |
| 2. | Статистические структуры. Основные предельные теоремы теории вероятностей. | 6 | 6 | 6 |  |
| 3. | Понятие достаточности. Достаточные статистики. | 4 | 4 | 4 |  |
| 4. | Решения и стратегии. Функция потерь. | 6 | 6 | 6 |  |
| 5. | Несмещённые оценки и их свойства. | 4 | 4 | 4 |  |
| 6. | Оптимальные оценки и методы их построения. | 4 | 4 | 4 |  |
| 7. | Неравенство Крамера-Рао. Эффективные оценки. | 4 | 4 | 4 |  |
| 8. | Непараметрические оценки плотности распределения. | 4 | 4 | 4 | Устный экзамен |
| № | Раздел  дисциплины | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) | | | Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации |
| Лекц. | Прак. | Сам. |
| 1. | Байесовское и минимаксное оценивание. | 4 |  | 4 |  |
| 2. | Свободные статистики. Теорема Басу. | 4 |  | 4 |  |
| 3. | Функция полезности и её основные свойства. | 4 |  | 4 |  |
| 4. | Простейшие модели страхования, использующие функцию полезности. | 4 |  | 4 |  |
| 5. | Случайные суммы. Предельные теоремы для случайных сумм. Вероятность разорения для страховых компаний. | 4 |  | 4 |  |
| 6. | Доверительное оценивание. Методы построения доверительных множеств. | 4 |  | 4 |  |
| 7. | Основные понятия теории проверки гипотез. Лемма Неймана-Пирсона и её применения. | 8 |  | 8 |  |
| 8. | Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия. | 4 |  | 4 | Устный экзамен |

Порядок формирования оценок по дисциплине «Дополнительные главы математической статистики» – «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**Вопросы для индивидуального собеседования на устном экзамене.**

1. Условная вероятность и её свойства.
2. Условное математическое ожидание и его свойства.
3. Статистические структуры и теорема о доминируемых статистических структурах.
4. Достаточные сигмаподъалгебры. Критерий достаточности.
5. Достаточные статистики. Критерий факторизации.
6. Решения и стратегии. Теорема о нерандомизированной стратегии.
7. Несмещённые оценки и их свойства.
8. Теорема Рао-Блекуэла-Колмогорова. Оптимальные оценки.
9. Полные достаточные статистики и их связь с оптимальными оценками.

Неравенство Крамера-Рао. Эффективные оценки.

1. Случайные суммы, основные свойства, пуассоновские случайные суммы.
2. Геометрические случайные суммы, теорема Реньи, связь между геометрическими и пуассоновскими случайными суммами.
3. Теорема переноса. Аналог теоремы Пуассона для случайных сумм.
4. Точная формула для вероятности разорения.
5. Функция полезности и её свойства.
6. Ядерные и тригонометрические оценки неизвестной плотности распределения.
7. Байесовские и минимаксные оценки и их свойства.
8. Свободные статистики. Теорема Басу.
9. Простейшие модели страхования, основанные на функции полезности.
10. Методы построения доверительных множеств.
11. Асимптотические доверительные интервалы.
12. Лемма Неймана-Пирсона и её использование при построении равномерно наиболее мощных критериев.
13. Семейства с монотонным отношением правдоподобия.
14. Многомерное нормальное распределение и его свойства.
15. Свойства оценок метода наименьших квадратов.
16. Теорема Гаусса-Маркова.

*Примеры билетов для экзамена.*

*Пример 1*.

**МГУ имени М.В.ЛОМОНОСОВА ФАКУЛЬТЕТ ВМК**

N билета\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Наименование дисциплины *Дополнительные главы математической статистики*

Вопросы:

1. Условная вероятность.

2.Теорема Гаусса-Маркова.

3. Случайные суммы. Определение и элементарные свойства.

*Пример 2*.

**МГУ имени М.В.ЛОМОНОСОВА ФАКУЛЬТЕТ ВМК**

N билета\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Наименование дисциплины *Дополнительные главы математической статистики*

Вопросы:

1. Определение функции полезности. Основные свойства.

2. Теорема Рао-Блекуэлла-Колмогорова.

3. Смеси вероятностных распределений. Определение. Идентифицируемость.

**Примерные контрольные задания для аттестации.**

КЗА1.

1. Определение вероятностного пространства.
2. Неравенство Крамера-Рао.
3. Определение достаточной статистики.
4. Определение свободной статистик
5. Случайная величина является стандартной нормальной. Найти ее характеристическую функцию.

КЗА2.

* + - 1. Определение и свойства функции полезности.
      2. Формулировка парадокса Аллэ.
      3. Формулировка и основная теорема в модели Эрроу.
      4. Определение оптимальной оценки.
      5. Найти дифференциальную энтропию случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение.

КЗА3.

1. Определение независимости случайных величин.
2. Формулировка теоремы Басу.
3. Формулировка и доказательство теоремы о полной достаточной статистике.
4. Определение идентифицируемого семейства смесей.
5. Найти оптимальную оценку для биномиального распределения.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
| Оценка  РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания**  *Экзамен* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения**  *Экзамен* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципи-ального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки  (владения, опыт деятельности)**  *Экзамен* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

|  |  |
| --- | --- |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** | |
| Результаты обучения | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**  основные системные задачи и проблемы, решаемые в рамках аналитики процессов, протекающих в условиях неопределенности;  **Уметь:**  применять на практике методы статистического анализа к задачам физики, социологии, финансовой математики и других разделов науки и техники;  **Владеть:**  навыками оптимального выбора методов и параметров при решении задач анализа и обработки данных. | ОПК-1.Б |
| **Знать:**  основные понятия и наиболее важные задачи, решаемые в рамках прикладных исследований, связанных со статистическим анализом данных;  **Уметь:**  применять на практике методы статистического анализа к задачам физики, социологии, финансовой математики и других разделов науки и техники;  **Владеть:**  ключевыми методами решения задач статистического анализа данных. | ОПК-2.Б |
| **Знать:**  основные методы анализа случайных процессов, описывающих реальные процессы и явления;  **Уметь:**  решать базовые задачи анализа и проверки гипотез и разрабатывать процедуры принятия решений на основе этих методов;  **Владеть:**  навыками оптимального выбора методов и параметров при решении задач анализа данных, описывающих реальные процессы и явления. | ПК-2.Б |

8. Ресурсное обеспечение:

*Основная литература*

1. Э. Леман, Теория Точечного Оценивания, М.: Наука, 1991.
2. Э.Леман, Проверка статистических гипотез, М.: Наука, 1979.
3. В.Ю. Королев. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Изд-во Проспект. 2006.
4. В.Ю. Королев. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. М.: ИПИ РАН. 2007.
5. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир. 1984.

*Дополнительная литература*

1. А.А.Боровков, Математическая Статистика.- М.: Наука, 1984.
2. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1990.
3. В.М. Золотарев. Современная теория суммирования случайных величин. – М.: Наука, 1986.
4. В.М. Золотарев. Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983.
5. Ю.В. Прохоров, Л.С. Пономаренко. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. – М: Изд-во Московского университета, 2012.
6. B.V. Gnedenko, V. Yu. Korolev. Random Summation: Limit Theorems and Applications. – Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.

Информационные справочные системы: [https://elibrary.ru/](http://matlab.exponenta.ru/)

<http://mathworld.wolfram.com/>

Материально-техническкое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания: русский.

10. Преподаватели: профессор факультета ВМК МГУ В.Е. Бенинг, доцент Т.В.Захарова.

11. Авторы программы: профессора факультета ВМК МГУ В.Е.Бенинг.