Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Обобщенные функции**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические и компьютерные методы решения задач естествознания**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к вариативной части ОПОП ВО и является курсом по выбору, обязательным для студентов, специализирующихся по кафедрам ОМ и ФАиП.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре и обыкновенным дифференциальным уравнениям в объеме, соответствующем программе первого и второго годов обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решения задач в области профессиональной деятельности
* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. основные математические методы, понятия, идеи, используемые в теории обобщённых функций;
2. роль и место теории обобщённых функций в системе математических знаний;
3. свойства обобщенных функций и основные операции над ними;
4. понятие фундаментального решения дифференциального уравнения;
5. свойства преобразований Фурье основных и обобщённых функций;
6. основы теории функциональных пространств Соболева.

**Уметь:**

1. классифицировать обобщенные функции и выполнять операции над ними;
2. строить решения однородных и неоднородных дифференциальных уравнений и систем уравнений, аналога задачи Коши для этих уравнений;
3. строить фундаментальные решения уравнения Лапласа;
4. применять преобразование Фурье для построения решений краевых задач в полупространстве;
5. решать методом Галёркина основные краевые задачи в пространствах Соболева целого порядка.

**Владеть:**

1. навыками применения теорем об обобщенных функциях и о пространствах Соболева;
2. навыками использования обобщенных функций при изучении и решении задач математической физики;
3. навыками решения краевых задач с использованием преобразования Фурье и метода Галеркина.

**4.** Формат обучения: лекции проводятся с использованием меловой доски.

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 2 з.е., в том числе 32 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 40 академических часа на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | |
| **Контактная работа  (работа во взаимодействии с преподавателем)**  **Виды контактной работы, часы** | | | **Самостоятельная работа обучающегося,**  **часы** |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |
| 1. Задача о расширении совокупности обычных функций | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Основные функции одного переменного | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Обобщённые функции одного переменного. Определение. Связь между обычными и обобщёнными функциями | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Действия над обобщёнными функциями | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: самостоятельная работа №1 | **3** | 1 | 0 | **1** | **2** |
| 1. Первообразная. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши | **5** | 3 | 0 | **3** | **2** |
| 1. Обобщённые функции нескольких переменных | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: самостоятельная работа №2 | **3** | 1 | 0 | **1** | **2** |
| 1. Преобразование Фурье и свёртка в пространстве обобщённых функций | **8** | 6 | 0 | **6** | **2** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: самостоятельная работа №3 | **3** | 1 | 0 | **1** | **2** |
| 1. Пространства Соболева. Решение основных краевых задач в пространствах Соболева. Метод Галёркина | **10** | 8 | 0 | **8** | **2** |
| Промежуточная аттестация: устный экзамен | **18** | 0 | 0 | **0** | **18** |
| **Итого** | **72** | **32** | **0** | **32** | **40** |

**7.** Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**7.1.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

|  |
| --- |
| **Самостоятельная работа № 1** |
| 1. Дать определения основных и обобщённых функций.  2. Доказать сингулярность дельта-функции Дирака.  3. Найти вторую производную функции  в пространстве обобщённых функций. |
| **Самостоятельная работа № 2** |
| 1. Дать определение первообразной обобщённой функции.  2. Доказать теоремы о существовании решений однородного и неоднородного линейного обыкновенного уравнения первого порядка в пространстве обобщённых функций.  3. В пространстве обобщённых функций решить уравнения  ,  где  - функция Хевисайда, а  - дельта-функция Дирака. |
| **Самостоятельная работа № 3** |
| 1. Дать определения преобразования Фурье в пространствах основных и обобщённых функций.  2. Доказать теорему Пэли-Винера.  3. Найти преобразования Фурье функций  в пространстве обобщённых функций. |
| **Дополнительные задачи** |
| 1. Найти вторую производную функции  в пространстве обобщённых функций.  2. В пространстве обобщённых функций найти производные следующих функций:    3. В пространстве обобщённых функций найти преобразование Фурье следующих функций: . |

**7.2.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

**Вопросы к экзамену**

1. Основные функции одного переменного. Сходимость в пространстве основных функций.
2. Обобщённые функции одного переменного. Действия над обобщёнными функциями. Операция сложения и умножения на число и на функцию. Операция дифференцирования. Операция предельного перехода. Полнота пространства обобщённых функций.
3. Первообразная. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Решение в пространстве обобщённых функций однородного и неоднородного уравнения первого порядка, системы однородных и неоднородных уравнений первого порядка, уравнения высокого порядка.
4. Постановка аналога задачи Коши для системы уравнений первого порядка и для уравнений высокого порядка. Фундаментальные решения.
5. Обобщённые функции нескольких переменных. Действия с обобщёнными функциями в . Оператор Лапласа и сферически симметричные функции. Фундаментальное решение оператора Лапласа.
6. Преобразование Фурье в пространстве пробных функций. Теорема Пэли-Винера.
7. Преобразование Фурье в пространстве обобщённых функций (одномерном и многомерном). Примеры.
8. Операция свёртки в пространстве обобщённых функций. Примеры. Применения к дифференциальным уравнениям.
9. Дифференциальные уравнения с частными производными и свёртка. Краевые задачи в полупространстве. Примеры.
10. Пространства Соболева. Определение следа функции.
11. Решение основных краевых задач в пространствах Соболева. Метод Галёркина.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
| Оценка  РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания**  *Экзамен* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения**  *Самостоятельная работа* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки  (владения, опыт деятельности)**  *Экзамен* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

|  |  |
| --- | --- |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** | |
| Результаты обучения | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**   1. основные математические методы, понятия, идеи, используемые в теории обобщённых функций; 2. роль и место теории обобщённых функций в системе математических знаний; 3. свойства обобщенных функций и основные операции над ними; 4. основы теории функциональных пространств Соболева.   **Уметь:**   1. классифицировать обобщенные функции и выполнять операции над ними   **Владеть:**   1. навыками применения теорем об обобщенных функциях и о пространствах Соболева | ОПК-2.Б |
| **Знать:**   1. понятие фундаментального решения дифференциального уравнения; 2. свойства преобразований Фурье основных и обобщённых функций.   **Уметь:**   1. строить решения однородных и неоднородных дифференциальных уравнений и систем уравнений, аналога задачи Коши для этих уравнений; 2. строить фундаментальные решения уравнения Лапласа; 3. применять преобразование Фурье для построения решений краевых задач в полупространстве; 4. решать методом Галёркина основные краевые задачи в пространствах Соболева целого порядка.   **Владеть:**   1. навыками использования обобщенных функций при изучении и решении задач математической физики; 2. навыками решения краевых задач с использованием преобразования Фурье и метода Галеркина | ПК-2.Б |

**8.** Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: МГУ. 1984 (и последующие издания).
2. Владимиров В.С. Обобщённые функции и их применения. М.: Наука. 1990.
3. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: МГУ. 2004.

Дополнительная литература:

1. Дубинский Ю.А. Обобщённые функции и их применения. М.: МЭИ. 1974.

Материально-техническкое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

**9.** Язык преподавания: русский.

**10.** Преподаватели: профессор факультета ВМК МГУ И.С.Ломов.

**11.** Авторы программы: профессор факультета ВМК МГУ И.С.Ломов.