Определения. План исследования свойств функции $y = f(x)$

Определения и используемые обозначения

В приводимых определениях и последующих пунктах используются общепринятые обозначения для отношений, множеств чисел, числовых промежутков и т.п.: $\in$ — "принадлежит", $\notin$ — "не принадлежит",
$\vee$ — сравнение чисел и выражений,
$\subset$ — знак строгого включения одного множества в другое,
$\subseteq$ — знак нестрогого включения одного множества в другое,
$\Rightarrow$ — "следует", $\Leftrightarrow$ — "имеет место тогда и только тогда",
$\overset{def}{=}$ — "равно по определению", $\overset{def}{—}$ — "есть по определению" и т.п.;
$\cup$ — объединение множеств, $\cap$ — пересечение множеств,
$A \setminus B$ — разность множеств A и B, $\sim$ — знак подобия фигур;
кванторы: $\forall$ — "любой" или "для любого", $\exists$ — "существует",
$\nexists$ — "не существует", $\exists!$ — "существует единственный";
N — множество всех натуральных чисел (натуральный ряд),
N_0 — расширенный натуральный ряд, Z — множество всех целых чисел,
Q — множество всех рациональных чисел, R — множество всех действительных чисел $(N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R)$,
$N = \{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\ ;\ \dots\}$, $N_0 = \{0\} \cup N = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots\ ;\ n\ ;\ \dots\}$,
$Z = \{\ \dots\ ;\ -m\ ;\ \dots\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots\ ;\ n\ ;\ \dots\}$,
$Z^+ = N$, $Z^- = \{\dots\ ;\ -m\ ;\ \dots\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\}$, $Z = Z^- \cup N_0$,
$\vdots$ — "делится нацело" или *делится*,
пусть $m,\ n \in Z,\ n \neq 0$, $m \vdots n \overset{def}{—}$ если $\exists p \in Z :\quad m = p \cdot n$,
НОД $(m; n)$ — наибольший общий делитель чисел m и n, $m \in N_0,\ n \in N$
(наибольшее натуральное число, на которое делятся числа m и n),
НОК $(m; n)$ — наименьшее общее кратное чисел m и n, где $m,\ n \in N$
(наименьшее натуральное число, которое делится на числа m и n),

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} = p : q = p/q, \text{ где } p \in Z,\ q \in Z\ (q \neq 0) \right\},\ Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+,$$

$$Q^+ = \left\{ \frac{p}{q}\ , \text{ где } p \in Z^+,\ q \in N \right\},\ Q^- = \left\{ \frac{p}{q}\ , \text{ где } p \in Z^-,\ q \in N \right\},$$

$R = \{0 = 0,00\dots0\dots\ ;\quad +a_0, a_1a_2a_3\dots a_n\dots\ ;\quad -a_0, a_1a_2\dots a_n\dots\ ,$
где $a_0 \in N_0$, $\forall k \in N \Rightarrow a_k \in N_0,\ a_k \leqslant 9$ и $\exists a_{k_0} \neq 0,\ k_0 \in N_0\}$.
$a = \pm b$ — или $a = b$, или $a = -b$; $a \pm b$ — или $a + b$, или $a - b$.

В дальнейшем двоеточие : в контексте будет заменять слова типа "такой, что".

$a = \pm a_0, a_1a_2a_3\dots a_n\dots,\ \exists a_{k_0} \neq 0$ — не равная нулю десятичная дробь, если перед числом a стоит знак "+" или не стоит знак, то a — положительное число $(a > 0)$, а если перед a стоит знак " − ", то a — отрицательное число $(a < 0)$,

$R^+ = \{a \in R \ : \ a > 0\},\ R^- = \{a \in R \ : \ a < 0\},\ R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$.

$a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+l} a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+l} \ldots =$

$= \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+l}) \overset{def}{—}$ периодическая десятичная дробь, т.е. $\exists k \in N_0,\ l \in N :\ \ \forall i > k \Rightarrow a_i = a_{i+l}$, далее, $a_0,(9) = (a_0+1),(0)$ и если $\exists a_k \leqslant 8,\ \ k \in N$, то $a_0, a_1 a_2 \ldots a_k(9) = a_0, a_1 a_2 \ldots (a_k+1)(0) =$ $= a_0, a_1 a_2 \ldots (a_k+1)$ — конечная десятичная дробь,

если $\ \forall k \in N_0,\ l \in N \ \ \ \exists i_0 > k :\ a_{i_0+l} \neq a_{i_0}$, то $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \overset{def}{—}$ непериодическая десятичная дробь, она называется иррациональным числом ($a \in R \setminus Q$).

$\{x \in X \ : \ P(x)\}$ — совокупность всех (тех и только тех) элементов x из множества X, для которых выполнено свойство $P(x)$;

[(или) — знак совокупности условий, { (и) — знак системы.

Приведем определения сравнения двух действительных чисел (бесконечных десятичных дробей).

Пусть $a = \pm a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ — бесконечная десятичная дробь:

$a \overset{def}{=} 0$, если $\forall j \in N_0 \Rightarrow a_j = 0$, т.е. $a = 0,000...0... = 0,(0)$, $\ \ 0 = +0 = -0$;

$a \overset{def}{\neq} 0$, если $\exists j_0 \in N_0 \ \ : \ \ a_{j_0} \neq 0$, то есть $a_{j_0} \in N$, если $a \neq 0$, то a — число или положительное, или отрицательное.

Можно исключить из рассмотрения дроби с периодом 9, то есть дроби вида $\pm a_0, a_1 a_2 ... a_k(9)$, поскольку каждую такую дробь можно заменить на равную ей дробь с периодом 0. Таким образом, $\forall j \in N_0\ \exists k \in N, k > j :\ a_k \leqslant 8$.

Пусть $a = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ и $b = b_0, b_1 b_2 ... b_n ...$ — положительные числа, *по определению* считают: $a = b$, если $\ \forall\ j \in N_0 \Rightarrow a_j = b_j$, $\ a > b\ (a < b)$, если либо $a_0 > b_0\ (a_0 < b_0)$, либо $\exists\ j_0 \in N_0 :\ \forall\ j \in N_0,\ j \leqslant j_0$ $a_j = b_j,\ a_{j_0+1} > b_{j_0+1}\ (a_{j_0+1} < b_{j_0+1})$.

Если c — положительное число, d — отрицательное число, то *по определению* считают $c > d,\ d < c,\ c > 0,\ 0 < c,\ d < 0,\ 0 > d$.

$$|a| \overset{def}{=} \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \text{ — модуль (абсолютная величина) числа} a \in R \\ -a, \text{ если } a < 0, \qquad \forall a \in R \ \Rightarrow \ |a| \geqslant 0. \end{cases}$$

Если c и d отрицательные числа, то *по определению* считают

$c = d \ \Leftrightarrow \ |c| = |d|$; $\ \ c > d\ (c < d) \ \Leftrightarrow \ |c| < |d|\ (|c| > |d|)$.

$\forall a,\ b \in R \ : \ a \geqslant 0 \Rightarrow |a| = a \ ; \ a \leqslant 0 \Rightarrow |a| = -a \ ; \ |-a| = |a| \ ; \ -|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

$$|a-b| = |b-a| \ ; \ |a \pm b| \leqslant |a| + |b| \ ; \ ||a| - |b|| \leqslant |a-b| \ ; \ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \ ;$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ , \ b \neq 0 \ ; \quad |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \forall x \in D[f] : f(x) \geqslant 0 \ ; \\ -f(x), & \forall x \in D[f] : f(x) \leqslant 0 \ . \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} a = b \ ; \\ a > b \end{array} \right. \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \geqslant b \ ; \ \left[\begin{array}{l} a = b \ ; \\ b < a \end{array} \right. \overset{def}{\Longleftrightarrow} b \leqslant a \ ; \left[\begin{array}{l} a > b \ ; \\ b < a \end{array} \right. \Longleftrightarrow \ a \neq b \ ;$$

$$a > b \iff b < a \ ; \ a \geqslant b \iff b \leqslant a.$$

$[x] \stackrel{def}{—}$ целая часть числа $x \in R$, если $[x] \in Z$ и $[x] \leqslant x < [x]+1$,

$\{x\} = x - [x] \stackrel{def}{—}$ дробная часть числа $x \in R$, $0 \leqslant \{x\} < 1$.

1) $[a,b] \stackrel{def}{=} \{x \in R: \quad a \leqslant x \leqslant b\}$; 2) $(a,b] \stackrel{def}{=} \{x \in R: \quad a < x \leqslant b\}$;

3) $[a,b) \stackrel{def}{=} \{x \in R: \quad a \leqslant x < b\}$; 4) $(a,b) \stackrel{def}{=} \{x \in R: \quad a < x < b\}$;

5) $[a,+\infty) \stackrel{def}{=} \{x \in R: \quad x \geqslant a\}$; 6) $(a,+\infty) \stackrel{def}{=} \{x \in R: \quad x > a\}$;

7) $(-\infty,a] \stackrel{def}{=} \{x \in R: \quad x \leqslant a\}$; 8) $(-\infty,a) \stackrel{def}{=} \{x \in R: \quad x < a\}$;

9) $(-\infty,+\infty) \stackrel{def}{=} R$.

1) $\stackrel{def}{—}$ отрезок или сегмент ; 2) , 3) $\stackrel{def}{—}$ полуотрезки, или полусегменты, или полуинтервалы ; 4) $\stackrel{def}{—}$ интервал ;

5) , 7) $\stackrel{def}{—}$ замкнутые лучи или замкнутые полупрямые ;

6) , 8) $\stackrel{def}{—}$ открытые лучи или открытые полупрямые ;

9) — числовая прямая (множество всех действительных чисел).

1) — 4) $\stackrel{def}{—}$ конечные или ограниченные числовые промежутки ;

5) — 9) $\stackrel{def}{—}$ бесконечные или неограниченные числовые промежутки.

Предлагаемые ниже для повторения элементарные функции школьного курса математики предлагается исследовать по следующему плану, пока не предполагающему применение производной функции.

I. Область определения функции.
II. Область изменения функции.
III. Ограниченность и неограниченность функции.
IV. Наибольшее и наименьшее значения функции, если они существуют.
V. Четность и нечетность функции.
VI. Периодичность функции.
VII. Нули функции, промежутки знакопостоянства функции.
VIII. Монотонность функции.
IX. Выпуклость функции.
X. График функции. Общие точки графика функции с осями координат, если они есть. Для некоторых функций нужно исследовать и поведение функции на границах области определения.

Приведем соответствующие определения.

Пусть заданы два непустых числовых множества X и Y. Если каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие (по некоторому закону f) единственное число $y \in Y$ (символическое обозначение $x \xrightarrow{f} y$), то говорят, что на множестве X *задана функция* $y = f(x)$.

Определение 1. Множество X называется **областью определения** *функции $y = f(x)$.* Она обозначается $D[f]$; x — **аргумент функции.**

Определение 2. Множество Y всех чисел y, для которых существует $x \in X$ такое, что $y = f(x)$, называется **областью изменения** *или* **областью значений** *функции $y = f(x)$.* Она обозначается $E[f]$, $y_0 = f(x_0)$ — частное значение функции, отвечающее частному значению аргумента x_0.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется **ограниченной сверху** *(***снизу***) на множестве $X \subseteq D[f]$, если существует такое число m_2 (число m_1), что для любого $x \in X$ выполняется условие $f(x) \leqslant m_2$ $(f(x) \geqslant m_1)$. Функция $f(x)$ называется* **ограниченной** *на множестве $X \subseteq D[f]$, если она ограничена на X и сверху, и снизу, то есть если найдутся такие числа m_1 и m_2, что для любого $x \in X$ выполняются условия $m_1 \leqslant f(x) \leqslant m_2$, или если существует число $M > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется условие $|f(x)| \leqslant M$.*

Определение $3'$. Функция $f(x)$ называется **неограниченной сверху (снизу)** *на множестве $X \subseteq D[f]$, если любого m_2 (m_1) существует значение аргумента x_2 $(x_1) \in X$ такое, что $f(x_2) < m_2$ $(f(x_1) > m_1)$. Функция $f(x)$ называется* **неограниченной** *на множестве $X \subseteq D[f]$, если она или не ограничена снизу, или не ограничена сверху на этом множестве, или если для любого числа $M > 0$, найдется такое $x' \in X$, для которого выполняется условие $|f(x')| > M$.*

Определение 4. Число $M_0(m_0)$ называется **наибольшим** *(***наименьшим***) значением функции $y = f(x)$ на множестве X $\quad (X \subseteq D[f])$, если*

$$1)\ \forall x \in X \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant M_0 \quad (f(x) \geqslant m_0)\ ,$$
$$2)\ \exists x_0 \in X: \quad f(x_0) = M_0 \quad (f(x_0) = m_0)\ .$$

Обозначается $M_0 = \max\limits_{x \in X} f(x)$, $\quad m_0 = \min\limits_{x \in X} f(x)$.

Определение 5. Пусть область определения $D[f] = X$ функции $y = f(x)$ симметрична относительно точки $x_0 = 0$, то есть $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$. Функция $y = f(x)$ называется **четной** *(***нечетной***), если для любого $x \in D[f] \ \Rightarrow\ f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.*

Определение 6. Функция $y = f(x)$ называется **периодической***, если существует $T \neq 0$, удовлетворяющее условиям*

$$1)\ \forall x \in D(f) \ \Rightarrow\ x \pm T \in D(f)\ ,$$
$$2)\ \forall x \in D(f) \ \Rightarrow\ f(x + T) = f(x)\ .$$

Число T называется **периодом** *функции $y = f(x)$.*

Из этого определения легко вывести: если T — период функции $y = f(x)$, то и $-T$ также период этой функции, так как в силу периодичности

$$f(x - T) = f[(x - T) + T] = f(x), \text{ то есть } \quad f(x - T) = f(x)$$

(если строго, то по индукции) для любого $m \in Z$, $m \neq 0$ устанавливается, что mT — также период этой функции.

Наименьший положительный период функции $y = f(x)$ называется ее **основным периодом.**

Определение 7. Число $x_0 \in D[f]$ называется **нулем** *функции $y = f(x)$, если $f(x_0) = 0$.*

Промежуток $X' \subseteq D[f]$ называется **промежутком знакопостоянства** *функции $y = f(x)$, если либо $\forall x \in X' \Rightarrow f(x) > 0$, либо $\forall x \in X' \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) < 0$.*

Определение 8. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** *(***убывающей***) на множестве X $(X \subseteq D[f])$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$; если выполняются неравенства $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$, то функция называется* **неубывающей** *(***невозрастающей***).*

Неубывающие и невозрастающие функции называют **монотонными.** Возрастающие и убывающие функции называют **строго монотонными.**

Определение 9. Функция $y = f(x)$ называется **выпуклой вниз (вверх)** *на множестве $X' \subseteq D[f]$, если выполняются следующие условия:*

1) $\forall\ x_1$ и $x_2 \in X' \Rightarrow \dfrac{x_1 + x_2}{2} \in X'$, 2) $\forall\ x_1$ и $x_2 \in X' \Rightarrow$

$$(1)\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right).\ (2)$$

Если при выполнении условия 1) вместо условия 2) выполняется условие 2′) : $\forall\ x_1$ и $x_2 \in X'$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$

$$(1')\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right),\ (2')$$

то функция $f(x)$ называется **строго выпуклой вниз (вверх).**

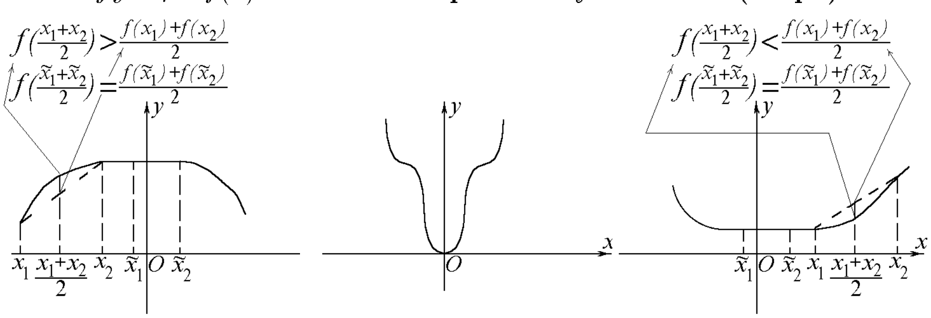

рис. а
выпуклость вверх
с участками строгой
выпуклости

рис. б
невыпуклая функция

рис. в
выпуклость вниз
с участками строгой
выпуклости

На рис. а и в указан геометрический смысл выпуклостей и строгих выпуклостей вверх и вниз функций. На рис. б показан график функции, не обладающей свойствами выпуклости вниз на всей своей области определения. В то же время она обладает многими другими свойствами, которыми обладает функция $y = x^2$, являющаяся выпуклой вниз на всей своей области определения (см. ниже п. 1.3).

Определение 10. **Графиком функции** $y = f(x)$ *называется множество всех точек на координатной плоскости с координатами* $(x; f(x))$, *где* x *— произвольное из области определения* $D[f]$ *(часто говорят* x *"пробегает" всю область определения* $D[f]$*).* Обозначение графика функции $y = f(x)$: $\quad \Gamma_f = \{(x;y) : \quad x \in D[f], \quad y = f(x)\}$.

Если $f(x_0) = 0$, где $x_0 \in D[f]$, то точка с координатами $(x_0; 0)$ — общая точка графика функции $y = f(x)$ с осью Ox; если $0 \in D[f]$, то точка $(0; f(0))$ — общая точка графика функции $y = f(x)$ с осью Oy.

Следует рассматривать вопрос о поведении функции на границах области определения, например, при $x \to \pm\infty$ или в случае неограниченности функции в окрестности точки $x = a$ при $x \to a \pm 0$, обозначения типа $\to a + 0$, $\to a - 0$ означают соответственно "стремится к a справа" и "стремится к a слева". Строгие определения этих "стремлений" приводятся в курсе математического анализа.

В дальнейшем будут применяться ссылки на ту или иную книгу из приведенного ниже списка литературы (например, см. в книге [1]). Это будет означать, что указанный материал можно найти в книге, указанной в этом списке, под номером 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Будак А.Б., Щедрин Б.М. "Элементарная математика. Методические указания к ответам на теоретические вопросы билетов устного экзамена по математике." — М.: МАКС ПРЕСС, 2007

2. Погорелов А.В. "Элементарная геометрия." — М.: "Наука", 1977.

3. Будак А.Б. "Элементарная математика. Подготовительный курс для высшей школы." — М.: издательство МГУ, "Ротапринт", 1992.

4. Якушева Е.В., Попов А.В., Якушев А.Г. "Математика. Все для экзамена." — М.: УНЦ ДО, 2004, 2008.