Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Оптимальное управление**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические методы обработки информации и принятия решений**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре и обыкновенным дифференциальным уравнениям в объёме, соответствующем программе первого и второго годов обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
* **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решении задач в области профессиональной деятельности
* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. методологию вывода и анализа основных моделей, которые описываются как задачи оптимального управления;
2. основные понятия, определения и факты теории оптимального управления.

**Уметь:**

1. применять на практике общую теорию и методы решения линейных и нелинейных задач оптимального управления;

**Владеть:**

1. навыками решения линейных и нелинейных задач оптимального управления;
2. навыками как к адаптации теоретических методов к конкретным задачам, так и к внесению необходимых изменений в саму постановку задачи.

**4.** Формат обучения: лекции проводятся с использованием меловой доски, при проведении контрольных работ применяется компьютерная диалоговая система контроля знаний, разработанная в среде дистанционного обучения Moodle.

**5.** Объём дисциплины (модуля) составляет 4 з.ед.,в том числе, 72 академических часа, отведённых на контактную работу обучающихся с преподавателем, 72 академических часа на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | |
| **Контактная работа  (работа во взаимодействии с преподавателем)**  **Виды контактной работы, часы** | | | **Самостоятельная работа обучающегося,**  **часы** |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |  |
| 1. Постановка задачи оптимального управления. Основные вопросы теории. | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Пространство непустых компактов. Алгебраические операции над множествами. Хаусдорфово расстояние. | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Определение минимальной выпуклой оболочки. Лемма об отделимости. | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Опорные функции: определение, основные свойства. | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: дистанционная контрольная работа № 1 | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| 1. Многозначные отображения. Интегрирование многозначных отображений. | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Экспоненциал матрицы. Основные свойства экспоненциала. Формула Коши. .Множества достижимости и управляемости линейных управляемых систем. | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: дистанционная контрольная работа № 2 | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| 1. Теорема существования. Лемма о внутренней точке интеграла. | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Принцип максимума Понтрягина. Эквивалентная формулировка принципа максимума. | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Достаточные условия оптимальности в линейной задаче быстродействия. | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: дистанционная контрольная работа № 3 | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| 1. Понятие о задаче синтеза. Задача о быстрейшем переводе маятника в состояние покоя. | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Линейная задача оптимального управления с терминальным функционалом. | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: дистанционная контрольная работа № 4 | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| **Промежуточная аттестация: зачёт** | **6** | 0 | 0 | **0** | **6** |
| 1. Постановка нелинейной задачи оптимального управления с интегральным функционалом. | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Компактность множества достижимости. Теорема существования в нелинейной задаче быстродействия. | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Вариации Макшейна. Построение конуса касательных направлений к множеству достижимости. | **10** | 6 | 0 | **6** | **4** |
| 1. Принцип максимума Понтрягина -- необходимое условие оптимальности для задачи с интегральным функционалом. | **12** | 8 | 0 | **8** | **4** |
| 1. Метод динамического программирования. Уравнение Беллмана. Достаточные условия оптимальности. | **12** | 8 | 0 | **8** | **4** |
| 1. Примеры задач оптимального управления. | **12** | 8 | 0 | **8** | **4** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: дистанционная контрольная работа № 5 | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| Промежуточная аттестация: дифференцированный зачёт | **14** | 0 | 0 | **0** | **14** |
| **Итого** | **144** | **72** | **0** | **72** | **72** |

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

|  |  |
| --- | --- |
| Контрольная работа № 1 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Найти множество , где ,  2. Пусть . Найдите опорную функцию .  3. Найти множество , где , ,    4. Вычислить расстояние Хаусдорфа  между множествами  и , где , | 1. Найти множество , где ,  2. Пусть , где . Найдите опорную функцию .  3. Из прилагаемого ниже списка утверждений выберите верные:  А) Если, то  для любой квадратной -матрицы .  B) Если , то  для любой квадратной ()-матрицы .  С) Пусть  - непустой выпуклый компакт из , тогда множество  (произведение множества  на матрицу ) - может быть невыпуклым множеством для какой-то квадратной ()-матрицы .  D) Алгебраическая сумма двух непустых выпуклых множеств является выпуклым множеством.  E) Алгебраическая сумма двух непустых выпуклых множеств не  обязательно является выпуклым множеством.  F) Алгебраическая сумма двух произвольных шаров не обязательно является шаром.  4. Пусть  ,  . Существует такой номер , что . Найти  для множества . |
| Контрольная работа № 2 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Найти экспоненциал  матрицы .  2. Вычислить значение выражения , где  - элементы экспоненциала  матрицы .  3.Найти экспоненциал  матрицы .  4. Найти , где , ,  - класс допустимых управлений, состоящий из интегрируемых по Лебегу на  функций, принимающих для почти всех значения из компакта . | 1. Найти экспоненциал  матрицы .  2. Найти решение задачи Коши .  3. . Вычислить значение выражения  при , где  - элементы экспоненциала  матрицы  .  4. Найти , где ,  - класс допустимых управлений, состоящий из интегрируемых по Лебегу на  функций, принимающих для почти всех значения из компакта . |
| Контрольная работа № 3 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Из прилагаемого ниже списка утверждений выберите верные:  A) Принцип максимума Л.С.Понтрягина является достаточным условием оптимальности в линейной задаче быстродействия.  B) Принцип максимума Л.С.Понтрягина является необходимым и  достаточным условием оптимальности в линейной задаче быстродействия.  C) В формулировке принципа максимума участвует функция - некоторое ненулевое решение сопряжённого уравнения  .  D) В лемме об эквивалентной формулировке принципа максимума Л.С.Понтрягина множества  и  являются непустыми компактами в.  2. Найдите для управляемой системы где  , множество достижимости  при  из начального множества  и множество управляемости  при  для конечного множества .  3. Пусть задана управляемая система  Исследовать управляемость системы из  в  на указанных отрезках времени и выбрать верные утверждения.  A) Объект управляем на отрезке времени .  B) Объект неуправляем на отрезке времени .  C) Объект управляем на отрезке времени .  D) Объект неуправляем на отрезке времени .  E) Объект управляем на отрезке времени .  F) Объект неуправляем на отрезке времени .  4. Из прилагаемого ниже списка утверждений выберите верные:   1. Объект, описываемый системой уравнений     является локально управляемым в точке  на отрезке  времени .  B) Объект, описываемый системой уравнений    не является локально управляемым в точке  на отрезке  времени . | 1. Из прилагаемого ниже списка утверждений выберите верные:  A) Принцип максимума Л.С.Понтрягина является необходимым условием оптимальности в линейной задаче быстродействия.  B) Принцип максимума Л.С.Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности в линейной задаче быстродействия.  C) В лемме об эквивалентной формулировке принципа максимума Л.С.Понтрягина функция  не может равняться нулю ни в одной точке рассматриваемого отрезка времени.  D) В лемме об эквивалентной формулировке принципа максимума  Л.С.Понтрягина функция  может равняться нулю в  отдельных точках рассматриваемого отрезка времени.  2. Найдите для управляемой системы где  , множество управляемости  при  для конечного множества .  3. Пусть задана управляемая система  Исследовать управляемость системы из  в  на указанных отрезках времени и выбрать верные утверждения.  A) Объект управляем на отрезке времени .  B) Объект неуправляем на отрезке времени..  C) Объект управляем на отрезке времени .  D) Объект неуправляем на отрезке времени .  E) Объект управляем на отрезке времени .  F) Объект неуправляем на отрезке времени .  4. Из прилагаемого ниже списка утверждений выберите верные:   1. Объект, описываемый системой уравнений     является локально управляемым в точке  на отрезке  времени .  B) Объект, описываемый системой уравнений    не является локально управляемым в точке  на отрезке  времени . |
| Контрольная работа № 4 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Задана линейная задача быстродействия    Пусть - оптимальное время. Вычислить значение выражения  .  2. Решив линейную задачу быстродействия    вычислить значение выражения , где  - оптимальная траектория.  3. Решив линейную задачу оптимального управления    вычислить значение выражения ,  где - оптимальная траектория, - оптимальное значение функционала. | 1. Задана линейная задача быстродействия    Пусть - оптимальное время, - точка переключения оптимального управления. Вычислить значение выражения .  2. Решив линейную задачу быстродействия    вычислить значение выражения  ,  где  - оптимальное управление, - оптимальное время, - точка переключения оптимального управления.  3. Решив линейную задачу оптимального управления    вычислить значение выражения ,  где - оптимальная траектория, - оптимальное управление. |
| Контрольная работа № 5 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Пусть - допустимая пара, заданная на отрезке ,  для управляемой системы  и , где - множество достижимости, - функция Гамильтона - Понтрягина, .  Тогда существует функция , такая, что  A)  при .  B) .  C) .  D)  E) - строго монотонно возрастающая функция на  .  2. Решив задачу оптимального управления    вычислить значение выражения , где - момент выхода на особый режим, - момент схода с особого режима.  3.Решив задачу оптимального управления    вычислить значение выражения , где  - оптимальное управление, - оптимальное значение времени. | 1. Пусть - допустимая процесс в задаче  - управление, полученное из  при помощи какой-то  вариации Макшейна ,  - траектория, соответствующая управлению , - оператор, действующий из множества вариаций Макшейна в , такой, что .  Пусть - произвольные вариации Макшейна. Выберите верные утверждения.  A) .  B) .  C) .  D) .  E) .  2. Решив задачу оптимального управления    вычислить значение выражения , где - оптимальное значение функционала.  3.Решив задачу оптимального управления    вычислить значение выражения , где -- оптимальное управление, - оптимальное значение функционала.. |

Вопросы к зачёту.

1. Постановка задачи оптимального управления. Основные вопросы теории оптимального управления.
2. Пространство непустых компактов из . Алгебраические операции над множествами. Хаусдорфово расстояние.
3. Опорные функции. Их основные свойства.
4. Многозначные отображения. Непрерывность многозначных отображений.
5. Измеримость многозначных отображений. Теорема об измеримой однозначной ветви.
6. Интегрирование многозначных отображений. Теорема Ляпунова.
7. Теорема Каратеодори. Формула Коши.
8. Множества достижимости и управляемости линейных управляемых систем. Их опорные функции. Теорема существования оптимального управления в линейной задаче быстродействия.
9. Управляемость и локальная управляемость линейных систем. Лемма о внутренней точке интеграла.
10. Принцип максимума Понтрягина. Теорема об эквивалентной формулировке принципа максимума.
11. Принцип максимума Понтрягина как необходимое условие оптимальности в линейной задаче быстродействия.
12. Усиленное условие трансверсальности. Достаточные условия оптимальности в линейной задаче быстродействия.
13. Условия единственности пары , удовлетворяющей принципу максимума Понтрягина. Строгая выпуклость.
14. Понятие о задаче синтеза. Синтез быстродействия в начало координат для задачи .
15. Линейная задача оптимального управления с терминальным функционалом и свободным правым концом.

Вопросы к дифференцированному зачёту.

1. Постановка нелинейной задачи оптимального управления с интегральным функционалом. Попадание на границу множества достижимости расширенной системы, как необходимое условие оптимальности.
2. Множество достижимости нелинейной управляемой системы. Компактность множества достижимости. Теорема существования оптимального управления в нелинейной задаче быстродействия.
3. Система уравнений в вариациях и сопряжённая система.
4. Вариации Макшейна. Построение конуса касательных направлений ко множеству достижимости.
5. Расширение вариаций Макшейна (вариация по времени). Построение расширенного конуса касательных направлений ко множеству достижимости.
6. Лемма о попадании точки в образ множества при непрерывном отображении.
7. Лемма об отделимости нуля и конуса касательных направлений, как необходимое условие попадания на границу множества достижимости.
8. Принцип максимума Понтрягина - необходимое условие попадания на границу множества достижимости.
9. Лемма об отделимости отрицательного направления оси и расширенного конуса касательных направлений, как необходимое условие оптимальности.
10. Принцип максимума Понтрягина - необходимое условие оптимальности в задаче с интегральным функционалом.
11. Уравнение Беллмана и достаточные условия оптимальности в задаче быстродействия.
12. Уравнение Беллмана и достаточные условия оптимальности в задаче с интегральным функционалом.
13. Достаточные условия оптимальности в форме конструкций принципа максимума Понтрягина.
14. Линейно-квадратичная задача оптимального управления.
15. Задача о нагреве чайника до заданной температуры при минимальном расходе топлива.
16. Задача распределения ресурсов в колонии микроорганизмов.
17. Модель Рамсея на бесконечном горизонте. Оптимальные пропорции производства и потребления.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
| Оценка  РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания**  *Контрольные работы*  *(тесты)* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения**  *зачёт* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципи-ального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки  (владения, опыт деятельности)**  *Дифференцир. зачёт* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

|  |  |
| --- | --- |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** | |
| Результаты обучения | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**   1. постановку задачи оптимального управления; 2. определение экспоненциала и его основные свойства, формулу Коши; 3. определение опорной функции множества, свойства опорных функций, их связь с представлениями выпуклых множеств; 4. алгебраические операции над множествами, Хаусдорфово расстояние; 5. определение измеримого и непрерывного многозначного отображения, теорему об измеримой однозначной ветви, теорему Ляпунова о виде интеграла от многозначного отображения; 6. определение множеств достижимости и управляемости линейных управляемых систем, теорему существования оптимального управления в линейной задаче быстродействия, лемму о внутренней точке интеграла; 7. формулировку принципа максимума Понтрягина, эквивалентную формулировку принципа максимума, принцип максимума как необходимое условие оптимальности в линейной задаче быстродействия; 8. усиленное условие трансверсальности, достаточные условия оптимальности в линейной задаче быстродействия, понятие о задаче синтеза, решение линейной задачи оптимального управления с терминальным функционалом и свободным правым концом; 9. постановку нелинейной задачи оптимального управления с интегральным функционалом, теорему существования оптимального управления в нелинейной задаче быстродействия; 10. систему уравнений в вариациях и сопряжённую систему, вариации Макшейна и расширенные вариации Макшейна (вариации по времени), как строится конус касательных направлений и расширенный конус касательных направлений к множеству достижимости; 11. лемму о попадании точки в образ множества при непрерывном отображении, лемму об отделимости нуля и конуса касательных направлений к множеству достижимости - необходимое условие попадания на границу множества достижимости, принцип максимума Понтрягина - необходимое условие попадания на границу множества достижимости; 12. лемму об отделимости отрицательного направления оси  и расширенного конуса касательных направлений как необходимое условие оптимальности, принцип максимума Понтрягина - необходимое условие оптимальности для задачи с интегральным функционалом; 13. уравнение Беллмана и достаточные условия оптимальности для задачи быстродействия и для задачи с интегральным функционалом; 14. задачу о нагреве чайника до заданной температуры при минимальном расходе топлива, примеры задач оптимального управления с особыми режимами.   **Уметь:**   1. применять на практике общую теорию и методы решения линейных и нелинейных задач оптимального управления; 2. находить особые режимы в задачах оптимального управления и исследовать их на оптимальность; 3. применять методы динамического программирования для решения линейных и нелинейных задач оптимального управления;   **Владеть:**   1. навыками решения классических линейных задач оптимального управления; 2. навыками применения принципа максимума Понтрягина для нахождения экстремального решения в нелинейных задачах оптимального управления; | ОПК-1.Б |
| **Знать:**   1. методологию вывода и анализа основных моделей, приводящих к задачам оптимального управления; 2. методологию вывода уравнения Беллмана для задачи быстродействия и для задачи с интегральным функционалом;   **Уметь:**   1. применять принцип максимума Понтрягина для анализа задач оптимального управления; 2. формализовать задачу и выбрать подходящие методы её решения в соответствии с информацией о свойствах исходной модели;   **Владеть:**   1. навыками применения теорем о достаточных условиях для обоснования оптимальности экстремальных решений; | ОПК-2.Б |
| **Владеть:**   1. основными методами решения задач оптимального управления. | ПК-2.Б |

8. Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1976.

2. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Наука. 1989.

3. Киселёв Ю.Н. Оптимальное управление. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1986.

4. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. Учебное пособие. М.: Макс-

ПРЕСС. 2007.

5. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука. 1969.

6. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: «Высшая школа». 2001.

7. Ли Э., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука. 1972.

8. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука. 1979.

Дополнительная литература:

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
2. Киселёв Ю.Н. Линейная теория быстродействия с возмущениями. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1978.
3. Арис Р. Метод динамического программирования в дискретных системах. М.: Наука. 1970.
4. Данскин Л. Максимин. М.: ИЛ. 1970.
5. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. Задачи оптимального управления с особыми режимами для одной модели из микробиологии. Вестник Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1998. N 3, с. 23-26.

Информационные справочные системы: сайт кафедры оптимального управления oc.cs.msu.su

Материально-техническкое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватели: Чл.-корр. РАН профессор факультета ВМК МГУ С.М. Асеев

доценты факультета ВМК МГУ Киселёв Ю.Н., М.В. Орлов.

11. Авторы программы: Чл.-корр. РАН профессор факультета ВМК МГУ С.М. Асеев,

доценты факультета ВМК МГУ Киселёв Ю.Н., М.В. Орлов.