Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Оптимальное управление**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические методы обработки информации и принятия решений**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре и обыкновенным дифференциальным уравнениям в объёме, соответствующем программе первого и второго годов обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
* **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решении задач в области профессиональной деятельности
* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. методологию вывода и анализа основных моделей, которые описываются как задачи оптимального управления;
2. основные понятия, определения и факты теории оптимального управления.

**Уметь:**

применять на практике общую теорию и методы решения линейных и нелинейных задач оптимального управления;

**Владеть:**

1. навыками решения линейных и нелинейных задач оптимального управления;
2. навыками как к адаптации теоретических методов к конкретным задачам, так и к внесению необходимых изменений в саму постановку задачи.

**4.** Формат обучения: лекции проводятся с использованием меловой доски.

**5.** Объём дисциплины (модуля) составляет 4 з.ед. (всего 144 академических часов). В том числе 72 академических часов, отведённых на контактную работу обучающихся с преподавателем, 72 академических часа на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего (часы)** | В том числе | | | |
| **Контактная работа  (работа во взаимодействии с преподавателем)**  **Виды контактной работы, часы** | | | **Самостоятельная работа обучающегося,**  **часы** |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |  |
| 1. Введение. Постановка математических задач оптимального управления. Основные вопросы теории. Примеры. | **4** | 4 | 0 | **4** | **4** |
| 1. Принцип максимума Понтрягина для нелинейных управляемых систем. Формулировка теоремы. Комментарии к теореме. Краевая задача принципа максимума. | **4** | 4 | 0 | **4** | **4** |
| 1. Примеры применения принципа максимума Понтрягина для построения оптимальных решений. | **20** | 16 | 0 | **16** | **16** |
| 1. Опорные функции: определение, основные свойства. | **4** | 4 | 0 | **4** | **4** |
| 1. Возможная невыпуклость множества достижимости нелинейных управляемых систем (пример Ли и Маркуса). | **2** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Экспоненциал матрицы. Основные свойства экспоненциала. Формула Коши. .Множества достижимости и управляемости линейных управляемых систем. Численные методы решения линейной задачи быстродействия. Схема продолжения по параметру для решения краевых задач (ОДУ). | **8** | 8 | 0 | **8** | **6** |
| Промежуточная аттестация: зачёт | **2** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Теорема о необходимых условиях оптимальности --- принцип максимума Понтрягина. Схема доказательства принципа максимума на основе вариаций Макшейна. | **4** | 4 | 0 | **4** | **4** |
| 1. Дифференциальные уравнения (ДУ) в вариациях. Представление решения ДУ в вариациях и сопряжённого уравнения в терминах фундаментальной матрицы. Главный член приращения траектории управляемой системы, вызываемого простейшей вариацией Макшейна. | **10** | 10 | 0 | **10** | **10** |
| 1. Вариации Макшейна. Главный член приращения траектории. Отображение Ф(М) и порождаемый им конус. Операции над вариациями Макшейна. Линейность отображения Ф(М) при неотрицательных коэффициентах. Расширение класса допустимых вариаций, построение конуса С. Основная лемма. Следствие из основной леммы. Принцип максимума Понтрягина. Эквивалентная формулировка принципа максимума. | **10** | 10 | 0 | **10** | **10** |
| 1. Заключительная часть доказательства. Вывод условия максимума. Обоснование дополнения 2 к основной теореме. | **6** | 6 | 0 | **6** | **6** |
| 1. Задачи Лагранжа, Майера и Больца. Связь между ними. | **2** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| Аттестация: Экзамен | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| **Итого** | **144** | **72** | **0** | **72** | **72** |

**Вопросы к зачёту.**

1. Постановка математических задач оптимального управления.
2. Формулировка теорем о необходимы х условиях оптимальности для нелинейных управляемых систем --- принцип максимума Понтрягина (ПМП). Интегральный функционал. Задача быстродействия. Комментарии к теоремам о необходимых условиях оптимальности.
3. Опорные функции. Их основные свойства.
4. Экспоненциал матрицы. Формула Коши для линейных систем.
5. Задача быстродействия для объекта «тележка» (попадание в начало координат). Программа и синтез. Линия переключения. Время быстродействия.
6. Задача быстродействия для объекта «математический маятник» (попадание в начало координат). Характер зависимости оптимального управления от времени. Линия переключения.
7. Линейно-квадратичная задача оптимального управления. Краевая задача принципа максимума Понтрягина. Матричное дифференциальное уравнение Риккати.
8. Множества достижимости и управляемости линейных управляемых систем. Их опорные функции.
9. Задача минимизации функционала типа «энергия» на траекториях линейной управляемой системы со скалярным управлением. Случай отсутствия геометрических ограничений на управление.
10. Задача минимизации функционала типа «энергия» на траекториях линейной управляемой системы со скалярным ограниченным управлением. Функция насыщения. Характер зависимости оптимального управления от времени.
11. Задача минимизации функционала типа «расход топлива» на траекториях линейной управляемой системы со скалярным ограниченным управлением. Функция мёртвой зоны.. Характер зависимости оптимального управления от времени.
12. Метод продолжения по параметру в численных алгоритмах решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
13. Модель Рамсея как пример задачи оптимального управления с особыми режимами.
14. Понятие о задаче синтеза. Синтез быстродействия в начало координат для задачи .
15. Линейная задача быстродействия со скалярным ограниченным управлением. Краевая задача принципа максимума.

**Дополнительные вопросы к зачёту.**

1. Найти экспоненциал  матрицы A при А = , А = , А =  .
2. Характер зависимости от времени оптимального управления в задаче быстродействия для объектов «тележка» и «математический маятник».
3. Для задачи быстродействия   
     
   записать краевую задачу принципа максимума.
4. Постановка задачи Рамсея.
5. Найти опорную функцию следующих множеств

1) 

2) 

3) 

1. Для управляемого объекта «тележка» найти оптимальное время движения в начало координат из начальной точки . Построить график оптимального управления. Построить оптимальную траекторию на фазовой плоскости.
2. Функции sign(s), sat(s), dez(s), isat(s).
3. Дополнения 1 , 2 к теореме 1 (ПМП).
4. Записать краевую задачу принципа максимума Понтрягина для линейно-квадратичной задачи оптимального управления.
5. Матрица управляемости.

**Вопросы к экзамену.**

1. Общая схема доказательства ПМП для нелинейных управляемых систем.
2. Постановка ЗОУ для нелинейных управляемых систем. Эквивалентная формулировка ЗОУ в расширенном фазовом пространстве. Теорема 1, Дополнения 1, 2 к теореме 1.
3. ДУ в вариациях. Главный член приращения решения. Оценка остаточного члена. Представление решения ДУ в вариациях и сопряжённого уравнения в терминах фундаментальных матриц.
4. Вычисление главной части приращения траектории управляемой системы, вызываемого ПОВМ.
5. Теорема об опорной гиперплоскости. Луч и конус в . Теорема об отделимости луча и конуса.
6. Симплекс. Барицентрические координаты. Утверждение о малых деформациях симплекса.
7. Теорема Брауэра о неподвижной точке.
8. Вариации Макшейна (ПОВМ, ОВМ, МВМ). Отображение Ф(М) и порождаемый им конус **К** .
9. Вариации Макшейна: сложение, умножение на неотрицательные числа. Линейность отображения Ф(М) при неотрицательных коэффициентах. Выпуклость конуса, порождаемого отображением Ф(М).
10. Расширение класса допустимых вариаций. Отображение Ф(V(M,)). Построение конуса **С**.
11. Основная лемма. Следствие из основной леммы.
12. Вывод условия максимума.
13. Обоснование Дополнения 2.
14. Задачи Лагранжа. Майера и Больца. Связь между ними.
15. Линейно-квадратичная ЗОУ (, ).
16. Модель Рамсея на бесконечном горизонте. Оптимальные пропорции производства и потребления. Особые режимы.

ЗОУ — задача оптимального управления

ПМП — принцип максимума Понтрягина

ПОВМ — простейшая одночленная вариация Макшейна

ОВМ — одночленная вариация Макшейна

МВМ — многочленная вариация Макшейна

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
| Оценка  РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания**  *Контрольные работы*  *(тесты)* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения**  *зачёт* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки  (владения, опыт деятельности)**  *Дифференцированный зачёт* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

|  |  |
| --- | --- |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** | |
| Результаты обучения | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**   1. постановку задачи оптимального управления; 2. определение экспоненциала и его основные свойства, формулу Коши; 3. определение опорной функции множества, свойства опорных функций, их связь с представлениями выпуклых множеств; 4. алгебраические операции над множествами, Хаусдорфово расстояние; 5. формулировку принципа максимума Понтрягина, эквивалентную формулировку принципа максимума, принцип максимума как необходимое условие оптимальности в линейной задаче быстродействия; 6. систему уравнений в вариациях и сопряжённую систему, вариации Макшейна и расширенные вариации Макшейна (вариации по времени), как строится конус касательных направлений и расширенный конус касательных направлений к множеству достижимости; 7. лемму о попадании точки в образ множества при непрерывном отображении, лемму об отделимости нуля и конуса касательных направлений к множеству достижимости - необходимое условие попадания на границу множества достижимости, принцип максимума Понтрягина - необходимое условие попадания на границу множества достижимости; 8. лемму об отделимости отрицательного направления оси  и расширенного конуса касательных направлений как необходимое условие оптимальности, принцип максимума Понтрягина - необходимое условие оптимальности для задачи с интегральным функционалом;   **Уметь:**   1. применять на практике общую теорию и методы решения линейных и нелинейных задач оптимального управления; 2. находить особые режимы в задачах оптимального управления и исследовать их на оптимальность;   **Владеть:**   1. навыками решения классических линейных задач оптимального управления; 2. навыками применения принципа максимума Понтрягина для нахождения экстремального решения в нелинейных задачах оптимального управления; 3. основными методами решения задач оптимального управления. | ОПК-1.Б |
| **Знать:**   1. методологию вывода и анализа основных моделей, приводящих к задачам оптимального управления; 2. методологию вывода уравнения Беллмана для задачи быстродействия и для задачи с интегральным функционалом;   **Уметь:**   1. применять принцип максимума Понтрягина для анализа задач оптимального управления; 2. формализовать задачу и выбрать подходящие методы её решения в соответствии с информацией о свойствах исходной модели; | ОПК-2.Б |

8. Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1976.

2. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Наука. 1989.

3. Киселёв Ю.Н. Оптимальное управление. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1986.

4. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. Учебное пособие. М.: Макс-

ПРЕСС. 2007.

5. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука. 1969.

6. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: «Высшая школа». 2001.

7. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука. 1979.

Дополнительная литература:

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
2. Киселёв Ю.Н. Линейная теория быстродействия с возмущениями. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1978.
3. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. Задачи оптимального управления с особыми режимами для одной модели из микробиологии. Вестник Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1998. N 3, с. 23-26.
4. H. van den Berg, Kiselev Yu.N., Kooijman S.A.L.M., Orlov M.V. Optimal Allocation Between Nutrient Uptake and Growth in a Microbial Trichome. J. Math. Biol. 1998. 37. P. 28-48.

Информационные справочные системы: сайт кафедры оптимального управления oc.cs.msu.su

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватели: доценты факультета ВМК МГУ Киселёв Ю.Н., М.В. Орлов.

11. Авторы программы: доценты факультета ВМК МГУ Киселёв Ю.Н., М.В. Орлов.