Ю.Г. Смирнов

МЕТОД ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУРАХ*

Рассмотрим (векторную) задачу о распространении электромагнитных волн в волноведущих структурах с неоднородным заполнением и наличием незамкнутых поверхностей (пластин) в структуре. Опишем класс волноведущих структур и сформулируем задачу о нормальных волнах для однородной системы уравнений Максвелла. Эта задача сводится к краевой задаче для продольных компонент электромагнитного поля в пространствах Соболева. Неоднородность диэлектрического заполнения, наличие острых «ребер» и вхождение спектрального параметра в условиях сопряжения приводят к необходимости дать специальное определение решения задачи. Для определения решения используется вариационная формулировка задачи.

Пусть $Q \subset R^2 = \{x_3 = 0\}$ ограниченная область на плоскости Ox_1x_2 с границей ∂Q . Пусть $l \subset Q$ - простая замкнутая или незамкнутая кривая без точек самопересечения класса C, разбивающая Q на две области Ω_1 и Ω_2; $Q = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup l$. Если l - незамкнутая кривая, то предполагаем, что концевые точки ∂l не совпадают и принадлежат ∂Q: $\partial l \subset \partial Q$. Будем также предполагать, что границы ∂Q, $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ областей Q, Ω_1, Ω_2 являются простыми, замкнутыми кусочно-гладкими кривыми, состоящими из конечного числа гладких дуг класса C^∞, сходящихся под углами, отличными от нулевого.

Пусть $P_i \in l$ произвольные 2N точек ($P_i \neq P_j$), разбивающие l на два множества Г и Г′ так, что $\Gamma = l \setminus \overline{\Gamma'}$, $\Gamma' = l \setminus \overline{\Gamma}$, $\Gamma \cup \Gamma' \cup P_i = l$ ($\Gamma' \cap \Gamma = \varnothing$). Если N = 0, то полагаем $\Gamma = l$, $\Gamma' = \varnothing$. Пусть, далее $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$, $\Gamma_0 = \partial Q \cup \Gamma'$.

Граница $\partial\Omega$ области Ω в общем случае содержит угловые точки с внутренними углами $0 < \alpha \leq 2\pi$. Угловую точку при $\alpha = 2\pi$ часто называют «ребром».

Волновод заполнен двумя однородными изотропными диэлектриками с относительной диэлектрической проницаемостью ε_j в области Ω_j, $\varepsilon_j \geq 1$, $\mathrm{Im}\,\varepsilon_j = 0$, $\mu_j = 1$ ($j = 1,2$). Γ_0 - проекция поверхности идеально проводящих, бесконечно тонких экранов, Г – проекция поверхности соприкосновения диэлектриков.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 01-01-00053

Геометрия рассматриваемой модели охватывает все типы экранированных двухслойных волноведущих структур, используемых на практике: от круглых и прямоугольных частично заполненных волноводов до щелевых, полосковых и компланарных линий передачи.

Нормальные волны волноведущей структуры определяются как нетривиальные решения однородной системы уравнений Максвелла с зависимостью $\exp(i\gamma x_3)$ от координаты, вдоль которой структура регулярна; γ - комплексный спектральный параметр - нормированная на волновое число свободного пространства постоянная распространения собственной волны линии передачи или волновода. Задача отыскания нормальных волн структуры приводит к эквивалентной краевой задаче на собственные значения

$$\Delta\Pi + \tilde{k}^2\Pi = 0, \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{1}$$

$$\Delta\psi + \tilde{k}^2\psi = 0, \qquad \tilde{k}^2 = \tilde{k}_j^2 = \varepsilon_j - \gamma^2, \tag{2}$$

для продольных компонент электромагнитного поля Π и ψ: найти такие $\gamma \subset \mathbf{C}$, при которых существуют нетривиальные решения уравнений Гельмгольца, удовлетворяющие краевым условиям на Γ_0

$$\Pi\big|_{\Gamma_0} = 0, \tag{3}$$

$$\partial\psi/\partial n\big|_{\Gamma_0} = 0, \tag{4}$$

условиям сопряжения на Γ

$$[\Pi]_\Gamma = 0,\ [\psi]_\Gamma = 0, \tag{5}$$

$$\gamma\left[\frac{1}{\tilde{k}^2}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right]_\Gamma + \left[\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2}\frac{\partial\Pi}{\partial n}\right]_\Gamma = 0,\ \gamma\left[\frac{1}{\tilde{k}^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\right]_\Gamma - \left[\frac{1}{\tilde{k}^2}\frac{\partial\psi}{\partial n}\right]_\Gamma = 0 \tag{6}$$

и условию ограниченности энергии в Ω:

$$\Pi, \psi \in \mathrm{H}^1(\Omega). \tag{7}$$

Здесь n – орт внешней нормали к Ω, τ – касательный орт, причем $x_1 \times x_2 = \tau \times n$. Квадратные скобки $[f]_\Gamma = f_2|_\Gamma - f_1|_\Gamma$ означают разность следов функций на Γ в областях Ω_2 и Ω_1. Условие (4) должно выполняться с обеих сторон Γ'.

Будем искать решения Π и ψ задачи (1) - (7) в пространствах Соболева соответственно

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \left\{f : f \in \mathrm{H}^1(\Omega), f\big|_{\Gamma_0} = 0\right\},$$

и

$$\hat{\mathrm{H}}^1(\Omega)=\left\{f: f\in \mathrm{H}^1(\Omega),\ \int_\Omega f dx=0\right\}.$$

Дадим другую эквивалентную вариационную формулировку задачи (1) – (7).

Определение 1. Пару функций

$$\Pi\in \mathrm{H}_0^1(\Omega),\quad \psi\in\hat{\mathrm{H}}(\Omega)\qquad \left(\|\Pi\|+\|\psi\|\neq 0\right)$$

будем называть собственным вектором задачи (1) - (7), отвечающим характеристическому числу (х. ч.) γ_0, если при $\gamma=\gamma_0$ выполнено вариационное соотношение

$$\int_\Omega\left(\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2}\nabla\Pi\nabla\bar{u}+\frac{1}{\tilde{k}^2}\nabla\psi\nabla\bar{v}\right)dx-\int_\Omega\left(\varepsilon\Pi\bar{u}+\psi\bar{v}\right)dx-$$
$$-\gamma\left[\frac{1}{\tilde{k}^2}\right]\int_\Gamma\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\bar{v}-\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\bar{u}\right)d\tau=0 \qquad (8)$$

для любых $u\in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $v\in\hat{\mathrm{H}}^1(\Omega)$.

Задача о нормальных волнах сводится к эквивалентной задаче о спектре пучка 4-го порядка. Вариационное соотношение (8) определяет в пространстве $\mathrm{H}=\mathrm{H}_0^1(\Omega)\times\hat{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ операторный пучок

$$L(\gamma)=\gamma^4K+\gamma^2\left(A_1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)K\right)+\gamma(\varepsilon_1-\varepsilon_2)S+\varepsilon_1\varepsilon_2(K-A_2)\ :\mathrm{H}\to\mathrm{H},$$

характеристические числа и собственные векторы которого совпадают с характеристическим числами и собственными векторами задачи (1)-(7).

Все операторы пучка ограничены.

Утверждение 1. Операторы A_1, A_2 положительно определены:

$$I\le A_1\le\varepsilon_{\max}I,\ \varepsilon_{\max}^{-1}I\le A_2\le I,$$

где $\varepsilon_{\max}=\max(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, I – единичный оператор в H.

Утверждение 2. Оператор S самосопряжен, S=S^* и $-\frac{1}{2}I\le S\le\frac{1}{2}I.$

Утверждение 3. Оператор K > 0 компактный. Для его собственных чисел верна асимптотика

$$\lambda_n(K)=0\left(n^{-1}\right),\ n\to\infty.$$

Свойства спектра пучка $L(\gamma)$ описываются следующими теоремами.

Теорема 1. Спектр пучка *L(γ)* лежит в полосе

$$\Pi_l = \{\gamma : |\mathrm{Re}\ \ \gamma\ | \le l\},\ \sigma(L) \subset \Pi_l$$

для некоторого $l > 0$.

Теорема 2. Спектр пучка *L(γ)* симметричен относительно действительной и мнимой оси

$$\sigma(L) = \overline{\sigma(L)} = -\sigma(L).$$

Теорема 3. Пусть $\delta = \dfrac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{2}$,

$$I_0 = \left\{\gamma : \mathrm{Im}\ \ \gamma = 0,\ \left(\left(\delta^2 + 4\varepsilon_{\min}\right)^{1/2} - \delta\right)/2 \le |\gamma| \le \left(\left(\delta^2 + 4\varepsilon_{\max}\right)^{1/2} + \delta\right)\right\}.$$

В области $\mathbf{C} \backslash I_0$ спектр пучка σ(L) состоит из изолированного множества х. ч. конечной алгебраической кратности. Точки $\gamma_j = \pm\sqrt{\varepsilon_i}\ \ i = (1,2)$ являются точками вырождения пучка L(γ): $dim\ \ Ker\ \ L(\gamma_j) = \infty$.

На практике обычно интересуются вещественными или чисто мнимыми точками спектра *σ(L)*, которые физически соответствуют распространяющимся и затухающим волнам. Однако известно, что могут существовать и «комплексные» волны, $\gamma_0 \in \sigma(L),\ \gamma_0' \cdot \gamma_0'' \ne 0\ \ (\gamma_0 = \gamma_0' + i\gamma_0'')$, поэтому в общем случае в Теореме 1 полосу Π_l нельзя заменить множеством $\Pi_0 = \{\gamma : \mathrm{Re}\gamma \cdot \mathrm{Im}\gamma = 0\}$.

«Комплексные» волны возникают «четверками», как следует из Теоремы 2. При однородном заполнении волновода $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ «комплексные» волны отсутствуют.

Из Теоремы 3 не следует, что точки спектра (за исключением $\gamma_j = \pm\sqrt{\varepsilon_i}$) действительно существуют. Доказательство существования счетного множества х. ч. с точкой накопления в бесконечности для пучка *L(γ)* опирается на технику оценки резольвенты пучка и принцип Фрагмена - Линделефа.

Теорема 4. В области $\mathbf{C}\backslash I_0$ спектр пучка $L(\gamma)$ представляет собой бесконечное (счетное) множество х. ч. конечной алгебраической кратности с точкой накопления в бесконечности.

Рассмотрим вопросы полноты системы собственных и присоединенных векторов пучка L(γ). Имеют место три теоремы. В первой из них никаких ограничений на параметры задачи не накладывается, но устанавливается двукратная полнота по Келдышу лишь с конечным дефектом; во второй и третьей - утверждается двукратная полнота собственных и присоединенных векторов пучка L(γ) в H × H, но предполагается, что либо параметр δ достаточно мал, либо выполняются условия (10) - (11).

Теорема 5. Система собственных и присоединенных векторов пучка L(γ), отвечающих характеристическим числам из множества $|\gamma|\geq\eta$, $\eta\geq 0$– произвольное неотрицательное число, двукратно полна по Келдышу с конечным дефектом в H × H.

Теорема 6. Пусть фиксировано произвольное число $\hat{\varepsilon} > 1$ и область Ω. Тогда найдется такое $\delta_0 = \delta_0(\hat{\varepsilon}, \Omega)$, что при любых $\varepsilon_j \geq 1$, $\varepsilon_j \leq \hat{\varepsilon}$, для которых $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| < \delta_0$, система всех собственных и присоединенных векторов пучка L(γ), отвечающих характеристическим числам $\gamma_n \neq \pm\sqrt{\varepsilon_i}$, $i = 1,2$, двукратно полна в H × H.

В точках $\gamma_n \neq \pm\sqrt{\varepsilon_i}$ нарушается эквивалентность перехода от системы уравнений Максвелла к задаче для операторного пучка $L(\gamma)$, поэтому эти точки исключаются из рассмотрения в Теоремах 6, 7 (и могут быть исключены выбором η в Теореме 5).

Теорема 7. Система с. п. в. пучка $L(\gamma)$, отвечающих х. ч. $\gamma_n \neq \pm\sqrt{\varepsilon_i}$, двукратно полна в H × H, если

$$\varepsilon_{\max} < 9\varepsilon_{\min} \qquad (10)$$

и

$$\iint_{\Omega}\left(\varepsilon|\Pi|^2+|\psi|^2\right)dx \le \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(|\nabla\Pi|^2+\frac{1}{\varepsilon}|\nabla\psi|^2\right)\,dx,\ \forall(\Pi,\psi)^T \in \mathrm{H}. \qquad (11)$$

Рассмотрим свойства системы собственных и присоединенных волн волноведущих структур, описанных выше. Это свойства полноты, базисности, а также ортогональности для системы собственных и присоединенных волн. Этими свойствами интересуются главным образом при решении задач возбуждения волноведущей структуры каким-либо источником, поскольку практически все схемы решения таких задач используют перечисленные свойства.

Можно дать определение собственных и присоединенных волн структуры с помощью собственных и присоединенных векторов пучка L(γ) и показать, что такое определение эквивалентно обычному определению, которое дается на основе решения системы уравнений Максвелла. Ценность такого определения заключается в том, что собственные и присоединенные волны строятся только с помощью продольных компонент Π_p, ψ_p, что позволяет в дальнейшем ограничиться изучением пучка L(γ).

Имеет место основная теорема о полноте системы поперечных компонент собственных и присоединенных волн в $L_2^4(\Omega)$. Наиболее важным является тот факт, что именно двукратная полнота (по Келдышу) системы собственных присоединенных векторов пучка L(γ) в H × H влечет полноту (в обычном смысле) системы поперечных компонент в $L_2^4(\Omega)$. Эта теорема позволяет применить достаточные признаки двукратной полноты системы с. п. в. пучка L(γ) для анализа вопроса о полноте системы поперечных компонент собственных и присоединенных волн.

Обозначим через $L_2^4(\Omega)$ декартово произведение четырех экземпляров пространства $L_2(\Omega)$. Пусть также $V_n^{(p)} := \left(\mathrm{E}_{n,t}^{(p)},\ \mathrm{H}_{n,t}^{p}\right)^T$ – поперечные компоненты собственных и присоединенных волн, отвечающих х. ч. γ_n; $p = 0,1,\ldots,m_n$. Через A обозначим множество индексов, которое пробегает n, $n \in \mathrm{A}$. Считаем, что различные собственные векторы $\varphi_0^{(n)}$ имеют разные индексы n, поэтому допускается случай $\gamma_n = \gamma_m$ при $n \ne m$.

Теорема 8. Пусть, $\varepsilon_1 \ne \varepsilon_2$. Если система с. п. в. $\left\{\varphi_p^{(n)}\right\}$ $(p = 0,1,2,\ldots,m_n)$ пучка $L(\gamma)$, отвечающих х. ч. γ_n, $n \in \mathrm{A}$, двукратно полна в H × H, то система вектор-функций $\left\{V_n^{(p)}\right\}$, $n \in \mathrm{A}$, $p = 0,1,2,\ldots,m_n$ полна в $L_2^4(\Omega)$.

Установим некоторые соотношения ортогональности для поперечных компонент собственных и присоединенных волн.

Пусть $V_n^{(p)};\ W_n^{(p)} := \left(\overline{\mathrm{H}}_{n,t}^{(p)} \times e_3;\ e_3 \times \overline{\mathrm{E}}_{n,t}^{(p)}\right)^T$, - поперечные компоненты собственной (p = 0) или присоединенной (p ≥ 1) волны и, соответственно, «сопряженной» волны, отвечающей х.ч. γ_n. Скобками <.,.> обозначено скалярное произведение $L_2^4(\Omega)$.

Справедлива следующая основная формула

$$(\gamma_n - \gamma_m)\left\langle V_n^{(p)},\ W_m^{(q)}\right\rangle = \left\langle V_n^{(p)},\ W_m^{(q-1)}\right\rangle - \left\langle V_n^{(p-1)},\ W_m^{(q)}\right\rangle,\ p \geq 0,\ q \geq 0, \quad (12)$$

где $V_n^{(p)} = 0,\ W_m^{(q)} = 0$ при $p < 0,\ q < 0$.

Свойства ортогональности позволяют построить биортогональную систему в $L_2^4(\Omega)$ к системе поперечных компонент собственных и присоединенных волн.

Теорема 9. Пусть $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, система с. п. в. $\left\{\varphi_p^{(n)}\right\}$ $(p = 0,1,2,\ldots,m_n)$ пучка $L(\gamma)$, отвечающих х. ч. γ_n, $n \in \mathrm{A}$, двукратно полна в H×H. Тогда система вектор-функций $\left\{V_p^{(n)}\right\}$, $n \in \mathrm{A}$, $(p = 0,1,\ldots,m_n)$ полна и минимальна в $L_2^4(\Omega)$, и существует единственная биортогональная к ней система.

Рассмотрим вопрос о базисности системы поперечных компонент собственных и присоединенных волн структуры. Следующая теорема показывает отсутствие, в общем случае, свойства базисности системы $\left\{V_n^{(p)}\right\}$ для данного круга задач.

Теорема 10. Пусть $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, спектр пучка L(γ) содержит бесконечное множество изолированных х. ч. γ_n кратности 1 , $n \in \tilde{\mathrm{A}}$ и $\gamma_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда система вектор-функций $\left\{V_n^{(p)}\right\}$, построенная по системе с. п. в. $\left\{\varphi_p^{(n)}\right\}$ $(p = 0,1,\ldots,m_n)$ пучка L(γ), отвечающих х. ч. γ_n, $n \in \mathrm{A}$, $\tilde{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A}$,, не является базисом в $L_2^4(\Omega)$,.

Основные результаты опубликованы в работах [1-6].

Литература

1. Смирнов Ю.Г. О полноте системы собственных и присоединенных волн частично заполненного волновода с нерегулярной границей.//ДАН СССР, 1987, т.297, N-4, с.829-832.

2. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Вариационный метод в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода с нерегулярной границей.//В кн.: Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1988. с. 127-137.

3. Смирнов Ю.Г, Применение метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода. //ДАН СССР, 1990, т.312, N-3, с.597-599.

4. Shestopalov Yu. V., Smirnov Yu.G. Method of Operator Pencils in the Boundary Transmission Problems for the Systems of Helmholtz Equations.// International Seminar «Mathematical methods in Electromagnetic Theory. April 12-20, 1990. Gurzuf, Kharkov, p. 148-162.

5. Смирнов Ю.Г. Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений. //Дифференциальные уравнения, 1991. т.27, N-1, с.140-147.

6. Shestopalov Yu.V., Smirnov Yu.G. and Chernokozhin E.V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics. VSP, the Netherlands, Utrecht, 2000.