5. Свойства логарифмов

Рассмотрим уравнение вида

$$a^x = b, \tag{1}$$

где a и b известные числа, а x – искомая величина. Известно, что при $a > 0$ и $a \neq 1$, показательная функция $y = a^x$ является строго монотонной и принимает все возможные значения в интервале $(0, \infty)$. Следовательно, при условиях

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \tag{2}$$

уравнение (1) имеет ровно один корень, который называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$.

Теперь дадим строгое определение этого понятия.

Определение. *Пусть выполняются условия (2). Логарифмом числа b по основанию a называют такое число c, что $a^c = b$, и пишут $c = \log_a b$.*

Подставляя вместо числа c его обозначение, получим из определения логарифма следующее равенство

$$a^{\log_a b} = b, \tag{3}$$

которое называют *основным логарифмическим тождеством.*

Из определения логарифма сразу следует, что $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$ для любого допустимого основания a. Приведем простые примеры: $\log_3 9 = 2, \log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}, \log_2 2^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Сформулируем и докажем основные свойства логарифмов.

Логарифм произведения и частного.

Теорема 1 . *Пусть выполняются условия (2) и $c > 0$ (то есть существуют числа $\log_a b$ и $\log_a c$). Тогда существуют числа $\log_a bc$ и $\log_a \frac{b}{c}$ и справедливы равенства*

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c, \tag{4}$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c. \tag{5}$$

Доказательство. Отметим, что числа $\log_a bc$ и $\log_a \frac{b}{c}$ существуют, поскольку $a > 0, a \neq 1$ и $bc > 0$ и $\frac{b}{c} > 0$.

Применяя (трижды) основное логарифмическое тождество (3) и используя свойства показательной функции, получим

$$a^{\log_a bc} = bc = a^{\log_a b} a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c},$$

так как из равенства $a^x = a^y$ следует $x = y$, то получаем равенство (4) (мы использовали свойство строгой монотонности показательной функции).

Аналогично,

$$a^{\log_a \frac{b}{c}} = \frac{b}{c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = a^{\log_a b - \log_a c},$$

откуда следует равенство (5). *Теорема доказана.*

Замечание. Левые части равенств (4) и (5) определены и в случае, когда оба числа b и c отрицательны (так как в этом случае $bc > 0$ и $\frac{b}{c} > 0$). Правые части этих равенств в этом случае не определены. Для того чтобы установить аналогичные свойства и в этом случае, заметим, что $bc = |bc| = |b| \cdot |c|$ и равенства (4), (5) следует переписать следующим образом:

$$\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|, \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|.$$

В полученных равенствах b и c могут быть любыми действительными числами одного знака.

Логарифм степени.

Теорема 2 . *Пусть выполняются условия (2) (то есть существует число $\log_a b$). Тогда для любого действительного числа c существует число $\log_a(b^c)$ и справедливо равенство*

$$\log_a(b^c) = c \log_a b. \tag{6}$$

Доказательство. Так как положительное число b в любой степени положительно, то $\log_a(b^c)$ существует. Справедливость равенства (6) следует из цепочки равенств

$$a^{\log_a(b^c)} = b^c = (a^{\log_a b})^c = a^{c \log_a b}.$$

Теорема доказана.

Замечание. В случае, если c – четное число, то левая часть равенства (6) определена и при $b < 0$ (так как в этом случае $b^c > 0$). Правая часть (6) в этом случае не определена. Для того чтобы установить аналогичное свойство и в этом случае, заметим, что $b^c = |b|^c$ и равенство (6) следует переписать следующим образом:

$$\log_a(b^c) = \log_a |b|^c = c \log_a |b|.$$

В полученном равенстве b может быть любым действительным числом, отличным от нуля.

Рассмотрим также случай, когда основание логарифма является степенью некоторого числа.

Теорема 3 . *Пусть выполняются условия (2) (то есть существует число $\log_a b$). Тогда для любого действительного числа c, отличного от нуля, существует число $\log_{(a^c)} b$ и справедливо равенство*

$$\log_{(a^c)} b = \frac{1}{c} \log_a b. \tag{7}$$

Доказательство. Так как положительное число a в любой степени положительно, а из условий $a \neq 1$ и $c \neq 0$ следует, что $a^c \neq 1$, то $\log_{(a^c)} b$ существует. Справедливость равенства (7) следует из цепочки равенств

$$(a^c)^{\log_{(a^c)} b} = a^{c \log_{(a^c)} b} = b = a^{\log_a b}.$$

Теорема доказана.

Из соотношений (6), (7) вытекает справедливость следующего равенства:

$$\log_a b = \log_{(a^c)} (b^c),$$

где c любое действительное число, отличное от нуля, то есть число и основание логарифма можно возвести в одну и ту же степень.

Формула перехода к новому основанию.

Теорема 4 . *Пусть выполняются условия (2) (то есть существует число $\log_a b$). Тогда для любого действительного числа c такого, что $c > 0, c \neq 1$, существуют числа $\log_c b$ и $\log_c a$ и справедливо равенство*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \tag{8}$$

Доказательство. Существование чисел $\log_c b$ и $\log_c a$ следует из того, что числа a, b, c положительны и $c \neq 1$. Отметим, что $\log_c a \neq 0$, так как число $a \neq 1$. Поэтому дробь в правой части (8) существует и достаточно доказать равенство

$$(\log_c a)(\log_a b) = \log_c b.$$

Справедливость последнего следует из цепочки равенств:

$$c^{\log_c b} = b = a^{\log_a b} = (c^{\log_c a})^{\log_a b} = c^{\log_c a \cdot \log_a b}.$$

Теорема доказана.

Определение знака логарифма.

Теорема 5 . *Если число и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, то логарифм положителен. Если по разные стороны, то логарифм отрицателен.*

Доказательство. Пусть выполняются условия (2) – существует логарифм $\log_a b$, и пусть $a > 1$, $b > 1$. Запишем основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b. \tag{3}$$

Если $\log_a b < 0$, то левая часть равенства (3) меньше единицы, а правая часть – больше единицы и равенство неверно. Если $\log_a b = 0$, то левая часть равенства (3) равна 1, а правая часть – больше единицы, равенство невозможно. Следовательно, $\log_a b > 0$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. *Теорема доказана.*

Сравнение логарифмов. Логарифмирование неравенства.

Теорема 6 . *Если основание логарифма больше единицы, то большему числу отвечает больший логарифм, т.е. если $a > 1$ и $b > c > 0$, то $\log_a b > \log_a c$. Если основание логарифма меньше единицы, то большему числу отвечает меньший логарифм, т.е. из $0 < a < 1$ и $b > c > 0$ следует $\log_a b < \log_a c$.*

Доказательство. Воспользуемся свойством монотонности показательной функции: при $a > 1$ функция a^x возрастает, при $0 < a < 1$ функция a^x убывает. Рассмотрим случай $a > 1$. Используя основное логарифмическое неравенство и соотношение между b и c, получим

$$a^{\log_a b} = b > c = a^{\log_a c},$$

откуда следует, что $\log_a b > \log_a c$. Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично. *Теорема доказана.*