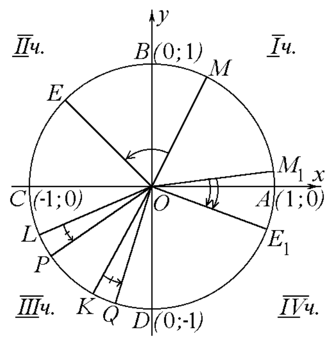
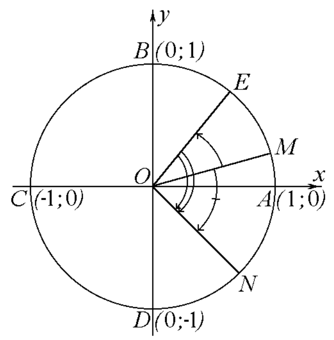
2. Тригонометрия

Вводная часть



$\angle(OL;OP) = \angle(OK;OQ)$

рис. 2.1 а



$\angle MON =$
$= \angle(OM;ON) = \angle(OM;OE) + \angle(OE;ON)$

рис. 2.1 б

Перед рассмотрением вопросов тригонометрии следует напомнить об измерении углов с вершинами в начале координат, стороны такого угла будут пересекать окружность с центром в начале координат в некоторых точках M и E , поэтому его можно обозначить $\angle(OM;OE)$ или $\angle MOE$.

При этом имеет значение порядок лучей, образующих этот угол, OM и OE.

$\angle(OM;OE)$ можно описать (не определить* [1]) как получающийся в результате вращения вокруг начала координат луча с началом в точке O от положения OM — начального до положения OE — конечного. Это вращение может происходить или против часовой стрелки (в этом случае можно сказать, что угол *ориентирован против часовой стрелки*) или по часовой стрелке (в этом случае можно сказать, что угол *ориентирован по часовой стрелке)* см. рис. 2.1 а, б, причем

а) либо на неполный оборот,

б) либо на целое число полных оборотов, в частности, движения может и не происходить (в этих случаях точки M и E совпадают, когда движения не происходит угол называют *нулевым*, его ориентация считается неопределенной),

в) либо на целое число полных оборотов и неполный оборот.

Дадим описание понятия *равных* углов** [2] : если при совмещении каким-либо образом их начальных лучей совместятся и конечные лучи, причем движение от начального луча к конечному осуществляется в одну и ту же

[1] *Определить такой угол в принципе можно, но мы это опустим.

[2] **Определить это равенство в принципе можно, но мы это опустим.

сторону (то есть либо у обоих углов против часовой стрелки, либо у обоих углов по часовой стрелке) на одно и то же количество полных и неполных оборотов вокруг точки O. Нулевые углы считаются равными.

Суммой двух углов называется угол, у которого начальный луч совпадает с начальным лучом первого слагаемого угла, а конечный луч совпадает с конечным лучом второго слагаемого угла, при этом предполагается, что данные углы приведены в такое положение (то есть, если необходимо, то они заменены на равные себе), что конечный луч первого слагаемого угла совпадает с начальным лучом второго слагаемого угла.

См. на рис. 2.1 а и 2.1 б иллюстрацию равных углов и суммы углов.

Величиной или *мерой* угла ($\angle MOE$) называется поставленное ему в соответствие действительное число, обозначаемое $\measuredangle MOE$ или $\widehat{MOE}$, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1) существует угол, мера которого равна 1 (единице) —
единица измерения углов ;

2) равные углы имеют равные меры ;

3) мера суммы двух углов равна сумме мер углов ;

4) мера нулевого угла равна нулю.

Исходя из условий 3) и 4), если сумма двух углов равна нулевому углу (а это возникает, если второй из этих углов получается из первого в результате перемены мест начального и конечного лучей), то меры этих углов будут равны по абсолютной величине и различаться лишь знаком (при условии, что каждый из этих углов ненулевой). Очевидно, что эти углы будут иметь противоположную друг другу ориентацию: один — против часовой стрелки, другой — по часовой стрелке.

Меры углов, ориентированных против часовой стрелки (по часовой стрелке), считаются положительными (отрицательными).

Наиболее распространенные меры углов — градусная и радианная. Единицей измерения углов в градусной мере является угол величиной в один градус — $1/90$ часть прямого угла, а единицей измерения углов в радианной мере является угол величиной в один радиан — это такой центральный угол, который опирается на дугу (или стягивает дугу) окружности, по длине равную ее радиусу.

Приведем формулы зависимости между градусной и радианной мерами угла, обозначая μ° и μ_r соответственно градусную и радианную меры,

$$\mu^\circ = \frac{\mu_r}{\pi}180^\circ \ ; \ \mu_r = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}\pi.$$

Всюду в дальнейшем будет в основном использоваться радианная мера угла, которую в виду ее тесной связи с длиной дуги окружности можно отождествлять с числовой мерой угла (или просто с числом).

Ниже будет доказано, что в качестве окружности с центром в начале координат можно будет брать окружность единичного радиуса. Пока мы будем рассматривать окружность с центром в начале координат радиуса $R > 0$, обозначая точки ее пересечения с координатными осями

$$A(R;0), \quad B(0;R), \quad C(-R;0), \quad D(0;-R).$$

В качестве начального луча у рассматриваемых углов будет браться луч OA.

Координатные оси абсцисс и ординат взаимно перпендикулярны и разбивают координатную плоскость на четыре координатные четверти:

I четверть, II четверть, III четверть, IV четверть (см. рис. 2.1 а).

Будем говорить, что $\angle AOM$ или $\angle(OA;OM)$ *оканчивается в данной четверти* или *на данной координатной оси* или *полуоси*, если луч OM соответственно расположен в этой четверти, или на указанной координатной оси, или совпадает с указанной координатной полуосью.

В школьном курсе без доказательства принимаются факты: взаимно однозначного соответствия между действительными числами из полуинтервала $[0, 4\omega)$ и точками окружности с центром в начале координат радиуса $R > 0$, число $\omega > 0$ — мера прямого угла, ориентированного против часовой стрелки (если берется радианная мера угла, то $\omega = \pi/2$, а если — градусная мера, то $\omega = 90°$), $\quad \alpha_0 \longleftrightarrow M$ — $M(x;y),\ 0 \leqslant \alpha_0 < 4\omega$, а уже точке M соответствует бесконечно много углов $\angle AOM$, меры которых имеют вид: $4\omega k+\alpha_0,\ k = 0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$ (α_0 — однозначно определенное по точке M число $\in [0, 4\omega)$), и только таких углов.

На основе этих фактов и из соотношений между углами и их мерами, которые изучаются в курсе элементарной геометрии, вытекают следующие диапазоны изменения *радианных* мер углов α :

оканчивающихся в I четверти $2n\pi < \alpha < \pi/2 + 2n\pi$;

оканчивающихся во II четверти $\pi/2 + 2n\pi < \alpha < \pi + 2n\pi$;

оканчивающихся в III четверти $-\pi + 2n\pi < \alpha < -\pi/2 + 2n\pi$;

оканчивающихся в IV четверти $-\pi/2 + 2n\pi < \alpha < 2n\pi$;

оканчивающихся на полуоси OA $\quad 2n\pi$;

оканчивающихся на полуоси OB $\quad \pi/2 + 2n\pi$;

оканчивающихся на полуоси OC $\quad \pi + 2n\pi$;

оканчивающихся на полуоси OD $\quad -\pi/2 + 2n\pi$;

оканчивающихся на оси абсцисс $\quad n\pi$;

оканчивающихся на оси ординат $\quad \pi/2 + n\pi$;

везде $n = 0$; ±1 ; ±2 ; $\ldots$.

Докажем несколько важных утверждений, касающихся свойств периодических функций. На их основе дается строгое обоснование множеств решений простейших тригонометрических уравнений, в значительной мере упрощается исследование промежутков строгой монотонности тригонометрических функций. Также устанавливаются множества всех периодов периодической функции и их основные периоды.

Пусть $X \subseteq D[f]$ и множество $X + a_0$ представляет собой множество чисел, равных $x + a_0$, где x — произвольное число из множества X, a_0 — фиксированное действительное число.

Если область определения функции представляет собой объединение множеств $\quad X \cup X + a_0 \cup X - a_0 \cup X + 2a_0 \cup X - 2a_0 \cup \dots \quad ,$ (1)

то символически это можно записать следующим образом:

$$D[f] \;=\; \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} X + na_0 \;=\; \bigcup_{n \in Z} X + na_0 \ . \tag{2}$$

Пусть множество X представляет собой или отрезок $[c, d]$, или один из полуинтервалов $[c, d)$ или $(c, d]$, или интервал (c, d), причем каждое из чисел c и d конечно.

Если функция $f(x)$ является периодической с периодом $T = d - c$, и определена на множестве X, то она будет определена и на множестве

$$\bigcup_{n \in Z} X + nT. \tag{3}$$

В случае, когда множество X является отрезком или полуинтервалом, указанное объединение является множеством всех действительных чисел R — промежутком $(-\infty, +\infty)$.

Утверждение 1. Пусть уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение $x = x_0$ на множестве X, функция $y = f(x)$ определена на множестве X и является периодической с периодом T, тогда при любом целом значении n $\;x = x_0 + nT$ является единственным решением этого уравнения на множестве $X + nT$.

Доказательство. По определению решения уравнения должно выполняться равенство $f(x_0) = a$. В силу периодичности функции $f(x)$ при любом целом значении n $\;f(x_0 + nT) = f(x_0) = a$, а это означает, что число $x_0 + nT$, которое принадлежит множеству $X + nT$, является решением уравнения $f(x) = a$. Предположим, что при некотором целом значении n' существует на множестве $X + n'T$ еще решение рассматриваемого уравнения $x' \neq x_0 + n'T$. Тогда $x' = x'_0 + n'T$, где $x'_0 \neq x_0$ и $x'_0 \in X$. Так как $f(x') = a$, то в силу периодичности функции $f(x)$ имеют место равенства $f(x') = f(x'_0 + n'T) = f(x'_0) = a$. Это означает, что на множестве X существует отличное от x_0 решение уравнения $f(x) = a$, $\;x = x'_0$. Получили противоречие с единственностью решения этого уравнения на множестве X, которое полностью доказывает утверждение.

Следствие. Множеством всех решений решений уравнения $f(x) = a$ являются следующие значения x и только они: $x = x_0+nT,\ \ n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \dots$. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что, предполагая существование решения этого уравнения $\tilde{x} \neq x = x_0 + nT\ \forall n \in Z$, мы получим, что $\tilde{x} \in D[f]$. В силу представления (2) $D[f]$ (при $a_0 = T$) получим, что $\exists\ \tilde{n} \in Z:\ \ \tilde{x} \in X + \tilde{n}T,\ \ f(\tilde{x}) = a$, тем самым, получая на множестве $X + \tilde{n}T$ по крайней мере еще одно решение уравнения $f(x) = a$, отличное от решения $x_0+\tilde{n}T$. Пришли к противоречию с доказанным в утверждении 1, которое и доказывает справедливость утверждения этого следствия.

Утверждение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, является периодической с периодом T и возрастает (убывает) на этом множестве, тогда при любом целом значении n эта функция также возрастает (убывает) на множестве $X + nT$.

Доказательство. Фиксируем произвольные $x_2 > x_1$ из множества $X + nT$, тогда $x'_2 = x_2 - nT > x_1 - nT = x'_1$ и $x_1,\ x'_2 \in X$. В силу периодичности функции $f(x)$ и ее возрастания (убывания) на множестве X получаем, что

$$f(x_2) = f(x_2 - nT) = f(x'_2) > (<) f(x'_1) = f(x_1 - nT) = f(x_1).$$

Это и означает возрастание (убывание) функции на множестве $X + nT$. Утверждение 2 доказано.

Подобным образом формулируются и доказываются аналогичные утверждения применительно к неубывающей (невозрастающей) на множестве X периодической функции.

Утверждение 3. Пусть T_0 — основной период периодической функции $y = f(x)$, определенной на множестве X. Тогда числа вида nT_0, где $n = \pm 1;\ \pm 2;\ \ \dots\ \ ;$ и только они являются периодами этой функции.

Доказательство. Предположим, что существует некоторое число $T' \neq nT_0\ \forall n \in Z$, являющееся периодом этой функции. В силу свойств действительных чисел T' можно представить в виде $T' = n'T_0 + t$, где $0 < t < T_0,\ n' \in Z$. Если для некоторого $x \in X\ \ x + T' \notin D[f]$, то нарушается условие 1) в определении периодичности функции и потому число T' не является периодом функции. Если же это условие 1) для всех $x \in D[f]$ применительно к T' выполнено, то в силу периодичности функции с периодами $nT_0\ \ \forall n \in Z$ следует, что из $x + T' \in D[f]$ вытекает $x + t \in D[f]$. Поэтому $\forall x \in D[f] \Rightarrow f(x) = f(x + T') = f(x + t + nT_0) = f(x + t)$, а это означает, что число t является периодом функции. Пришли к противоречию с тем, что T_0 — ее основной период, которое завершает доказательство этого утверждения.

Утверждение 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, является периодической с периодом T, множество X представляет собой отрезок $[c,d]$, $T=d-c$ и функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[c,(c+d)/2]$, а также она убывает (возрастает) на отрезке $[(c+d)/2,d]$, тогда число T является ее основным периодом.

Доказательство. В силу периодичности функции с периодом $T=d-c \Rightarrow$ $\Rightarrow f(c)=f[c+(d-c)]=f(d)$, а потому в силу условий строгой монотонности функции $f(x)$ на соответствующих отрезках мы имеем:

$$\forall x \in \left(c,\frac{c+d}{2}\right] \Rightarrow f(c)<(>)f(x);\ \forall x \in \left[\frac{c+d}{2},d\right) \Rightarrow f(c)=f(d)<(>)f(x).$$

Следовательно, $\forall\ x \in (c,d) \Rightarrow f(c)<(>)f(x)$. Поэтому, предполагая существование числа t такого, что $0<t<T=d-c$, являющегося периодом функции $f(x)$, мы получаем, в частности, выполнение равенства $f(c)=f(c+t)$, но так как $c<c+t<c+(d-c)=d$, то $c+t \in (c,d)$. Получили противоречие, которое и доказывает данное утверждение.

Утверждение 5. Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X, является периодической с периодом T, множество X представляет собой интервал (c,d), $T=d-c$ и функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (c,d), тогда число T является ее основным периодом.

Доказательство. Предположим, что существует число t, такое, что $0<t<T=d-c$, также являющееся периодом функции $f(x)$. Тогда, в частности, при любом $x \in D[f]$ должно выполняться равенство $f(x)=f(x+t)$. Положим $x=d-t$, тогда $x \in (c,d)$. Если $f(d)=f(x+t)$ не определено, то для этого значения x равенство $f(x)=f(x+t)$ невозможно, получили противоречие. Если же значение $f(d)$ определено и случайно окажется, что $f(d-t)=f(d)$, то положим $x=\dfrac{c+d}{2}-\dfrac{t}{2}$, тогда $x+t=\dfrac{c+d}{2}+\dfrac{t}{2}$. В силу положительности числа t, а также того, что $t/2<(d-c)/2$ имеют место следующие неравенства:

$$\frac{c+d}{2}>x>\frac{c+d}{2}-\frac{d-c}{2}=c \quad \text{и} \quad \frac{c+d}{2}<x+t<\frac{c+d}{2}+\frac{d-c}{2}=d.$$

Следовательно, числа x и $x+t$ принадлежат интервалу (c,d), поэтому значения $f(x)$ и $f(x+t)$ определены. В силу того, что $x<x+t$, а также возрастания (убывания) функции $f(x)$ на интервале (c,d) вытекает неравенство $f(x+t)>(<)f(x)$. Таким образом, равенство $f(x+t)=f(x)$ не выполняется. Пришли к противоречию, которое полностью доказывает это утверждение.

Сформулируем определения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ с помощью окружности с центром в начале координат радиуса $R>0$, где α — мера угла AOM с началом — лучом OA, A — $A(R;0)$ и концом — лучом OM, M — $M(x;y)$ точка указанной окружности (см. ниже рис. 2.2 а),

$$\sin\alpha \overset{def}{=} \frac{y}{R}\ ;\ \cos\alpha \overset{def}{=} \frac{x}{R}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\,\alpha \overset{def}{=} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)\ ;\ \operatorname{ctg}\,\alpha \overset{def}{=} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0)\ .$$

$\operatorname{tg}\,\alpha$ не определен при $\cos\alpha = 0$; $\operatorname{ctg}\,\alpha$ не определен при $\sin\alpha = 0$.

Докажем утверждение о том, что определенные таким образом тригонометрические функции являются функциями *только величины угла* α, и никак не зависят от радиуса окружности $R > 0$.

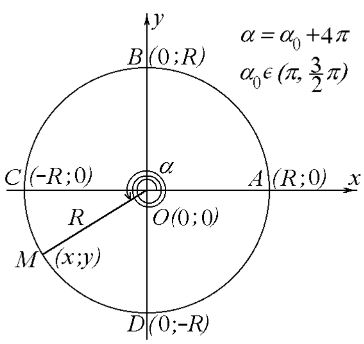


рис. 2.2 а

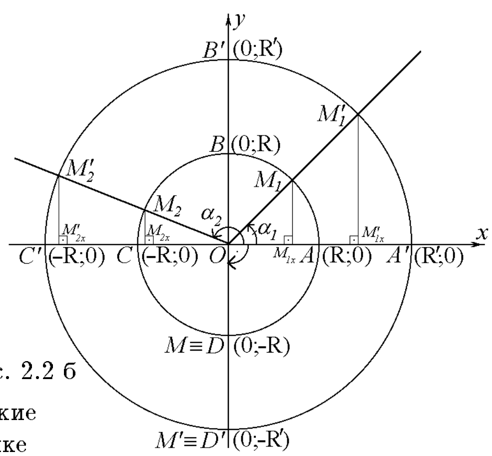


рис. 2.2 б

Рассмотрим две концентрические окружности, центр которых в точке $O(0;0)$ и радиусы равны R и R' соответственно. Если, например, $\angle(OA;OM)$ оканчивается на отрицательной полуоси ординат, то точка $M(x;y) \equiv D(0;-R)$, а принадлежащая тому же лучу OM с той же начальной точкой O точка $M'(x';y') \equiv D'(0;-R')$, тогда $y : R = -R : R = -R' : R' = y' : R' = -1$, $x : R = 0 : R = 0 : R' = x' : R' = 0$, следовательно, $\sin(\widehat{OA;OM}) = -1$, $\cos(\widehat{OA;OM}) = 0$, то есть не зависят от радиуса окружности. Аналогично рассматриваются случаи, когда $\angle(OA;OM)$ оканчивается на других координатных полуосях.

Если $\angle(OA;OM_1)$ оканчивается в первой четверти, $(\widehat{OA;OM_1}) = \alpha_1$ (см. рис. 2.2 б), то поскольку первая координатная четверть — пересечение верхней относительно оси абсцисс полуплоскости и правой относительно оси ординат полуплоскости, то все точки луча OM_1 (в частности, точки M_1 и M_1') будут расположены в этой же четверти, а потому знаки абсцисс и ординат точек M_1 и M_1' будут совпадать (в первой четверти координаты точек положительны), $M_1(x;y)$ и $M_1'(x';y')$ — точки пересечения луча

OM_1 и окружностей радиусов R и R' * [3] соответственно; прямоугольные треугольники $OM_{1x}M_1$ и $OM'_{1x}M'_1$, как имеющие общий острый угол, подобны, следовательно,

$$\frac{|M_{1x}M_1|}{|OM_1|}=\frac{|M'_{1x}M'_1|}{|OM'_1|} \Leftrightarrow \frac{|y_1|}{R}=\frac{|y'_1|}{R'} \Leftrightarrow \frac{y_1}{R}=\frac{y'_1}{R'} \stackrel{def}{=} \sin\alpha_1,$$
$$\frac{|OM_{1x}|}{|OM_1|}=\frac{|OM'_{1x}|}{|OM'_1|} \Leftrightarrow \frac{|x_1|}{R}=\frac{|x'_1|}{R'} \Leftrightarrow \frac{x_1}{R}=\frac{x'_1}{R'} \stackrel{def}{=} \cos\alpha_1.$$

Аналогично, если $\angle(OA;OM_2)$ оканчивается во второй четверти, $(\widehat{OA;OM_2})=\alpha_2$ (см. рис. 2.2 б), то поскольку вторая координатная четверть — пересечение верхней относительно оси абсцисс полуплоскости и левой относительно оси ординат полуплоскости, то все точки луча OM_2 (в частности, точки M_2 и M'_2) будут расположены в этой же четверти, а потому знаки абсцисс и ординат точек M_2 и M'_2 будут совпадать (во второй четверти ординаты точек положительны, а абсциссы — отрицательны), $M_2(x;y)$ и $M'_2(x';y')$ — точки пересечения луча OM_2 и окружностей радиусов R и R' соответственно; прямоугольные треугольники $OM_{2x}M_2$ и $OM'_{2x}M'_2$ как имеющие общий острый угол подобны, следовательно,

$$\frac{|M_{2x}M_2|}{|OM_2|}=\frac{|M'_{2x}M'_2|}{|OM'_2|} \Leftrightarrow \frac{|y_2|}{R}=\frac{|y'_2|}{R'} \Leftrightarrow \frac{y_2}{R}=\frac{y'_2}{R'} \stackrel{def}{=} \sin\alpha_2,$$
$$\frac{|OM_{2x}|}{|OM_2|}=\frac{|OM'_{2x}|}{|OM'_2|} \Leftrightarrow \frac{|x_2|}{R}=\frac{|x'_2|}{R'} \Leftrightarrow \frac{-x_2}{R}=\frac{-x'_2}{R'} \Leftrightarrow \frac{x_2}{R}=\frac{x'_2}{R'} \stackrel{def}{=} \cos\alpha_2.$$

Точно таким же образом рассматриваются случаи, когда угол оканчивается как в третьей, так и в четвертой четвертях. Итак, мы получили независимость определенных значений функций синус и косинус от радиуса окружности с центром в начале координат. Независимость от радиуса функций тангенс и котангенс следует из их определений как результатов деления функций синус на косинус и соответственно — косинус на синус. Утверждение полностью доказано.

В соответствие с доказанным утверждением впредь мы можем рассматривать определения тригонометрических функций величин углов с помощью окружности с центром в начале координат радиуса 1 , такую окружность называют *единичной.*

---

[3]* Существование и единственность таких точек вытекает из теоремы о существовании и единственности точки M на данном луче с данной начальной точкой (вершиной) O такой, что расстояние от точки M до точки O $(|OM|)$ равно заданному положительному числу a .

Сформулируем определения $\sin\alpha, \cos\alpha,\ \mathrm{tg}\alpha,\ \mathrm{ctg}\alpha$ с помощью единичной окружности, где α — мера угла AOM с началом — лучом OA, A — $A(1;0)$ и концом — лучом OM, M — $M(x;y)$ точка единичной окружности (см. ниже рис. 2.2 в), $\sin\alpha \overset{def}{=} y$; $\cos\alpha \overset{def}{=} x$;

$$\mathrm{tg}\ \alpha \overset{def}{=} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)\ ;\ \mathrm{ctg}\ \alpha \overset{def}{=} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0),$$

по определению $\mathrm{tg}\ \alpha$ не определен при $\cos\alpha = 0$; $\mathrm{ctg}\ \alpha$ не определен при $\sin\alpha = 0$.

В силу указанного выше факта о том, какие меры имеют углы, отвечающие точке M на окружности с центром в точке $O(0;0)$ радиуса $R > 0$, в частности, отвечающие точке M на единичной окружности, которая в свою очередь отвечает углу радианной меры α, справедливы формулы периодичности для синуса и косинуса

$$\sin(\alpha + 2n\pi) = \sin\alpha\ ;\ \cos(\alpha + 2n\pi) = \cos\alpha,\ n = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \dots\ .$$

2.1. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

рис. 2.2 в

рис. 2.2 г

Теорема 1. $\forall\alpha \in R \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (1)
— основное тригонометрическое тождество.

Доказательство. Оно вытекает из того, что координаты точки $M(x;y)$ $(\widehat{(OA;OM)} = \alpha)$, лежащей на окружности с центром в точке $O(0;0)$ и радиуса $R = 1$, удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$, где $x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha$.

Теорема 2.

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \forall k \in Z; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{ctg}^2\alpha + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \pi k \quad \forall k \in Z. \qquad (3)$$

Эти формулы получаются, если в основном тригонометрическом тождестве произвести почленное деление на $\cos^2\alpha$ и $\sin^2\alpha$ соответственно.

Следствия. Из формул, установленных в теореме 2, следуют:

$$\frac{1}{|\cos\alpha|}=\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+1}\,,\quad \text{если}\ \cos\alpha\neq 0\,; \tag{4}$$

$$\frac{1}{|\sin\alpha|}=\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha+1}\,,\quad \text{если}\ \sin\alpha\neq 0\,; \tag{5}$$

$$\Longrightarrow\quad \cos\alpha=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+1}}\,, & \text{если}\ \cos\alpha>0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+1}}\,, & \text{если}\ \cos\alpha<0\end{cases}\quad; \tag{6}$$

$$\sin\alpha=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha+1}}\,, & \text{если}\ \sin\alpha>0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha+1}}\,, & \text{если}\ \sin\alpha<0\end{cases}\quad; \tag{7}$$

$$\Longrightarrow \sin\alpha=\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+1}}\,, & \text{если}\ \cos\alpha>0\\ -\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+1}}\,, & \text{если}\ \cos\alpha<0\end{cases}\quad; \tag{8}$$

$$\Longrightarrow \cos\alpha=\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha+1}}\,, & \text{если}\ \sin\alpha>0\\ -\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha+1}}\,, & \text{если}\ \sin\alpha<0\end{cases}\quad; \tag{9}$$

$$|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\begin{cases}\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,, & \text{если}\ \sin\alpha\geqslant 0\\ -\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,, & \text{если}\ \sin\alpha\leqslant 0\end{cases}\quad; \tag{10}$$

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\begin{cases}\sqrt{1-\sin^2\alpha}, & \text{если}\ \cos\alpha\geqslant 0\\ -\sqrt{1-\sin^2\alpha}, & \text{если}\ \cos\alpha\leqslant 0\end{cases}\quad; \tag{11}$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\,, & \text{если}\ \cos\alpha>0\\ -\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\,, & \text{если}\ \cos\alpha<0\end{cases}\quad; \tag{12}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}\ , & \text{если}\quad 0 \leqslant \sin\alpha < 1 \\ -\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}\ , & \text{если}\quad -1 < \sin\alpha \leqslant 0 \end{cases} ; \qquad (13)$$

$$\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\ , & \text{если}\ \sin\alpha > 0 \\ -\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\ , & \text{если}\ \sin\alpha < 0 \end{cases} ; \qquad (14)$$

$$\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\ , & \text{если}\quad 0 \leqslant \cos\alpha < 1 \\ -\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\ , & \text{если}\quad -1 < \cos\alpha \leqslant 0 \end{cases} ; \qquad (15)$$

$$\text{tg}\alpha = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1}, & \text{если}\ \text{tg}\alpha \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1}\ , & \text{если}\ \text{tg}\alpha \leqslant 0 \end{cases} ; \qquad (16)$$

$$\text{ctg}\alpha = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1}\ , & \text{если}\ \text{ctg}\alpha \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1}\ , & \text{если}\ \text{ctg}\alpha \leqslant 0 \end{cases} ; \qquad (17)$$

$$\text{tg}\alpha \cdot \text{ctg}\alpha = 1\ ,\ \alpha \neq \frac{\pi n}{2} \quad \forall n \in Z\ . \qquad (18)$$

Обратить внимание на *некорректность* записей вида

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{\text{tg}^2\alpha + 1}}$$

без указания, при каких α знак " + ", а при каких " − ", так как согласно такой записи получается неоднозначная определенность синуса или косинуса по данному значению аргумента, что неверно.

2.2. **Формулы сложения:**

$$\cos(\alpha \pm \beta),\ \sin(\alpha \pm \beta),\ \text{tg}(\alpha \pm \beta),\ \text{ctg}(\alpha \pm \beta).$$

Обратим внимание на подробный вывод одной из этих формул,

например,$\forall \alpha,\ \beta \in R \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$ (1)

Рассмотрим случай $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha < 2\pi$, пусть M — $M(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$, N — $N(\cos\beta\ ;\ \sin\beta)$, запишем формулу для $|MN|^2$ (см. выше рис. 2.2 г)

$$|MN|^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2,$$

затем в новой системе координат, повернутой на угол величины β вокруг точки $O(0;0)$, уже N — $N(1;0)$, а M — $M(\cos(\alpha-\beta)\ ;\ \sin(\alpha-\beta))$ (см. выше рис. 2.2 г), поэтому

$$|MN|^2 = (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha-\beta) - 0)^2.$$

Приравнивая выражения для $|MN|^2$, используя основное тригонометрическое тождество, мы и получаем формулу для $\cos(\alpha-\beta)$ при указанных α и β. Если затем $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < 2\pi$, то $\cos(\alpha-\beta) = \cos(-(\alpha-\beta)) =$ $= \cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ (здесь использовано свойство четности косинуса). Если α и β произвольны, то $\exists\ \alpha_0,\ \beta_0 \in [0, 2\pi)$ и $m,\ n \in Z : \alpha = \alpha_0 + 2\pi m,\quad \beta = \beta_0 + 2\pi n \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha_0 - \beta_0 + 2\pi(m-n)) = \cos(\alpha_0 - \beta_0) = \cos\alpha_0\cos\beta_0 +$ $+ \sin\alpha_0\sin\beta_0 = \cos(\alpha - 2\pi m)\cos(\beta - 2\pi n) + \sin(\alpha - 2\pi m)\sin(\beta - 2\pi n) =$ $= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ (здесь мы использовали полученные выше формулы периодичности для синуса и косинуса).

Вторая формула выводится уже на основе первой совсем коротко:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

(здесь используется четность cos и нечетность sin).

Далее из этих формул выводятся такие формулы: $\forall\ \alpha,\ \beta\ \in R$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \sin\alpha\ ; \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \cos\alpha\ ; \qquad (4)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\ ; \qquad (5)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\ ; \qquad (6)$$

(опять используется четность cos и нечетность sin)

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \pm \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \mp \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}\ ; \qquad (7)$$

здесь $\cos(\alpha\pm\beta) \neq 0, \quad \cos\alpha \neq 0, \quad \cos\beta \neq 0.$

$$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\sin(\alpha\pm\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\mp\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\pm\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta\mp 1}{\mathrm{ctg}\beta\pm\mathrm{ctg}\alpha}\ ; \qquad (8)$$

здесь $\sin(\alpha\pm\beta)\neq 0, \quad \sin\alpha\neq 0, \quad \sin\beta\neq 0.$

Как выглядит формула для $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)$, если либо $\cos\alpha=0$, либо $\cos\beta=0$, либо

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha=0,\\ \cos\beta=0\end{array}\right. \ ?$$

Ответ. С помощью формул приведения (см. ниже, п. 4^0) можно получить следующий общий вид формул тангенса суммы и разности двух аргументов при *любых* их значениях:

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta},\ \text{ если } \alpha\pm\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi m;\\ \mp\mathrm{ctg}\beta, \quad \text{если} \quad \alpha=\pi/2+\pi n; \quad \beta\neq\pi m;\\ -\mathrm{ctg}\alpha, \quad \text{если} \quad \beta=\pi/2+\pi m; \quad \alpha\neq\pi n;\\ \text{в частности}, \quad 0, \quad \text{если} \quad \alpha=\pi/2+\pi n \quad \text{и} \quad \beta=\pi/2+\pi m;\\ \text{не существует, если} \quad \alpha\pm\beta=\pi/2+\pi k,\end{array}\right. \qquad (9)$$

везде $k,\ n,\ m$ принимают значения $0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \ldots$.

Как выглядит формула для $\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)$, если либо $\sin\alpha=0$, либо $\sin\beta=0$, либо

$$\left\{\begin{array}{l}\sin\alpha=0\ ,\\ \sin\beta=0\end{array}\right. \ ?$$

Ответ. С помощью формул приведения (см. ниже п. 4^0) можно получить следующий общий вид формул котангенса суммы и разности двух аргументов при *любых* их значениях:

$$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta\mp 1}{\mathrm{ctg}\beta\pm\mathrm{ctg}\alpha},\ \text{ если } \alpha\pm\beta\neq\pi k;\ \alpha\neq\pi n;\ \beta\neq\pi m;\\ \pm\mathrm{ctg}\beta, \quad \text{если} \quad \alpha=\pi n; \quad \beta\neq\pi m;\\ \mathrm{ctg}\alpha, \quad \text{если} \quad \beta=\pi m; \quad \alpha\neq\pi n;\\ \text{не существует, если} \quad \alpha\pm\beta=\pi k,\end{array}\right. \qquad (10)$$

везде $k,\ n,\ m$ принимают значения $0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \ldots$.

2.3. **Формулы суммы и разности тригонометрических функций:** $\sin\alpha \pm \sin\beta, \cos\alpha \pm \cos\beta, \mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta, \mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta$, **Преобразование в сумму произведений:** $\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, \sin\alpha\cos\beta$

Формулы имеют вид: $\forall\alpha\ ,\ \beta\ \in R$ * [4]

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\ ; \tag{1}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\ ; \tag{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]\ ; \tag{3}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}\ ; \tag{4}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ; \tag{5}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ ; \tag{6}$$

$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ ; \tag{7}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\ . \tag{8}$$

Вывод. Используем формулы:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Складывая эти равенства почленно и деля на 2, получаем (1).

Вычитая эти равенства почленно и деля на 2, получаем (2).

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Складывая эти равенства почленно и деля на 2, получаем (3)

Если применить формулы (1) и (2) с заменой α на φ и β на ψ, а затем положить $\alpha = \varphi+\psi,\ \beta = \varphi-\psi \Rightarrow \varphi = \dfrac{\alpha+\beta}{2}\ ,\ \psi = \dfrac{\alpha-\beta}{2}\ ,$ мы получим формулы (5) и (6).

[4]* В приведенных ниже формулах (7) и (8) на аргументы α и β накладываются ограничения.

Аналогично рассуждая применительно к формуле (3), мы получим формулу (4) со знаком " + ", а (4) со знаком " − " получается из (4) со знаком " + " заменой β на $-\beta$. Формулы (7) получаются, если представить

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$, следовательно,

$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ .$$

Каковы ограничения на α и β в формуле (7) ?

$(\cos\alpha \neq 0,\quad \cos\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\quad \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m\quad \forall k,\ m \in Z.)$

Формулы (8) получаются, если представить

$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $\mathrm{ctg}\beta = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$, следовательно,

$$\mathrm{ctg}\ \alpha \pm \mathrm{ctg}\ \beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \pm \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\sin\beta \pm \cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\ .$$

Каковы ограничения на α и β в формуле (8) ?

$(\sin\alpha \neq 0,\quad \sin\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \pi k,\quad \beta \neq \pi m\quad \forall k,\ m \in Z.)$

2.4. Формулы двойного и половинного аргументов тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Формулы приведения

$\forall\ \alpha\ \in R$

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\ ; \qquad (1)$$

(формула (1) вытекает из формулы для $\sin(\alpha+\beta)$ при $\beta = \alpha$)

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\ ; \qquad (2)$$

(формула (2) вытекает из формулы для $\cos(\alpha+\beta)$ при $\beta = \alpha$)

Применяя основное тригонометрическое тождество, получим:

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\ ; \qquad (3)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1\ ; \qquad (4)$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \mathrm{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\alpha} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\ ; \qquad (5)$$

(эта формула получается из формулы для $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ при $\beta = \alpha$).

Каковы ограничения на α ?

$(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ \forall\ k, m \in Z.)$

$$\mathrm{ctg}2\alpha = \mathrm{ctg}(\alpha + \alpha) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}\ ; \tag{6}$$

(эта формула получается из формулы для $\mathrm{ctg}(\alpha + \beta)$ при $\beta = \alpha$).

Каковы ограничения на α ?

$(\alpha \neq \pi k,\ 2\alpha \neq \pi m,\ \forall\ k, m \in Z\ \Leftrightarrow\ \alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ \forall\ n \in Z.)$

Заменяя в формулах (3) и (4) 2α на α, а α на $\frac{\alpha}{2}$, получим: $\forall\ \alpha\ \in R$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \Leftrightarrow \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}\ ; \tag{7}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \Leftrightarrow \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}\ . \tag{8}$$

Из формул (7) и (8) :

$$\Longrightarrow \left|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \quad (\alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad \forall k \in Z)\ ; \tag{9}$$

$$\Longrightarrow \left|\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} \quad (\alpha \neq 2\pi k, \quad \forall k \in Z)\ ; \tag{10}$$

$$\Longrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}, & \text{если } \sin\frac{\alpha}{2} \geqslant 0 \\ -\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}, & \text{если } \sin\frac{\alpha}{2} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\forall\ \alpha\ \in R)\ ; \tag{11}$$

$$\Longrightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}, & \text{если } \cos\frac{\alpha}{2} \geqslant 0 \\ -\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}, & \text{если } \cos\frac{\alpha}{2} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\forall\ \alpha\ \in R)\ ; \tag{12}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}, & \text{если } \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 0 \\ -\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}, & \text{если } \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad \forall k \in Z)\ ; \tag{13}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, & \text{если } \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, & \text{если } \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \leqslant 0 \end{cases} \quad (\alpha \neq 2\pi k, \quad \forall k \in Z)\ ; \quad (14)$$

Обратить внимание на некорректность записей типа

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

без указания, когда знак " + ", а когда знак " − " (ибо без этого указания получается, что по данному α $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ определен неоднозначно, что неверно).

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)}{2\cos^2(\alpha/2)} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad \forall n \in Z\ ; \quad (15)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad \forall n \in Z\ ; \quad (16)$$

(в формуле (16) $\sin\alpha \neq 0$).

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} = \frac{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)}{2\sin^2(\alpha/2)} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \alpha \neq 2\pi n, \quad \forall n \in Z\ ; \quad (17)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\cos^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad \forall n \in Z\ ; \quad (18)$$

(в формуле (18) $\sin\alpha \neq 0$).

$$\sin\alpha = \frac{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)} = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad \forall n \in Z\ ; \quad (19)$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)} = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad \forall n \in Z\ ; \quad (20)$$

Формулы (19) и (20) вытекают из формул (1), (2) и основного тригонометрического тождества.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}(\alpha/2)}{1-\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}\ ,\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ \forall\ k,\ m \in Z. \qquad (21)$$

Эта формула получается из формулы (5) с заменой 2α на α, α на $\alpha/2$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}{2\mathrm{tg}(\alpha/2)}\ . \qquad (22)$$

Эта формула вытекает из формулы (21) ($\alpha \neq \pi n$, $\forall n \in Z$) .

Формулы приведения — это формулы, выражающие тригонометрические функции аргументов $-\alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ и т.п. через тригонометрические функции аргумента α.

Для любого действительного значения α :

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ следует из нечетности sin, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ следует из четности cos.

Для любых действительных значений α, при которых определены тангенс и котангенс, соответственно :

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$ следует из нечетности tg, $c\mathrm{tg}(-\alpha) = -c\mathrm{tg}\alpha$ следует из нечетности $c$tg.

Для любого действительного значения α :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\ ; \qquad (23)$$

(эти формулы получены выше (см. п. 2^0)),

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha = \cos\alpha\ ; \qquad (24)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha = -\sin\alpha\ ; \qquad (25)$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\alpha\ ;\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\alpha\ ; \qquad (26)$$

эти формулы получаются из формул (23) почленным делением первой из них на вторую и наоборот, почленным делением второй из них на первую,

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\alpha; \quad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{tg}\alpha\ ; \qquad (27)$$

эти формулы получаются аналогично из формул (24) и (25) почленным делением первой из них на вторую и наоборот, почленным делением второй из них на первую.

Каковы ограничения на α в (26) и (27) ? По этому поводу см. ограничения на аргументы функций тангенс и котангенс.

Для любого действительного значения α :

$$\begin{array}{l} \sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha=\sin\alpha \\ \cos(\pi-\alpha)=\cos\pi\cos\alpha+\sin\pi\sin\alpha=-\cos\alpha \end{array} ; \tag{28}$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\ ; \quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\ ; \tag{29}$$

формулы (29) получаются аналогично формулам (28).

Таким же образом, как формулы (26) и (27), получаются формулы вида:

$$\mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha\ ;\ \mathrm{ctg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha\ ; \tag{30}$$

$$\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha\ ;\ \mathrm{ctg}(\pi+\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha. \tag{31}$$

Каковы ограничения на α в (30) и (31) ? По этому поводу также см. ограничения на аргументы функций тангенс и котангенс.

Доказать формулы :

$$\sin(\alpha+\pi n)=(-1)^n\sin\alpha\ ;\ \cos(\alpha+\pi n)=(-1)^n\cos\alpha. \tag{32}$$

При $n=2k \Rightarrow (-1)^n=1$ и эти формулы непосредственно получаются из формул периодичности. При $n=2k+1 \Rightarrow (-1)^n=-1$ и эти формулы есть следствие примененных сначала формул периодичности, а затем — формул приведения (29).

Доказать формулы: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\ ;$ (33)

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \tag{34}$$

Для доказательства представить $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)$ и $\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)$, а затем применить соответственно формулы синуса и косинуса суммы двух аргументов, синуса и косинуса суммы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество, формулу (1).

Доказать формулы:

$$\mathrm{tg}3\alpha=\frac{3\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}\ ; \tag{35}$$

$$\mathrm{ctg}3\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^3\alpha-3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha-1}\ . \tag{36}$$

Каковы ограничения на аргументы в этих формулах ?

2.5. **Решение простейшего тригонометрического уравнения** $\sin x = a$

О свойствах этой тригонометрической функции и ее графике см. ниже, после вывода формулы для $a\sin x+b\cos x$ на стр. 69 — 74.

В вопросе о решении уравнения $\sin x=a$ проведем исследование в зависимости от a :

при $|a|>1$ нет действительных решений, так как $E[\sin]=[-1,1]$, при $|a| \leqslant 1$ сформулируем определение $\arcsin a$:

$$\alpha \stackrel{def}{=} \arcsin a, \text{ если } \begin{cases} 1)\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 2)\ \sin\alpha = a. \end{cases}$$

Ниже, на стр. 69 — 70 дается геометрическое обоснование единственности решения данного уравнения на отрезках $[-\pi/2, \pi/2]$ и $[\pi/2, 3\pi/2]$, соответственно $x = \arcsin a$ и $x = \pi - \arcsin a$
(последнее равенство вытекает и на основе формулы $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$).

Отсюда, а также в силу периодичности с периодами $2\pi n$ функции $y = \sin x$ $(n = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$ и утверждения 1, доказаннго выше, вытекает, что *совокупность всех решений уравнения* $\sin x = a$ *есть*

$$\begin{matrix} \text{I серия } x = \arcsin a + 2\pi n \\ \text{II серия } x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{matrix} \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad \forall n,\ k \in Z$$

(при $k = 2n$ — I серия, при $k = 2n + 1$ — II серия).

В частных случаях, при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ формулы решений упрощаются и соответственно имеют вид:

$$x = \pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \forall n \in Z.$$

2.6. **Решение простейшего тригонометрического уравнения** $\cos x = a$

О свойствах этой тригонометрической функции и ее графике см. ниже, после вывода формулы для $a\sin x + b\cos x$ на стр. 69 — 74.

В вопросе о решении уравнения $\cos x = a$ проведем исследование в зависимости от a :

при $|a| > 1$ нет действительных решений, так как $E[\cos] = [-1, 1]$,

при $|a| \leqslant 1$ сформулируем определение $\arccos a$:

$$\alpha \stackrel{def}{=} \arccos a, \text{ если } \begin{cases} 1)\ \alpha \in [0, \pi], \\ 2)\ \cos\alpha = a. \end{cases}$$

Ниже, на стр. 69 — 70 дается геометрическое обоснование единственности решения данного уравнения на отрезках $[0, \pi]$ и $[-\pi, 0]$ соответственно $x = \arccos a$ и $x = -\arccos a$ (последнее вытекает и из четности функции $y = \cos x$).

Отсюда, а также в силу периодичности функции $y = \cos x$ с периодами $2\pi n$, $n = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$ и утверждения 1, доказанного выше, *совокупность всех решений уравнения* $\cos x = a$ *есть:*

$$\begin{matrix} x = \arccos a + 2\pi n \\ x = -\arccos a + 2\pi n \end{matrix} \Rightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi n,$$

где $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$.

В частных случаях, при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ формулы решений упрощаются и соответственно имеют вид:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = 2\pi n,\ x = \pi + 2\pi n,\ \forall n \in Z.$$

2.7. **Решение простейшего тригонометрического уравнения** $\operatorname{tg} x = a$

О свойствах этой тригонометрической функции и ее графике см. ниже, после доказательств свойств функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на стр. 75 — 80.

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при любом $a \in R$, так как $E[\operatorname{tg}] = (-\infty, +\infty)$.

Сформулируем определение $\operatorname{arctg} a$.

$$\alpha \overset{def}{=} \operatorname{arctg} a,\ \text{если} \ \begin{cases} 1)\ \alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) , \\ 2)\ \operatorname{tg} \alpha = a, \end{cases}$$

$\operatorname{arctg} a$ определен для любого действительного a.

Ниже, на стр. 76 — 77 даются геометрическое и аналитическое обоснования единственности решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, это $x = \operatorname{arctg} a$, откуда в силу периодичности функции $\operatorname{tg} x$ с периодами πn, $n = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$ и утверждения 1, доказанного выше, вытекает: *совокупность всех решений уравнения* $\operatorname{tg} x = a$ *имеет вид:*

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots .$$

2.8. **Решение простейшего тригонометрического уравнения** $\operatorname{ctg} x = a$

О свойствах этой тригонометрической функции и ее графике см. ниже, после доказательств свойств функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на стр. 75 — 80.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет решения при любом $a \in R$, так как $E[\operatorname{ctg}] = (-\infty, +\infty)$.

Сформулируем определение $\operatorname{arcctg} a$,

$$\alpha \overset{def}{=} \operatorname{arcctg} a,\ \text{если} \begin{cases} 1)\ \alpha \in (0, \pi), \\ 2)\ \operatorname{ctg} \alpha = a, \end{cases}$$

$\operatorname{arcctg} a$ определен для любого $a \in R$.

Ниже, на стр. 76 — 77 даются геометрическое и аналитическое обоснования единственности решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ на интервале $(0, \pi)$, это $x = \operatorname{arcctg} a$, откуда в силу периодичности функции $y = \operatorname{ctg} x$ с периодами πn, $n = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$ и утверждения 1, доказанного выше, вытекает: *совокупность всех решений уравнения* $\operatorname{ctg} x = a$ *имеет вид:*

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n\ , \quad n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots\ .$$

2.9. **Преобразование выражения** $a\sin x + b\cos x$ **с помощью вспомогательного аргумента**

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\psi),\ \text{где}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & ; & \cos\psi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & ; & \sin\psi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}\right\}. \qquad (*)$$

φ, ψ — величины указанных вспомогательных углов. Здесь a и b одновременно не обращаются в нуль, то есть

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 0\ ; \\ b \neq 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad a^2+b^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2+b^2 > 0.$$

Доказательство:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right),$$

так как $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \dfrac{a^2}{a^2+b^2} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1,$

то требуется доказать существование таких величин углов φ или ψ, что выполняются равенства $(*)$.

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\varphi:\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;$$

если $b \geqslant 0$, то в качестве φ можно взять $\varphi = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, тогда

$$\sin\varphi = \sin\left(\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;$$

если $b < 0$, то положим $\varphi = -\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, тогда

$$\sin\varphi = -\sin\left(\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}} = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}} =$$

$$= -\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

Существование ψ доказывается совершенно аналогично.

Замечание 1. Если $a = b = 0$, то выражение $a\sin x + b\cos x$ при любом x обращается в нуль. Поэтому в данном случае оно не требует специального преобразования.

Замечание 2. При обосновании существования φ такого, что для него имеют место равенства $(*)$, использовалось одно из равенств

$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, справедливых $\forall x \in R: \quad |x| \leqslant 1.$

Дадим вывод этих равенств, поскольку ниже они еще будут применяться. Поскольку $\forall\, x \in R: \ |x| \leqslant 1 \quad \arcsin x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arccos x \in [0, \pi]$, то $\sin(\arccos x) \geqslant 0$ и $\cos(\arcsin x) \geqslant 0$, а потому по формулам (10) и (11) на стр. 55 получаем $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2} = {}$ $= \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \cos(\arcsin x)$.

2.10. Свойства тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и их графики

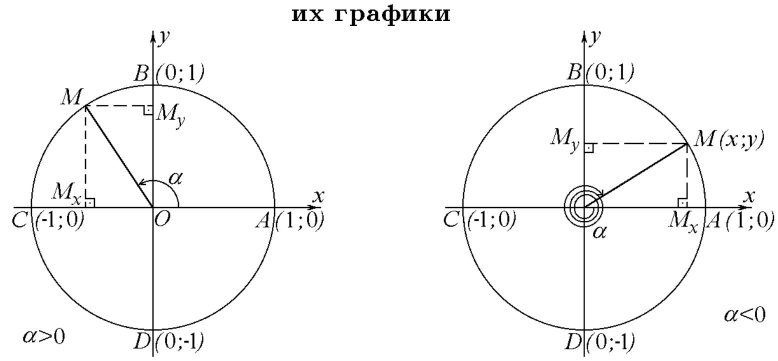


рис. 2.3 а рис. 2.3 б

Заменим x на α, так как x — абсцисса точки на окружности.

I. $D[\sin] = D[\cos] = (-\infty, +\infty)$.

Фиксируем произвольное $\alpha \in R$, тогда в силу свойств действительных чисел однозначно определено число $\alpha/2\pi = a_0 + r_0$, где $a_0 \in Z$, причем a_0 — наибольшее целое число, не превосходящее $\alpha/2\pi$, откуда $0 \leqslant r_0 < 1$. Обозначим $k = a_0$, тогда $\alpha = 2k\pi + \alpha_0$, где $\alpha_0 = 2r_0\pi$, следовательно, $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$.

В вводной части раздела "Тригонометрия" отмечалось, что $\alpha_0 \longleftrightarrow M$, где M — точка на единичной окружности; этой же точке отвечают числа вида $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi \quad \forall\, k \in Z$, где $\alpha = \widehat{AOM}$. Так как

$$\sin\alpha \overset{def}{=} y, \quad \cos\alpha \overset{def}{=} x,$$

где $M - M(x;y)$, то есть x — абсцисса, а y — ордината точки M, то для любого $\alpha \in R$ определены $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

II. $E[\sin] = E[\cos] = [-1, 1]$.

В силу основного тригонометрического тождества
$\forall\alpha \in R \qquad 1 = (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 \geqslant (\cos\alpha)^2$, аналогично $1 \geqslant (\sin\alpha)^2$,
откуда $\qquad -1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$.

Остается доказать, что $E[\sin]$ и $E[\cos]$ заполняют отрезок $[-1, 1]$ целиком (см. ниже рис. 2.4 а, б, в).

Фиксируем произвольные числа $a_0,\ a_0' \in [-1, 1], \quad a_0 \leftrightarrow M_x - M_x(x;0)$, $a_0' \leftrightarrow M_y' - M_y'(0;y)$, ибо координатные оси — числовые прямые (в школьном курсе математики без доказательства принимается факт взаимно однозначного соответствия между множествами всех действительных чисел и всех точек числовой прямой).

$OM_x = a_0$ и $OM_y' = a_0'$ — это величины отрезков OM_x и OM_y' соответственно.

В случаях $-1 < a_0 < 1$ и $-1 < a'_0 < 1$ точки M_x и M'_y лежат внутри круга с центром в точке $O(0;0)$ и радиуса $R = 1$. Проводя перпендикуляр из точек M_x или M'_y к осям Ox и Oy соответственно, мы получим единственные точки (которые соответственно обозначим за M_0 и M'_0) их пересечения с верхней и соответственно правой полуокружностями а также — единственные точки (которые соответственно обозначим за M_1 и M'_1) их пересечения с нижней и соответственно левой полуокружностями; * [5] точке M_0 уже *однозначно* отвечает угол с мерой α_0, а точке M_1 уже *однозначно* отвечает угол с мерой α_1, соответственно точке M'_0 уже *однозначно* отвечает угол с мерой α'_0, а точке M'_1 уже *однозначно* отвечает угол с мерой α'_1.

В случае синуса это $\alpha'_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\alpha'_1 \in [\pi/2, 3\pi/2]$,

а в случае косинуса это $\alpha_0 \in [0, \pi]$, $\alpha_1 \in [-\pi, 0]$,

$\sin\alpha'_0 = a'_0$, $\sin\alpha'_1 = a'_0$, соответственно $\cos\alpha_0 = a_0$, $\cos\alpha_1 = a_0$,

$\alpha'_0 \stackrel{def}{=} \arcsin a'_0$, соответственно $\alpha_0 \stackrel{def}{=} \arccos a_0$ и

$\alpha'_1 = \pi - \arcsin a'_0$, соответственно $\alpha_1 = -\arccos a_0$.

При $a'_0 = -1$ в случае синуса точка M'_y совпадает с точкой $M - M(0;-1)$, которая в свою очередь совпадает с точкой D, $\alpha'_0 = -\pi/2$, а в случае косинуса точка M_x совпадает с точкой $M - M(-1;0)$, которая в свою очередь совпадает с C, $\alpha_0 = \pi$. Соответствующие перпендикуляры, восстановленные из точек M'_y и M_x соответственно, будут касаться единичной окружности (см. ниже рис. 2.4 б).

При $a'_0 = 1$ в случае синуса точка M'_y совпадает с точкой $M - M(0;1)$, которая в свою очередь совпадает с точкой B, $\alpha'_0 = \pi/2$, а в случае косинуса точка M_x совпадает с точкой $M - M(1;0)$, которая в свою очередь совпадает с A, $\alpha_0 = 0$. Соответствующие перпендикуляры, восстановленные из точек M'_y и M_x соответственно, будут касаться единичной окружности (см. ниже рис. 2.4 в).

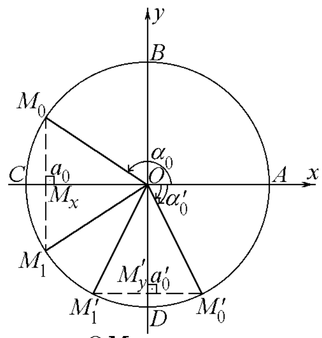
Отметим, что при $|a_0| > 1$ и $|a'_0| > 1$ перпендикуляры, восстановленные из точек $M_x \leftrightarrow a_0$ и $M'_y \leftrightarrow a'_0$ к осям Oy и Ox соответственно, не будут иметь общих точек с единичной окружностью, что является геометрическим смыслом отсутствия действительных решений уравнений $\sin x = a$ и $\cos x = a$ при $|a| > 1$ (см. ниже рис. 2.5 в).

III. Из результатов п. II следует, что функции $\sin x$ и $\cos x$ ограничены на всей своей области определения.

IV. Из определений синуса и косинуса с помощью окружности и на основе результатов п.II вытекает :

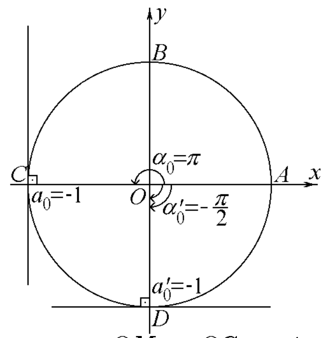
[5]* Это вытекает из теорем курса геометрии о взаимном расположении прямой и окружности и о перпендикулярности диаметра и хорды окружности.

$$\max_{\alpha\in R}\sin\alpha = 1 = \sin(\pi/2+2k\pi), \quad \min_{\alpha\in R}\sin\alpha = -1 = \sin(-\pi/2+2k\pi),$$
$$\max_{\alpha\in R}\cos\alpha = 1 = \cos 2k\pi,\ \min_{\alpha\in R}\cos\alpha = -1 = \cos(\pi+2k\pi),\ k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots .$$



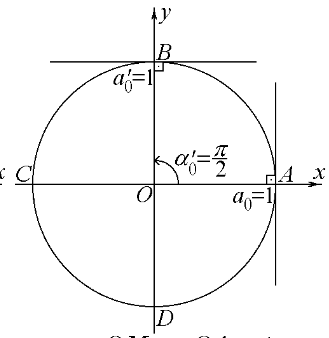
$a_0 = OM_x,\ \alpha_0 = \arccos a_0,$
$\alpha_1 = -\alpha_0,$
$a'_0 = OM'_y,\ \alpha'_0 = \arcsin a'_0,$
$\alpha'_1 = \pi - \alpha'_0,$

рис. 2.4 а



$a_0 = OM_x = OC = -1,$
$\alpha_0 = \arccos(-1) = \pi,$
$a'_0 = OM'_y = OD = -1,$
$\alpha'_0 = \arcsin(-1) = -\pi/2,$

рис. 2.4 б



$a_0 = OM_x = OA = 1,$
$\alpha_0 = \arccos 1 = 0,$
$a'_0 = OM'_y = OB = 1,$
$\alpha'_0 = \arcsin 1 = \pi/2.$

рис. 2.4 в

V. $\forall\alpha\in R \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$
то есть синус — функция нечетная, а косинус — функция четная.

Схема доказательства.

Пусть $\alpha\in[0,\pi]$. Для $\alpha = 0,\ \pi/2,\ \pi$ доказываемые равенства сразу получаются из определений синуса и косинуса.

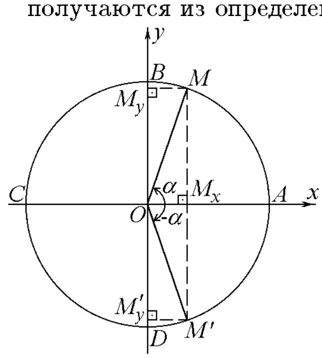


рис. 2.5 а

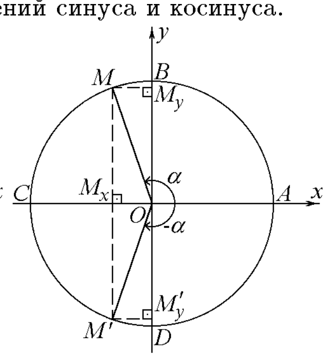


рис. 2.5 б

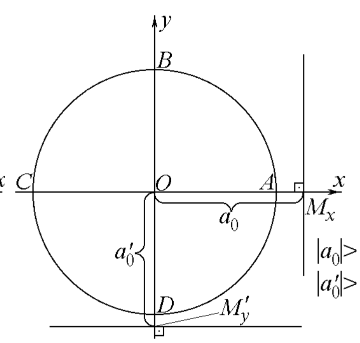


рис. 2.5 в

При $0<\alpha<\pi,\ \alpha\neq\pi/2$, рассматривая на рис. 2.5 а (б) треугольники $\triangle OMM_x$ и $\triangle OM_xM'$, где $MM'\perp Ox$, получим их равенство по общему катету и гипотенузе, откуда

$$\left|\widehat{M'OM_x}\right| = \left|\widehat{M_xOM}\right| = \alpha \quad (\pi-\alpha) \quad\Rightarrow\quad \widehat{AOM} = \alpha \text{ и } \widehat{AOM'} = -\alpha.$$

Следовательно, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = x =$ величине отрезка OM_x, где $M_x - M_x(x; 0)$.

Так как $|M_xM| = |M'M_x|$, то величина отрезка M_xM'*[6] равна минус величине отрезка M_xM, величина отрезка M_xM равна $y = \sin\alpha$, $M - M(x; y)$, величина отрезка M_xM' равна $\sin(-\alpha) = -y$, $M' - M'(x; -y) \ \Rightarrow \ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Далее из равенств $\cos\alpha = \cos(-(-\alpha)) = \cos(-\alpha)$ и $\sin\alpha = \sin(-(-\alpha)) = -\sin(-\alpha)$ доказывается нечетность синуса и четность косинуса на отрезке $[-\pi, 0]$, ибо если $\alpha \in [-\pi, 0]$, то $-\alpha \in [0, \pi]$, а на этом отрезке соответствующие свойства уже доказаны.

Затем с использованием периодичности (см. п. VI) доказываются равенства $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ уже для любого действительного α путем его представления в виде $\alpha = \alpha_0 + 2n\pi$, $n \in Z$, $-\pi < \alpha_0 \leqslant \pi$ и использования того, что эти равенства доказаны для α_0 следующим образом:
$\sin(-\alpha) = \sin(-\alpha_0 - 2n\pi) = \sin(-\alpha_0) = -\sin\alpha_0 = -\sin(\alpha_0 + 2n\pi) = -\sin\alpha$,
$\cos(-\alpha) = \cos(-\alpha_0 - 2n\pi) = \cos(-\alpha_0) = \cos\alpha_0 = \cos(\alpha_0 + 2n\pi) = \cos\alpha$.

VI. $\forall\alpha \in R,\ n \in Z\ :\ \sin(\alpha + 2n\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2n\pi) = \cos\alpha$.

Эти равенства вытекают из определений синуса и косинуса с помощью окружности и того, что углам AOM с мерами α и $\alpha + 2n\pi$ отвечает одна и та же точка $M - M(x; y)$ на единичной окружности. Таким образом, функции синус и косинус — периодические с периодами $2n\pi$, $n = \pm1;\ \pm2;\ \ldots$.

2π — основной период этих функций. Это доказывается на основе результатов п. VIII с использованием результатов утверждения 4, доказанного в вводной части раздела "Тригонометрия". При этом в случае функции $\sin\alpha$ в качестве c, фигурирующего в этом утверждении, берется $-\pi/2$, а в качестве d берется $3\pi/2$, в случае функции $\cos\alpha$ в качестве c берется 0, а в качестве d берется 2π.

На основе этого факта, периодичности этих функций с периодами $2\pi n$ и утверждения 3, доказанного в вводной части раздела "Тригонометрия", получаем, что никаких других периодов, кроме $2\pi n$, функции $\sin x$ и $\cos x$ не имеют.

VII. $\sin\alpha = 0 \iff \alpha = n\pi \quad \forall n \in Z$, так как углам с этими мерами на единичной окружности отвечают точки A или C с нулевыми ординатами.

$\cos\alpha = 0 \iff \alpha = \pi/2 + n\pi \quad \forall n \in Z$, так как углам с этими мерами на единичной окружности отвечают точки B или D с нулевыми абсциссами.

[6]* Если мы имеем направленный отрезок, параллельный какой-либо числовой оси или лежащий на ней, то, по определению, его величина равна его длине (минус его длине), если направление этого отрезка совпадает с положительным (отрицательным) направлением указанной числовой оси.

$\sin\alpha > 0 \iff 2n\pi < \alpha < \pi + 2n\pi \ \ \forall n \in Z$, так как углы с такими мерами оканчиваются в I или II координатных четвертях, или на положительной части оси ординат, где соответствующая ордината y, фигурирующая в определении синуса, положительна.

$\sin\alpha < 0 \iff -\pi + 2n\pi < \alpha < 2n\pi \ \ \forall n \in Z$, так как углы с такими мерами оканчиваются в III или IV координатных четвертях, или на отрицательной части оси ординат, где соответствующая ордината y, фигурирующая в определении синуса, отрицательна.

$\cos\alpha > 0 \iff -\pi/2 + 2n\pi < \alpha < \pi/2 + 2n\pi \ \ \forall n \in Z$, так как углы с такими мерами оканчиваются в I или IV координатных четвертях, или на положительной части оси абсцисс, где соответствующая абсцисса x, фигурирующая в определении косинуса, положительна.

$\cos\alpha < 0 \iff \pi/2 + 2n\pi < \alpha < 3\pi/2 + 2n\pi \ \ \forall n \in Z$, так как углы с такими мерами оканчиваются во II или в III координатных четвертях, или на отрицательной части оси абсцисс, где соответствующая абсцисса x, фигурирующая в определении косинуса, отрицательна.

VIII. Функция синус возрастает на каждом из отрезков $[-\pi/2 + 2n\pi, \pi/2 + 2n\pi]$ и убывает на каждом из отрезков $[\pi/2 + 2n\pi, 3\pi/2 + 2n\pi] \ \ \forall n \in Z$.

Функция косинус возрастает на каждом из отрезков $[-\pi + 2n\pi, 2n\pi]$ и убывает на каждом из отрезков $[2n\pi, \pi + 2n\pi] \ \ \forall n \in Z$.

В силу периодичности этих функций и утверждения 2, доказанного в вводной части раздела "Тригонометрия", достаточно доказать эти утверждения для случая $n = 0$.

Рассмотрим разность
$$\sin(x_2) - \sin(x_1) = 2\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right),$$
где $-\pi/2 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi/2$ или $\pi/2 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 3\pi/2$.

В силу свойств числовых неравенств в первом случае :
$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}\ ,$$
а во втором случае :
$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2} < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{3\pi}{2}\ ,$$
откуда в силу результатов п. VII указанная разность в первом случае положительна, а во втором случае отрицательна, что и доказывает свойство монотонности функции синус.

Рассмотрим разность
$$\cos(x_2) - \cos(x_1) = -2\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right),$$
где $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$ или $-\pi \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$.

В силу свойств числовых неравенств в первом случае :

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi,$$

а во втором случае :

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}\ ,\ -\pi < \frac{x_2 + x_1}{2} < 0,$$

откуда в силу результатов п. VII указанная разность в первом случае отрицательна, а во втором случае положительна, что и доказывает свойство монотонности функции косинус.

Замечание. При доказательстве свойств монотонности этих функций с помощью теоремы о знаке их производных на самом деле они обосновываются лишь для соответствующих *интервалов*, поэтому для обоснования монотонности на *отрезках* все равно необходимы дополнительные исследования.

IX. Функция $\sin x$ строго выпукла вверх (вниз) на отрезках

$[2\pi n, \pi + 2\pi n]$ ($[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$) при любом целом значении n , то есть на тех отрезках, где она принимает неотрицательные (неположительные) значения.

Доказательство. В силу периодичности функции $\sin x$ с периодами $2\pi m$ $\forall m \in Z,\ m \neq 0$ достаточно рассмотреть лишь случай $n = 0$. Фиксируем произвольные действительные x_1 и $x_2 \in [0, \pi],\ x_1 \neq x_2$.

Сравним разность выражений

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \text{с числом} \quad 0\ .$$

Применяя формулу суммы синусов, мы получим:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \sin\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} =$$

$$= \sin\frac{x_1 + x_2}{2} - \sin\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\frac{x_1 - x_2}{2} = \sin\frac{x_1 + x_2}{2}\cdot\left(1 - \cos\frac{x_1 - x_2}{2}\right) > 0\ .$$

Последнее неравенство вытекает из свойств числовых неравенств, промежутков знакопостоянства функции синус и области изменения функции косинус следующим образом:

$$0 \leqslant x_1 \leqslant \pi, \tag{3}$$

$$0 \leqslant x_2 \leqslant \pi, \tag{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\pi \leqslant -x_2 \leqslant 0, \tag{5}$$

так как x_1 и x_2 из отрезка $[0, \pi]$ различны, то они не могут одновременно равняться нулю и одновременно равняться π, а потому, складывая почленно неравенства (3) и (4); (3) и (5) и почленно деля получающиеся при этом неравенства на 2, мы получим

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi, \tag{6}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{x_1 - x_2}{2} < 0, \tag{7}$$

или

$$0 < \frac{x_1 - x_2}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

откуда и имеем:

$$\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > 0 \quad \text{и} \quad 1 - \cos \frac{x_1 - x_2}{2} > 0\ .$$

Итак, строгая выпуклость вверх функции $\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$ доказана. В силу нечетности функции $\sin x$ вытекает ее строгая выпуклость вниз на отрезке $[-\pi, 0]$, последний факт предоставляется доказать самостоятельно.

Функция $\cos x$ строго выпукла вверх (вниз) на отрезках

$[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$ ($[\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$) при любом целом значении n, то есть на тех отрезках, где она принимает неотрицательные (неположительные) значения.

Это утверждение уже вытекает из установленных промежутков строгой выпуклости функции $\sin x$ и формулы $\cos x = \sin(\pi/2 + x)$.

Можно, однако, исследовать на выпуклость функцию $\cos x$, не опираясь на выпуклость функции $\sin x$, по аналогичной, что и $\sin x$, схеме. Предоставляется это сделать самостоятельно.

X. Графики:

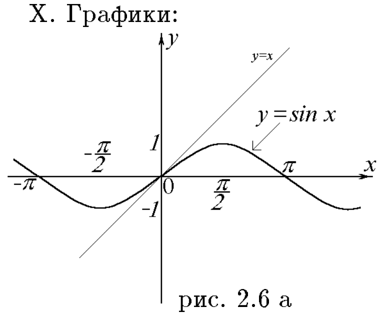


рис. 2.6 а

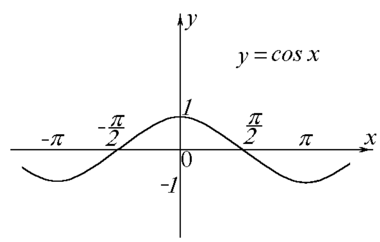


рис. 2.6 б

2.11. Свойства тригонометрических функций $y = \mathrm{tg}\ x$ и $y = \mathrm{ctg}\ x$ и их графики

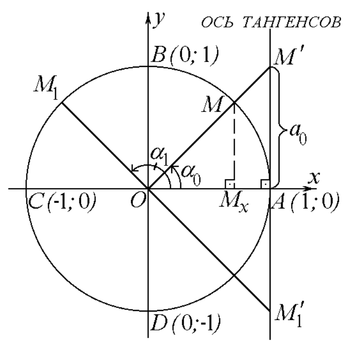
Так же, как при обосновании свойств синуса и косинуса заменим x на α,

$$\mathrm{tg}\ \alpha \stackrel{def}{=} \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ , \ \cos\alpha \neq 0, \\ \nexists\ , \ \cos\alpha = 0 \end{cases} \quad ; \qquad \mathrm{ctg}\ \alpha \stackrel{def}{=} \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ , \ \sin\alpha \neq 0, \\ \nexists\ , \ \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

I. Исходя из результатов пп. I и VI исследования функций синус и косинус, мы получаем:

$D[\mathrm{tg}]$ — любое $\alpha \in R:\ \alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $D[\mathrm{ctg}]$ — любое $\alpha \in R:\ \alpha \neq k\pi$, $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \dots$.

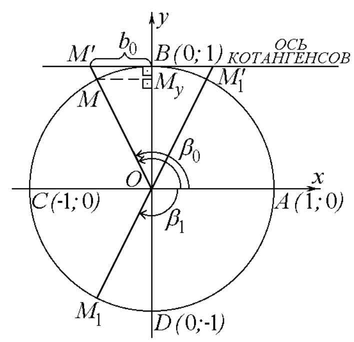
II. $E[\mathrm{tg}] = E[\mathrm{ctg}] = (-\infty, +\infty)$.



$AM' = \mathrm{tg}\alpha_0 = a_0,\ AM_1' = \mathrm{tg}\alpha_1$

$\alpha_0 = \mathrm{arctg} a_0$

рис. 2.7 а



$BM' = \mathrm{ctg}\beta_0 = b_0,\ BM_1' = \mathrm{ctg}\beta_1$

$\beta_0 = \mathrm{arcctg} b_0$

рис. 2.7 б [7*]

Оси тангенсов и котангенсов являются касательными к единичной окружности в точках A и B соответственно и обладают теми же свойствами числовых прямых, что и оси Oy и Ox соответственно в том смысле, что положительное и отрицательное направления на оси тангенсов (котангенсов) совпадают с положительным и отрицательным направлениями оси $Oy(Ox)$. Единицы измерений на них те же, что и на всей координатной плоскости, в том числе и на осях Oy и Ox; начала отсчета на оси тангенсов — точка $A(1;0)$, а на оси котангенсов — точка $B(0;1)$.

Фиксируем произвольные числа $a_0,\ b_0 \in R$, $a_0 \leftrightarrow M'$, $b_0 \leftrightarrow M'$ на осях тангенсов и котангенсов соответственно. $M' \leftrightarrow M$ на правой и соответственно верхней полуокружностях, M — $M(x;y)$.
$M \leftrightarrow \alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, соответственно $M \leftrightarrow \beta_0 \in (0, \pi)$, $\mathrm{tg}\ \alpha_0 = a_0$, соответственно $\mathrm{ctg}\ \beta_0 = b_0$ (см. рис. 2.7 а и б).

Докажем последние два равенства.

При $\alpha_0 \neq 0$ прямоугольные треугольники $\triangle OMM_x$ и $\triangle OM'A$ подобны как имеющие общий острый угол, следовательно,

[7*] На этих рисунках за AM', BM' и т.п. обозначены величины соответствующих отрезков.

$$\frac{|AM'|}{1} = \frac{|AM'|}{|OA|} = \frac{|M_xM|}{|OM_x|} = \frac{|y|}{|x|} = \frac{|y|}{x} \ .$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что $x > 0$. Так как знаки величин отрезков AM' и M_xM совпадают, то и имеют место равенства

$$a_0 = AM' = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \stackrel{def}{=} \text{tg } \alpha.$$

Если $\alpha = 0$, то точки M', M и A совпадают, а потому и в этом случае также $a_0 = AM' = 0 = \text{tg } 0 = \text{tg } \alpha$. По определению $\alpha_0 = \text{arctg } a_0$.

Соответственно при $\beta_0 \neq \pi/2$ прямоугольные треугольники $\triangle OMM_y$ и $\triangle OM'B$ подобны как имеющие общий острый угол, следовательно,

$$\frac{|BM'|}{1} = \frac{|BM'|}{|OB|} = \frac{|M_yM|}{|OM_y|} = \frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{y} \ .$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что $y > 0$. Так как знаки величин отрезков BM' и M_yM совпадают, то и имеют место равенства

$$b_0 = BM' = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \stackrel{def}{=} \text{ctg } \alpha.$$

Если $\beta = \pi/2$, то точки M', M и B совпадают, а потому и в этом случае также $b_0 = BM' = 0 = \text{ctg } \dfrac{\pi}{2} = \text{ctg } \beta$. По определению $\beta_0 = \text{arcctg } b_0$.

Докажем теперь *аналитическим способом* утверждение об области значений функций тангенс и котангенс, правда, существенно используя результат об области значений функций синус и косинус, который выше был получен *геометрическим способом* (см. также пп. 25 — 26 в [4]).

Фиксируем произвольное число $a \in R$ и положим,

$$c_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \ , \ d_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \quad \Rightarrow \quad |c_0| < 1, \ 0 < |d_0| \leqslant 1.$$

Полагая $\alpha = \arcsin c_0 \ \Rightarrow \ \sin\alpha = c_0$ и $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и на основе формулы (10) на стр. 55 получаем:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-{c_0}^2} = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = d_0 \ \Rightarrow \ \text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{c_0}{d_0} = a.$$

Теперь положим $\alpha = \arccos c_0 \ \Rightarrow \ \cos\alpha = c_0$ и $0 < \alpha < \pi$, на основе формулы (11) на стр. 55 получаем:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-{c_0}^2} = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = d_0 \ \Rightarrow \ \text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c_0}{d_0} = a.$$

III. Из результатов п. II вытекает, что функции тангенс и котангенс не ограничены на своих областях определения.

IV. Из результатов п. II вытекает, что функции тангенс и котангенс не имеют наибольшего и наименьшего значений на своих областях определения.

V. При исследовании четности или нечетности функций тангенс и котангенс (согласно определению этих свойств) сначала докажем, что для любого $\alpha \in D[\mathrm{tg}]$ или $\alpha \in D[\mathrm{ctg}]$, то есть $\alpha \neq \pi/2 + n\pi \ \forall \ n \in Z$, соответственно $\alpha \neq m\pi \ \forall m \in Z \ \Rightarrow \ -\alpha$ также принадлежит соответствующей области определения.

$\alpha \in D[\mathrm{tg}] \Leftrightarrow \cos\alpha \neq 0$, а так как $\forall \alpha \in R \ \cos(-\alpha) = \cos\alpha$, то $\cos\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos(-\alpha) \neq 0$, стало быть, $-\alpha \in D[\mathrm{tg}]$. Аналогично $\alpha \in D[\mathrm{ctg}] \Leftrightarrow \sin\alpha \neq \neq 0$, а так как $\forall \alpha \in R \ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, то $\sin\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \sin(-\alpha) \neq 0$, стало быть, $-\alpha \in D[\mathrm{ctg}]$. Следовательно, области определения функций тангенс и котангенс симметричны относительно $\alpha_0 = 0$.

Далее, *нечетность* функций тангенс и котангенс уже непосредственно вытекает из их определений, нечетности синуса и четности косинуса следующим образом:

$$\forall \ \alpha \ \in \ D[\mathrm{tg}] \quad \mathrm{tg}\ (-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\ \alpha,$$

$$\forall \ \alpha \ \in \ D[\mathrm{ctg}] \quad \mathrm{ctg}\ (-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\mathrm{ctg}\ \alpha.$$

VI. При исследовании периодичности функций тангенс и котангенс, согласно определению этого свойства, сначала установим, что если $\alpha \in D[\mathrm{tg}]$ или $\alpha \in D[\mathrm{ctg}]$, то $\forall m \ \in Z \quad \alpha + m\pi \in D[\mathrm{tg}]$, соответственно $\alpha + m\pi \in D[\mathrm{ctg}]$.

$\alpha \in D[\mathrm{tg}] \Leftrightarrow \cos\alpha \neq 0$, а так как $\forall \alpha \in R$ и $\forall m \in Z \quad \cos(\alpha + \pi m) = = (-1)^m \cos\alpha$ (см. формулы (32) п. 4^0 раздела "Тригонометрия"), то и $\cos(\alpha + \pi m) \neq 0 \ \Rightarrow \ \alpha + m\pi \in D[\mathrm{tg}]$. Аналогично, $\alpha \in D[\mathrm{ctg}] \Leftrightarrow \sin\alpha \neq 0$, а так как $\forall \alpha \in R$ и $\forall m \in Z \quad \sin(\alpha + \pi m) = (-1)^m \sin\alpha$, то и $\sin(\alpha + \pi m) \neq \neq 0 \ \Rightarrow \ \alpha + m\pi \in D[\mathrm{ctg}]$.

Далее периодичность тангенса и котангенса вытекает из их определений и формул (32) п. 4^0 раздела "Тригонометрия" следующим образом:

$$\mathrm{tg}\ (\alpha + n\pi) = \frac{\sin(\alpha + n\pi)}{\cos(\alpha + n\pi)} = \frac{(-1)^n \sin\alpha}{(-1)^n \cos\alpha} = \mathrm{tg}\ \alpha,$$

$$\mathrm{ctg}\ (\alpha + n\pi) = \frac{\cos(\alpha + n\pi)}{\sin(\alpha + n\pi)} = \frac{(-1)^n \cos\alpha}{(-1)^n \sin\alpha} = \mathrm{ctg}\ \alpha$$

при любом α из области определения функции тангенс или соответственно котангенс и любом целом значении числа n. А это и означает периодичность каждой из этих функций с периодами $n\pi, \ n = \pm 1; \pm 2; \ldots$.

VII. Из результатов п. VII исследования функций синус и косинус и определений функций тангенс и котангенс вытекает, что

$\text{tg } \alpha = 0 \iff \sin\alpha = 0 \iff \alpha = n\pi$,

$\text{ctg } \alpha = 0 \iff \cos\alpha = 0 \iff \alpha = \pi/2 + n\pi$,

$n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \dots$.

$\text{tg } \alpha$ и $\text{ctg } \alpha$ положительны (отрицательны) тогда и только тогда, когда функции синус и косинус принимают значения одного знака (разных знаков). Следовательно, функции тангенс и котангенс положительны на каждом из интервалов $(n\pi, \pi/2+n\pi)$ и отрицательны на каждом из интервалов $(-\pi/2 + n\pi, n\pi)$ $\forall n \in Z$.

VIII. $\text{tg } \alpha$ возрастает на $(-\pi/2+n\pi, \pi/2+n\pi)$ $\forall n \in Z$, причем на каждом из этих интервалов *в отдельности*, а $\text{ctg}\alpha$ убывает на $(n\pi; \pi + n\pi)$ $\forall n \in Z$ и также *в отдельности* на каждом из этих интервалов.

Доказательства. В силу периодичности тангенса и котангенса, утверждения 2, доказанного в водной части раздела "Тригонометрия", достаточно рассмотреть случай $n = 0$. Фиксируем произвольные x_1 и x_2, где $-\pi/2 < x_1 < x_2 < \pi/2$ в случае тангенса, и $0 < x_1 < x_2 < \pi$ в случае котангенса, откуда в силу свойств числовых неравенств в обоих случаях $0 < x_2 - x_1 < \pi$. Применим формулы разностей тангенсов и котангенсов аргументов x_2 и x_1:

$$\text{tg } x_2 - \text{tg } x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1}\ ,\ \text{ctg}x_2 - \text{ctg}x_1 = -\frac{\sin(x_2 - x_1)}{\sin x_2 \sin x_1}\ .$$

Эти формулы доказаны выше, в п. 2.3 (формула (7) и (8) для знака "$-$"). В силу результатов исследования п.VII о промежутках знакопостоянства функций синус и косинус, мы и получаем, что

$$\text{tg}x_2 - \text{tg}x_1 > 0\ ,\ \text{ctg}x_2 - \text{ctg}x_1 < 0.$$

Отсюда и вытекают доказываемые утверждения.

Замечание. Утверждения этого пункта можно доказать с помощью теоремы о знаке производной.

В силу результатов этого пункта, а также утверждения 5, доказанного в вводной части раздела "Тригонометрия" вытекает, что π — основной период рассматриваемых функций. При этом в случае функции $\text{tg } \alpha$ в качестве c, фигурирующего в этом утверждении, берется $-\pi/2$, а в качестве d берется $\pi/2$, в случае функции $c\text{tg } \alpha$ в качестве c, берется 0, а в качестве d берется π.

На основе этого факта, периодичности этих функций с периодами πn, и утверждения 3, доказанного в вводной части раздела "Тригонометрия", устанавливается, что никаких других периодов, кроме πn, функции $\text{tg } x$ и $\text{ctg } x$ не имеют.

IX. Функция $\mathrm{tg}x$ строго выпукла вниз (вверх) на полуотрезках $[\pi n, \pi/2+\pi n)$ ($(-\pi/2+\pi n, \pi n]$) при любом целом значении n, то есть на тех отрезках, где она принимает неотрицательные (неположительные) значения.

Доказательство. В силу периодичности функции $\mathrm{tg}x$ с периодами πm $\forall m \in Z,\ m \neq 0$ достаточно рассмотреть лишь случай $n = 0$. Фиксируем произвольные действительные x_1 и x_2 $\in [0, \pi/2)$,
$x_1 \neq x_2$. Сравним разность

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \text{с числом} \quad 0\ .$$

Применяя формулы суммы тангенсов и тангенса половинного аргумента (см. пп. 3^0 и 4^0 раздела "Тригонометрия", формулы (7) и (15)), а затем и формулу косинуса суммы и разности двух аргументов, мы получим:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \mathrm{tg}\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{\mathrm{tg}x_1+\mathrm{tg}x_2}{2} =$$
$$= \frac{\sin(x_1+x_2)}{1+\cos(x_1+x_2)} - \frac{\sin(x_1+x_2)}{2\cos x_1\cos x_2} =$$
$$= \sin(x_1+x_2)\cdot\left(\frac{1}{1+\cos x_1\cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2} - \frac{1}{2\cos x_1\cos x_2}\right) =$$
$$= \frac{(\sin(x_1+x_2))(\cos x_1\cos x_2 + \sin x_1\sin x_2 - 1)}{2(1+\cos(x_1+x_2))\cos x_1\cos x_2} =$$
$$= \frac{(\sin(x_1+x_2))(\cos(x_1-x_2) - 1)}{2(1+\cos(x_1+x_2))\cos x_1\cos x_2} < 0\ .$$

Последнее неравенство вытекает из свойств числовых неравенств, промежутков знакопостоянства функций синус и косинус, области изменения функции косинус следующим образом:

$$0 \leqslant x_1 < \frac{\pi}{2}\ , \tag{9}$$

$$0 \leqslant x_2 < \frac{\pi}{2}\ , \tag{10}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{\pi}{2} < -x_2 \leqslant 0, \tag{11}$$

так как x_1 и x_2 из полуотрезка $[0, \pi/2)$ различны, то они не могут одновременно равняться нулю, а потому, складывая почленно неравенства (9) и (10); (9) и (11), мы получим:

$$0 < x_1 + x_2 < \pi, \tag{12}$$

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 - x_2 < 0, \tag{13}$$

или

$$0 < x_1 - x_2 < \frac{\pi}{2} \ , \tag{14}$$

откуда и имеем:

$\cos x_1 > 0$; $\cos x_2 > 0$; $\cos(x_1 - x_2) < 1$; $\sin(x_1 + x_2) > 0$ и $1 + \cos(x_1 + x_2) > 0$.

Итак, строгая выпуклость вниз функции $\mathrm{tg}x$ на полуинтервале $[0, \pi/2)$ доказана. В силу нечетности функции $\mathrm{tg}x$ и утверждения 2 вытекает ее строгая выпуклость вверх на полуинтервале $(-\pi/2, 0]$, что и требовалось доказать.

Функция $\mathrm{ctg}x$ строго выпукла вниз (вверх) на полуотрезках $(\pi n, \pi/2 + \pi n]$ ($[\pi/2 + \pi n, \pi + \pi n)$) при любом целом значении n, то есть на тех полуотрезках, где она принимает неотрицательные (неположительные) значения.

Это утверждение уже вытекает из установленных промежутков строгой выпуклости функции $\mathrm{tg}x$, формулы $\mathrm{ctg}x = -\mathrm{tg}(\pi/2 + x)$.

Можно, однако, исследовать на выпуклость функцию $ctgx$, не опираясь на выпуклость функции $\mathrm{tg}x$, по аналогичной, что и $\mathrm{tg}x$ схеме. Предоставляется это сделать самостоятельно.

X. Графики:

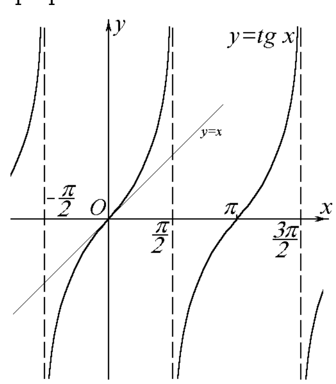


рис. 2.8 а

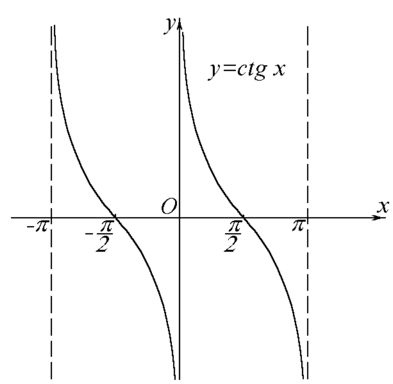


рис. 2.8 б

Отметим, что при $x \to \dfrac{\pi}{2} + n\pi \mp 0$ $\ \mathrm{tg}\, x \to \pm\infty$, а при $x \to n\pi \pm 0$ $\ \mathrm{ctg}\, x \to \pm\infty$ (формулировки соответствующих определений и доказательства даются в курсе математического анализа).

Дополнительный материал к разделу "Тригонометрия"

Материал этого дополнения весьма полезно и важно знать, поскольку он довольно часто используется при решении задач. Речь пойдет о понятии обратной функции, будет доказана теорема о существовании обратной функций, теорема о графиках взаимно обратных функций, рассмотрены примеры существования и не существования обратных функций, приведены различные примеры.

Определение обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X, которое (или, быть может, часть его, множество $X' \subseteq X$) обладает тем свойством, что для каждого элемента $y_0 \in Y'$ (Y' — область значений функции $y = f(x)$, где x — произвольное значение множества X') существует единственное $x_0 \in X'$ такое, что $y_0 = f(x_0)$. Тогда на множестве Y' можно определить функцию, обозначаемую $x = f^{-1}(y)$, (при этом $y = f(x)$), которая и называется *обратной функцией* для функции $y = f(x)$, рассматриваемой на множестве X'.

Из этого определения нетрудно видеть, что обратная функция существует тогда и только тогда, когда между областью, где рассматривается функция $y = f(x)$, и множеством ее соответствующих значений установлено взаимно однозначное соответствие (такие множества называются *эквивалентными*, обозн. $X' \sim Y'$, где $\sim$ — знак эквивалентности множеств).

Также отметим, что в случае существования для функции $y = f(x)$ обратной функции $x = f^{-1}(y)$ функция $y = f(x)$ в свою очередь будет обратной для функции $x = f^{-1}(y)$. Следовательно, можно говорить о паре взаимно обратных функций: $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$.

Если для функции $y = f(x)$, определенной на множестве X (то есть $X = D[f]$), существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, то $D[f] = E[f^{-1}]$, а $E[f] = D[f^{-1}]$, имеют место равенства $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ и $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$. Таким образом, последовательно примененные в любом порядке опрерации f и f^{-1} друг друга взаимно уничтожают.

В дальнейшем мы часто будем менять обозначениями x и y в выражении для обратной функции, то есть обозначать $y = f^{-1}(x)$.

Следует также отметить, что обозначение $f^{-1}(y)$ не следует путать с возведением в (-1) - ю степень, то есть, вообще говоря, $f^{-1}(y) \neq (f(y))^{-1} = 1/f(y)$.

Примеры: 1^0. Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ взаимно обратные, у них $D[a^x] = E[\log_a x] = (-\infty, +\infty)$ и $E[a^x] = D[\log_a x] = (0, +\infty)$, отметим, что каждая из них на всей своей области определения является строго монотонной.

2^0. Функции $y = x^{2n-1}$ и $y = x^{1/(2n-1)} = \sqrt[2n-1]{x}$ $(n \in N)$ взаимно обратные, у них $D[x^{2n-1}] = E[x^{1/(2n-1)}] = (-\infty, +\infty)$ и $E[x^{2n-1}] =$

$= D[x^{1/(2n-1)}] = (-\infty, +\infty)$, отметим, что каждая из них на всей своей области определения является возрастающей.

3^0. Функция $y = x^{2n}$ $(n \in N)$ на всей своей области определения — $(-\infty, +\infty)$ не имеет обратной функции, поскольку $\forall x' \in R \ : \ x' \neq 0 \Rightarrow (-x')^{2n} = (x')^{2n} = y' > 0$, то есть нет взаимно однозначного соответствия между $D[x^{2n}]$ — промежутка $(-\infty, +\infty)$ и $E[x^{2n}]$ — промежутка $[\ 0, +\infty)$. При этом следует отметить, что на $(-\infty, +\infty)$ эта функция не является монотонной.

Однако, если рассматривать функцию $y = x^{2n}$ на каждом из промежутков $(-\infty, 0\ ]$ и $[\ 0, +\infty)$ в отдельности (при этом область значений, принимаемой этой функцией — $[\ 0, +\infty)$), то она уже будет иметь обратную функцию: в первом случае это $y = -x^{1/2n}$ $((-\infty, 0\ ] \sim [\ 0, +\infty))$, при этом каждая из этих двух взаимно обратных функций убывает, а во втором случае это $y = x^{1/2n}$ $([\ 0, +\infty) \sim [\ 0, +\infty))$, при этом каждая из этих двух взаимно обратных функций возрастает.

Замечание. Рассмотренный пример показывает существенность оговорки в определении обратной функции ("быть может, часть его").

4^0. Функция $y = f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in Q, \\ -x, \text{ если } x \in R \setminus Q \end{cases}$ также имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y, \text{ если } y \in Q, \\ -y, \text{ если } y \in R \setminus Q. \end{cases}$

Отметим, что в этом случае по виду функция $y = f(x)$ и обратная ей функция $x = f^{-1}(y)$ совпадают $(f(x) = f^{-1}(x)$, последнее выполняется тогда и только тогда, когда $f(f(x)) = x)$, каждая из них не является монотонной, осуществляя взаимно однозначное соответствие между множествами всех действительных чисел R.

Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ на некотором множестве $X' \subseteq D[f]$ является возрастающей (убывающей). Тогда на множестве Y' соответствующих значений этой функции $(Y' = \{y \in R \ : \ \exists\, x \in X', y = f(x)\})$ определена обратная ей функция $x = f^{-1}(y)$, которая также является возрастающей (убывающей).

Доказательство. Согласно определению возрастающих и убывающих фукнций для любых $x_1 \neq x_2$ (при этом или $x_1 < x_2$, или $x_1 > x_2$) $f(x_1) \neq$ $\neq f(x_2)$, следовательно на множестве Y' можно определить *функцию*, ставя в соответствие каждому $y \in Y'$ то единственное $x \in X'$, при котором $y =$ $= f(x)$, тем самым существование обратной функции $x = f^{-1}(y)$ установлено. Докажем ее возрастание (убывание), то есть что для любых $y_1,\ y_2 \in Y'$ таких, что $y_1 < y_2$ выполняется неравенство $x_1 = f^{-1}(y_1) < (>) f^{-1}(y_2) =$

$= x_2$. Предположим противное, что для некоторой пары $y_1', \ y_2' \in Y'$ таких, что $y_1' < y_2'$ тем не менее $x_1' = f^{-1}(y_1') \geqslant (\leqslant) f^{-1}(y_2') = x_2'$, тогда в силу возрастания (убывания) функции $y = f(x)$ получаем, что $y_1' = f(x_1') \geqslant (\geqslant) f(x_2') = y_2'$, то есть в любом случае $y_1' \geqslant y_2'$, пришли к противоречию с условием выбора $y_1' < y_2'$, которое доказывает теорему.

Замечание 1. Приведенные выше примеры 3^0 и 4^0 показывают, что условие строгой монотонности является существенным для существования обратной функции, однако оно является лишь достаточным и не является необходимым для ее существования.

Замечание 2. Ниже мы докажем также и теорему о строгой выпуклости обратной функции.

Теорема 2. Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой — графика функции $y = x$ (эта прямая является биссектрисой прямых углов первой и третьей четвертей на координатной плоскости Oxy).

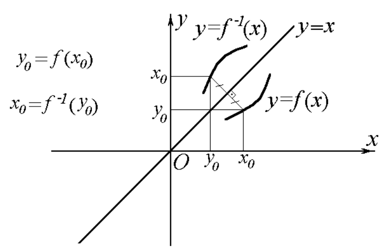


рис. 2.9

Доказательство. См. рис. 2.9. Для упрощения рассуждений будем считать функцию $y = f(x)$ определенной на таком множестве X, что она имеет обратную функцию $y = f^{-1}(x)$, определенную на множестве Y — области изменения функции $y = f(x)$. График функции $y = f(x)$ — множество всех точек на координатной плоскости Oxy с координатами $(x; f(x))$, где x — произвольное число из множества X. Покажем, что $\forall x \in X$ точка $M'(f(x); x)$ симметрична точке $M(x; f(x))$ относительно прямой $y = x$. ГМТ P этой прямой имеет вид $P(z; z)$, где z — произвольное действительное число. Как известно, расстояние от точки до прямой есть длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к указанной прямой, то есть кратчайшее (минимальное) из всевозможных расстояний от этой точки до точек прямой. В случае точки $M(x; f(x))$ ее расстояние до точки $P(z; z)$ вычисляется по формуле

$$\rho(M; P) = \sqrt{(x-z)^2 + (f(x)-z)^2} = \sqrt{(f(x)-z)^2 + (x-z)^2} = \rho(M'; P),$$

следовательно, минимальные из всех расстояний от точек M и M' до точек прямой $y = x$ равны и так как

$\forall z \in R:\ (x-z)^2+(f(x)-z)^2 = 2z^2-2(x+f(x))z+x^2+(f(x))^2 = 2(z-(x+f(x))/2)^2+(x-f(x))^2/2 \geqslant 0$, то они достигаются при $z = z_0 = (x+f(x))/2$. Таким образом, точки $M(x;f(x))$ и $M'(f(x);x)$ расположены на одном перпендикуляре к прямой $y=x$, проходящем через точку $P_0(z_0;z_0)$ на равном расстоянии от нее, причем при $f(x) \neq x \Leftrightarrow M \not\equiv M'$ — по разные стороны от нее, что означает их симметричность относительно прямой $y=x$. График функции $y=f^{-1}(x)$ — множество всех точек на координатной плоскости Oxy с координатами $(x;f^{-1}(x))$, где x — произвольное число из множества Y. Так как $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, то множество точек $M'(f(x);x)$ как раз и есть множество точек $M'(y;f^{-1}(y))$, следовательно, переобозначая y на x, мы и получаем справедливость утверждения теоремы.

Теоремы о выпуклости обратных функций

Для исследования вопроса о выпуклости степенных функций x^α при $\alpha \in R$ и обратных тригонометрических функций докажем теоремы.

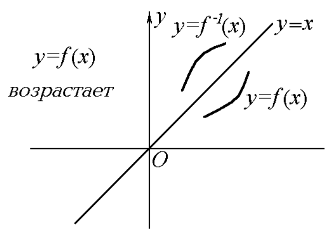


рис. 2.10 а

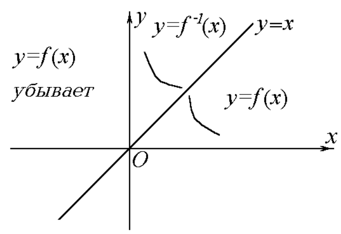


рис. 2.10 б

Теорема 3. Пусть функция $y=f(x)$ на некотором множестве $X' \subseteq D[f]$ является возрастающей и строго выпуклой вверх (вниз). Тогда на множестве Y' соответствующих значений этой функции ($Y' = \{y \in R\ :\ \exists\ x \in X', y = f(x)\}$) определена обратная ей функция $x = f^{-1}(y)$, которая также является возрастающей и строго выпуклой вниз (вверх).

Доказательство. См. рис. 2.10 а. Существование и возрастание обратной функции доказано выше, в теореме 1 на стр. 83 — 84. Фиксируем произвольные $y_1,\ y_2 \in Y'$ такие, что $\dfrac{y_1+y_2}{2} \in Y'$, сравнивая значения обратной функции в полусумме значений y_1 и y_2 с полусуммой ее значений в y_1 и y_2, с учетом возрастания функции $y=f(x)$, получим:

$$f^{-1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) \bigvee \frac{f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\right) \bigvee f\left(\frac{f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1+y_2}{2} \bigvee f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \bigvee f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) .$$

Так как функция $y = f(x)$ строго выпукла вверх (вниз), то последний знак сравнения " $\vee$ " надо заменить на знак " $<$ "(" $>$ ") и мы получаем

$$f^{-1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) < (>) \frac{f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)}{2} ,$$

что и означает строгую выпуклость вниз (вверх) обратной функции $x = f^{-1}(y)$ на множестве Y'. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ на некотором множестве $X' \subseteq D[f]$ является убывающей и строго выпуклой вверх (вниз). Тогда на множестве Y' соответствующих значений этой функции ($Y' = \{y \in R\ :\ \exists\, x \in X',$ $y = f(x)\}$) определена обратная ей функция $x = f^{-1}(y)$, которая также является убывающей и также строго выпуклой вверх (вниз).

Доказательство. См. рис. 2.10 б. Существование и убывание обратной функции доказано выше, в теореме 1 на стр. 83 — 84. Фиксируем произвольные $y_1,\ y_2 \in Y'$ такие, что $\frac{y_1+y_2}{2} \in Y'$, сравнивая значения обратной функции в полусумме значений y_1 и y_2 с полусуммой ее значений в y_1 и y_2, с учетом убывания функции $y = f(x)$, получим:

$$f^{-1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) \bigvee \frac{f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)}{2}\right) \bigvee f\left(f^{-1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \bigvee \frac{y_1+y_2}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \bigvee \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} .$$

Так как функция $y = f(x)$ строго выпукла вверх (вниз), то последний знак сравнения " $\vee$ " надо заменить на знак " $>$ "(" $<$ ") и мы получаем

$$f^{-1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) > (<) \frac{f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)}{2} ,$$

что и означает строгую выпуклость вверх (вниз) обратной функции $x = f^{-1}(y)$ на множестве Y'. Теорема 4 доказана.

Введем теперь обратные тригонометрические функции, исследуем их свойства.

2.12. Свойства обратной тригонометрической функции $y = \arcsin x$ и ее график

Рассмотрим функцию $y = \sin x$, так как она принимает любое свое значение в бесчисленном множестве значений своего аргумента, то на всей своей области определения она не имеет обратной функции, однако рассматривая эту функцию *лишь для значений аргумента* $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, где она возрастает и принимает все значения на отрезке $[-1, 1]$, мы в силу теоремы 1 получим, что при этих условиях она имеет обратную функцию $x = \sin^{-1} y = \arcsin y$ (определение арксинуса числа см. выше, в п. 2.5). Меняя обозначения x на y, а y на x, мы получаем следующие свойства функции $y = \arcsin x$:

I. $D[\arcsin] = [-1, 1]$ $(D[\arcsin] = E[\sin])$.

II. $E[\arcsin] = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ $(E[\arcsin] = D[\sin]$, поскольку функция синус рассматривается на указанном отрезке).

III. Из результатов п. II получаем, что функция $\arcsin x$ ограничена на своей области определения.

IV. Из результатов п. II получаем, что

$\min \arcsin x = -\dfrac{\pi}{2} = \arcsin(-1)$, $\max \arcsin x = \dfrac{\pi}{2} = \arcsin 1$.

V. $y = \arcsin x$ — нечетная функция.

Для доказательства отметим, что поскольку $D[\arcsin]$ симметрична относительно точки $x_0 = 0$, и поскольку при любом $x \in [-1, 1]$ $\arcsin(-x)$ и $-\arcsin x$ принимают значения на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, на котором функция синус возрастает, то из равенств (в силу нечетности функции синус) $\sin(\arcsin(-x)) = -x$ и $\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x$ и вытекает, что $\forall x \in [-1, 1]$ $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

VI. Функция $y = \arcsin x$ — не является периодической.

Этот факт вытекает хотя бы из того, что область определения этой функции ограничена и снизу, и сверху (числами $-\pi/2$ и $\pi/2$), что не соответствует введенному определению периодической функции.

VII. $\arcsin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\arcsin x < 0$ на $[-1, 0)$ и $\arcsin x > 0$ на $(0, 1]$.

Эти факты следуют из определения арксинуса числа 0 и возрастания функции $y = \arcsin x$ на всей своей области определения (отрезке $[-1, 1]$).

VIII. Функция $y = \arcsin x$ возрастает на всей своей области определения (отрезке $[-1, 1]$).

Этот факт вытекает из теоремы 1 о строгой монотонности обратной функции и возрастания функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$.

IX. Функция $\arcsin x$ строго выпукла вниз (вверх) на отрезке $[0, 1]$ $([-1, 0])$.

Этот факт вытекает из того, что функция $\sin x$ строго выпукла вверх (вниз) на отрезке $[0, \pi/2]$ $([-\pi/2, 0])$ и теоремы 3.

X. График функции:

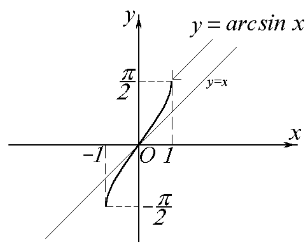


рис. 2.11 а

точка $O(0;0)$ — точка пересечения графика функции с осями Ox и Oy.

Замечание. Отметим, что рассматривая функцию синус на любом другом из отрезков, где она или всюду возрастает, или всюду убывает, точно таким же образом мы можем построить для нее обратную функцию, которая, будет отличаться от построенной функции $y = \arcsin x$. Такого рода задачу мы предлагаем решить учащимся.

2.13. Свойства обратной тригонометрической функции $y = \arccos x$ и ее график

Рассмотрим функцию $y = \cos x$, так как она принимает любое свое значение в бесконечном множестве значений своего аргумента, то на всей своей области определения она не имеет обратной функции, однако рассматривая эту функцию *лишь для значений аргумента* $x \in [0, \pi]$, где она убывает и принимает все значения на отрезке $[-1, 1]$, мы в силу теоремы 1 получим, что при этих условиях она имеет обратную функцию $x = \cos^{-1} y = \arccos y$ (определение арккосинуса числа см. выше, в п. 2.6). Меняя обозначения x на y, а y на x, мы получаем следующие свойства функции $y = \arccos x$:

I. $D[\arccos] = [-1, 1]$ $(D[\arccos] = E[\cos])$.

II. $E[\arccos] = [0, \pi]$ $(E[\arccos] = D[\cos]$, поскольку функция косинус рассматривается на указанном отрезке).

III. Из результатов п. II получаем, что функция $\arccos x$ ограничена на своей области определения.

IV. Из результатов п. II получаем, что

$\min \arccos x = 0 = \arccos 1, \quad \max \arccos x = \pi = \arccos(-1)$.

V. $y = \arccos x$ — функция общего вида, она не является четной и не является нечетной.

Этот факт вытекает из следующего равенства $\forall x \in [-1, 1]: \ \arccos(-x) = \pi - \arccos x$, которое в свою очередь следует из таких рассуждений: поскольку при любом $x \in [-1, 1]$ $\arccos(-x)$ и $\pi - \arccos x$ принимают значения на отрезке $[0, \pi]$, на котором функция косинус убывает, то из равенств

$\cos(\arccos(-x)) = -x$ и $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$ и вытекает указанное выше равенство.

VI. Функция $y = \arccos x$ — не является периодической.

Этот факт вытекает хотя бы из того, что область определения этой функции ограничена и снизу, и сверху (числами 0 и π), что не соответствует введенному определению периодической функции.

VII. $\arccos x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $\arccos x > 0$ на $[-1, 0)$.

Эти факты следуют из определения арккосинуса числа 1 и убывания функции $y = \arccos x$ на всей своей области определения (отрезке $[-1, 1]$).

VIII. Функция $y = \arccos x$ убывает на всей своей области определения (отрезке $[-1, 1]$).

Этот факт вытекает из теоремы 1 о строгой монотонности обратной функции и убывания функции $y = \cos x$ на отрезке $[0, \pi]$.

IX. Функция $\arccos x$ строго выпукла вниз (вверх) на отрезке $[-1, 0]$ ($[0, 1]$).

Этот факт вытекает из того, что функция $\cos x$ также строго выпукла вниз (вверх) на отрезке $[\pi/2, \pi]$ ($[0, \pi/2]$) и теоремы 4.

X. График функции:

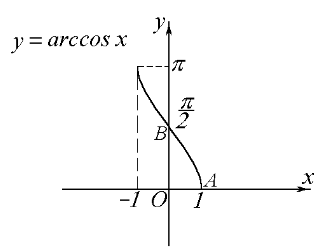


рис. 2.11 б

точка $A(1; 0)$ — точка пересечения графика функции с осью Ox, точка $B(0; \pi/2)$ — точка пересечения графика функции с осью Oy.

Замечание. Отметим, что рассматривая функцию косинус на любом другом из отрезков, где она или всюду возрастает, или всюду убывает, точно таким же образом мы можем построить для нее обратную функцию, которая, будет отличаться от построенной функции $y = \arccos x$. Такого рода задачу мы предлагаем решить учащимся.

2.14. Свойства обратной тригонометрической функции $y = \operatorname{arctg} x$ и ее график

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$, так как она принимает любое свое значение в бесчисленном множестве значений своего аргумента, то на всей своей области определения она не имеет обратной функции, однако рассматривая эту функцию *лишь для значений аргумента* $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, где она возрастает и принимает все значения на промежутке $(-\infty, +\infty)$, мы в силу теоремы 1 получим, что при этих условиях она имеет обратную функцию $x = \operatorname{tg}^{-1} y = \operatorname{arctg} y$ (определение арктангенса числа см. выше, в п. 2.7). Меняя обозначения x на y, а y на x, мы получаем следующие свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

I. $D[\operatorname{arctg}] = (-\infty, +\infty)$ $(D[\operatorname{arctg}] = E[\operatorname{tg}])$.

II. $E[\operatorname{arctg}] = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $(E[\operatorname{arctg}] = D[\operatorname{tg}]$, поскольку функция тангенс рассматривается на указанном интервале).

III. Из результатов п. II получаем, что функция arctg x ограничена на своей области определения.

IV. Из результатов п. II получаем, что

$\min \operatorname{arctg} x$ и $\max \operatorname{arctg} x$ не существуют. Идея доказательства такая же, как при доказывальсве выше отсутствия минимального значения у ограниченного снизу нулем множества значений показательной функции.

V. $y = \operatorname{arctg} x$ — нечетная функция.

Для доказательства отметим, что поскольку $D[\operatorname{arctg}]$ симметрична относительно точки $x_0 = 0$, и поскольку при любом $x \in (-\infty, +\infty)$ $\operatorname{arctg}(-x)$ и $-\operatorname{arctg} x$ принимают значения на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, на котором функция тангенс возрастает, то из равенств (в силу нечетности функции тангенс) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-x)) = -x$ и $\operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} x) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = -x$ и вытекает, что $\forall x \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

VI. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ — не является периодической.

Этот факт вытекает из того, эта функция возрастающая, поэтому все свои значения она принимает ровно один раз.

VII. $\operatorname{arctg} x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\operatorname{arctg} x < 0$ на $(-\infty, 0)$ и $\operatorname{arctg} x > 0$ на $(0, +\infty)$.

Эти факты следуют из определения арктангенса числа 0 и возрастания функции $y = \operatorname{arctg} x$ на всей своей области определения (промежутке $(-\infty, +\infty)$).

VIII. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает на всей своей области определения (промежутке $(-\infty, +\infty)$).

Этот факт вытекает из теоремы 1 о строгой монотонности обратной функции и возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$.

IX. Функция $\operatorname{arctg} x$ строго выпукла вверх (вниз) на промежутке $[0, +\infty)$ $((-\infty, 0])$.

Этот факт вытекает из того, что функция $\operatorname{tg} x$ строго выпукла вниз (вверх) на полуотрезке $[0\ ,\ \pi/2)$ $((-\pi/2, 0])$ и теоремы 1.

X. График функции:

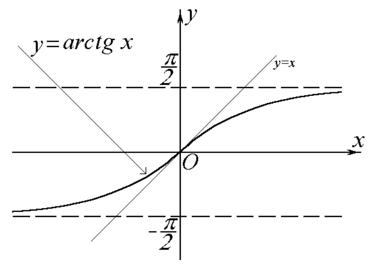


рис. 2.11 в

точка $O(0;0)$ — точка пересечения графика функции с осями Ox и Oy. Можно еще отметить и поведение этой функции на границах области определения, которые вытекают из соответствующих поведений функции тангенс: при $x \to +\infty(-\infty)$ $\operatorname{tg} x \to \pi/2 - 0(-\pi/2+0)$. Эти факты доказываются в курсе математического анализа.

Замечание. Отметим, что рассматривая функцию тангенс на любом другом из интервалов, где она всюду возрастает, точно таким же образом мы можем построить для нее обратную функцию, которая будет отличаться от построенной функции $y = \operatorname{arctg} x$. Такого рода задачу мы предлагаем решить учащимся.

2.15. Свойства обратной тригонометрической функции $y = \operatorname{arcctg} x$ и ее график

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$, так как она принимает любое свое значение в бесконечном множестве значений своего аргумента, то на всей своей области определения она не имеет обратной функции, однако рассматривая эту функцию *лишь для значений аргумента* $x \in (0, \pi)$, где она убывает и принимает все значения на промежутке $(-\infty, +\infty)$, мы в силу теоремы 1 получим, что при этих условиях она имеет обратную функцию $x = \operatorname{ctg}^{-1} y = \operatorname{arcctg} y$ (определение арккотангенса числа см. выше, в п. 2.8). Меняя обозначения x на y, а y на x, мы получаем следующие свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

I. $D[\operatorname{arcctg}] = (-\infty, +\infty)$ $(D[\operatorname{arcctg}] = E[\operatorname{ctg}])$.

II. $E[\operatorname{arcctg}] = (0, \pi)$ $(E[\operatorname{arcctg}] = D[\operatorname{ctg}]$, поскольку функция котангенс рассматривается на указанном интервале).

III. Из результатов п. II получаем, что функция $\operatorname{arcctg}\, x$ ограничена на своей области определения.

IV. Из результатов п. II получаем, что

$\min \operatorname{arcctg} x$ и $\max \operatorname{arcctg} x$ не существуют. Идея доказательства такая же, как при доказывальстве вышк отсутствия минимального значения у ограниченного снизу нулем множества значений показательной функции.

V. $y = \operatorname{arcctg} x$ — функция общего вида, то есть она не является четной и не является нечетной.

Этот факт вытекает из следующего равенства $\forall x \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$, которое в свою очередь следует из таких рассуждений: поскольку при любом $x \in (-\infty, +\infty)$ $\operatorname{arcctg}(-x)$ и $\pi - \operatorname{arcctg} x$ принимают значения на интервале $(0\ ,\ \pi)$, на котором функция котангенс убывает, то из равенств $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-x)) = -x$ и $\operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arcctg} x) =$ $= -\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = -x$ и вытекает указанное выше равенство.

VI. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ — не является периодической.

Этот факт вытекает из того, эта функция убывающая, поэтому все свои значения она принимает ровно один раз.

VII. $\operatorname{arcctg} x > 0$ на $(-\infty, +\infty)$, нулей не имеет.

Эти факты следуют из п. II.

VIII. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ убывает на всей своей области определения (промежутке $(-\infty, +\infty)$).

Этот факт вытекает из теоремы 1 о строгой монотонности обратной функции и убывания функции $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0, \pi)$.

IX. Функция $\operatorname{arcctg} x$ строго выпукла вниз (вверх) на промежутках $[0, +\infty)$ ($(-\infty, 0]$).

Этот факт вытекает из того, что функция $\operatorname{ctg} x$ также строго выпукла вниз (вверх) на полуотрезке $(0, \pi/2]$ ($[\pi/2, \pi)$) и теоремы 4.

X. График функции:

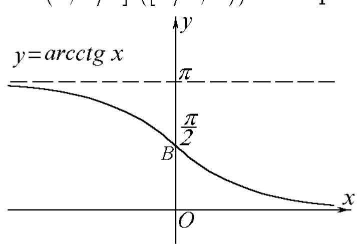


рис. 2.11 г

точка $B(0; \pi/2)$ — точка пересечения графика функции с осью Oy. Можно еще отметить и поведение этой функции на границах области определения, которые вытекают из соответствующих поведений функции котангенс: при $x \to +\infty(-\infty)$ $\operatorname{ctg} x \to 0 + 0(\pi - 0)$. Эти факты доказываются в курсе математического анализа.

Замечание. Отметим, что рассматривая функцию котангенс на любом другом из интервалов, где она всюду убывает, точно таким же образом мы можем построить для нее обратную функцию, которая будет отличаться от построенной функции $y = \operatorname{arcctg} x$. Такого рода задачу мы предлагаем решить учащимся.