

Е.Н. Васильев, В.В. Солодухов

ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ*

1. Введение

С появлением ЭВМ численные методы начали интенсивно разрабатываться и широко внедряться во всех областях науки и, в частности, в теории дифракции. Наиболее интенсивно они развивались в резонансной области (характерный размер порядка длины волны). Переход в область высоких частот был связан с большими вычислительными трудностями. Их преодоление шло двумя путями, это разработка быстрых алгоритмов и применение гибридных методов, сочетающих численные и асимптотические подходы.

По первому направлению отметим работы Рохлина с соавторами, видимо это один из пионеров в разработке этого метода [1].

Среди гибридных методов имеется по крайней мере два в какой-то мере альтернативных направления. В многочисленных работах Медьеши-Митшанга [2] используется следующий прием. На поверхности тела выделяются гладкие части и для описания полей на них используется один из квазиоптических методов и только на той части поверхности, где велика кривизна, или имеются другие нерегулярности используется метод интегральных уравнений. Такой подход позволяет уменьшить размеры области интегрирования в интегральном уравнении, а следовательно, и порядок систем линейных алгебраических уравнений, к которым сводится интегральное уравнение при его численном решении. Это позволило приблизиться к квазиоптическому диапазону длин волн.

Второе направление в разработке гибридных методов развивают авторы данного сообщения. Оно состоит в расширении возможностей уже зарекомендовавших себя геометрической и физической теорий дифракции (ГТД и ФТД).

Оба этих метода опираются на решение некоторых модельных задач, описывающих главные черты явлений дифракции для определенного класса тел. Основной недостаток этих теорий – малая область применимости, обусловленная крайне малым числом решенных модельных задач.

Действительно, подавляющее большинство результатов, полученных с помощью ГТД и ФТД, базируется на одной модельной задаче, а именно, на задаче дифракции на идеально проводящем клине. Решение этой задачи получено аналитически. Надо заметить, что трудности реше-

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований. Проекты № 98-02-16845 и № 00-02-16200.

ния модельных задач имеют два аспекта. Во-первых, получение формального решения, и, во-вторых, извлечение из него дифракционных коэффициентов для ГТД и неравномерной составляющей плотности тока для ФТД. Эти трудности таковы, что не приходится ожидать существенного успеха в получении решения новых задач, особенно применительно к диэлектрическим телам и металло-диэлектрическим структурам.

Одним из перспективных подходов к решению новых модельных задач является применение численных методов. Этот путь, развиваемый авторами в течение длительного времени, имеет ряд преимуществ. Во-первых, широкая область применения (в настоящее время решены такие дифракционные задачи, как дифракция на диэлектрическом и многослойном клине, металлические объекты с частичным диэлектрическим покрытием, структуры, поддерживающие поверхностные волны). Во-вторых, структура полученного решения такова, что необходимая для использования в ФТД и ГТД информация (неравномерные токи и дифракционные коэффициенты) извлекаются из него совершенно непринужденно.

Основная трудность, которую приходится преодолевать в процессе решения, связана с тем, что модельное тело принципиально является бесконечно протяженным, чтобы иметь единственный центр рассеяния. В связи с этим был разработан метод численного решения задач дифракции на телах с бесконечно протяженными границами.

В ГТД и ФТД рассматриваются центры рассеяния типа «ребро» и «вершина». «Ребро» представляет собой нерегулярность, у которой в продольном направлении параметры (такие, как радиус кривизны поверхности, поверхностный импеданс, диэлектрическая и магнитная проницаемости) меняются медленно на расстоянии длины волны, а в поперечном направлении, перпендикулярном первому, параметры меняются быстро на том же расстоянии. В модельной задаче в соответствии с принципами ГТД и ФТД параметры вдоль первого направления полагаются неизменными, а вдоль второго меняются так же, как у реальной нерегулярности. Таким образом, модельное тело для нерегулярности типа «ребро» является цилиндрическим, а соответствующая модельная задача либо двумерной, либо квазитрехмерной. Именно нерегулярность такого вида и будет обсуждаться в данном сообщении.

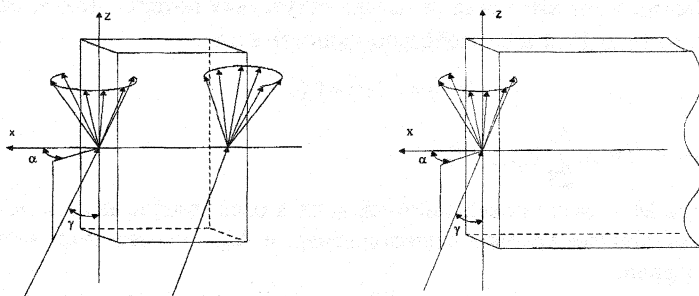
У нерегулярности типа «вершина» параметры быстро меняются вблизи некоторой точки и изменяются медленно вдали от нее. Размеры области быстрого изменения параметров являются для обеих нерегулярностей резонансными, то есть имеют порядок длины волны.

Модельные задачи для нерегулярности типа «вершина» являются трехмерными и поэтому значительно более сложными.

2. Численное решение задачи дифракции на телах с бесконечно протяженными границами.

Метод численного решения задач дифракции на бесконечных структурах рассмотрим на примере задачи падения плоской волны на край полубесконечной диэлектрической пластины с толщиной порядка длины волны. Здесь будут рассмотрены все основные аспекты разработанной методики. Особый интерес эта задача представляет потому, что при отсутствии потерь в такой пластине могут распространяться поверхностные волны, возбужденные на ее краю.

Известно [3], что задача дифракции на диэлектрическом теле, произвольной формы с цилиндрическими границами может быть сведена к системе четырех интегральных уравнений (ИУ) Фредгольма второго рода относительно плотностей эквивалентных поверхностных токов. В силу однородности цилиндрического модельного тела по координате z существует возможность использовать преобразование Фурье вдоль нее и тем самым перейти к одномерным интегральным уравнениям относительно плотностей эквивалентных токов, которые можно решать численно для диэлектрического цилиндра с любой формой поперечного сечения, налагая лишь требование гладкости поверхности. Для наших целей рассмотрим две конфигурации, показанные на рис 1, где изображены две диэлектрических пластины - конечной ширины (а) и полубесконечная (б).



а). Пластина конечной ширины

б). Полубесконечная пластина

Рис 1. Геометрия задачи

Система ИУ для упрощения записи может быть представлена в матричной форме [4]

$$I(\nu) + 0,5 \int_{\nu} P(\nu, \nu') I(\nu') d\nu = I^{\Pi}(\nu) \quad (1)$$

Здесь векторы столбцы первичных $I^{\star}(\nu)$ и искомых плотностей по-

верхностных токов имеют четыре составляющих (по две электрического и магнитного токов)

$$\begin{aligned} I^{\Pi} &= \{J_v^{\text{ЭП}} J_z^{\text{ЭП}} J_v^{\text{МП}} J_z^{\text{МП}}\} \\ I &= \{J_v^{\text{Э}} J_z^{\text{Э}} J_v^{\text{М}} J_z^{\text{М}}\} \end{aligned} \quad (2)$$

Ядро ИУ (1) $P(v, v')$ представляет собой матрицу размера 4×4 , элементы которой выражаются через функции Ганкеля [4]. Уравнение записаны в обобщенной цилиндрической системе координат, где координата v является касательной в каждой точке контура поперечного сечения пластины. Интегрирование производится по всему контуру.

Отметим, что входящие в уравнения первичные токи $J^{\text{ЭП}}$, $J^{\text{МП}}$ — известные токи, определяемые полем падающей плоской волны.

Провести численное решение задачи для полубесконечной пластины нельзя, так как в этом случае контур поперечного сечения (Рис. 2.) имеет бесконечную длину. Обойти эту трудность позволяет представление неизвестных поверхностных токов в виде суммы равномерной и неравномерной составляющих. Неравномерная составляющая I^1 связана с дифракционными явлениями на краю пластины и достаточно быстро убывает с расстоянием от него, а равномерная (неубывающая с расстоянием от края пластины) — I^0 — токами геометрической оптики $I^{\text{ГО}}$ и поверхностными волнами $I^{\text{ПВ}}$, возбужденными на краю и распространяющимися вдоль пластины без затухания (в случае отсутствия потерь). Таким образом, искомый ток $I(v)$ целесообразно записать в виде

$$I(v) = I^0(v) + I^1(v) \quad (3)$$

$$\text{где } I^0(v) = I^{\text{ГО}}(v) + \sum_{m=1}^M A_m I_m^{\text{ПВ}}(v)$$

Здесь M — число поверхностных волн в бесконечной пластине, для которых выполнено условие существования, а A_m — неизвестные амплитуды этих волн.

Подставляя (3) в (1) и считая, что на расстоянии L от торца пластины (рис 2) неравномерная составляющая пренебрежимо мала по сравнению с равномерной, получим следующую систему ИУ

$$I(v) + 0,5 \int_{v_2} P(v, v') I(v') dv' = I^{\Pi}(v) - 0,5 \Delta I(v) \quad (4)$$

$$\Delta I(v) = \int_{v_1, v_3} P(v, v') I^{\text{ГО}}(v') dv' + \sum_{m=1}^M A_m \int_{v_1, v_3} P(v, v') I_m^{\text{ПВ}}(v') dv' \quad (5)$$

В ИУ (4) длина контура интегрирования оказывается теперь конечной и оно стандартным способом сводится к системе линейных алгебраических уравнений

ческих уравнений, которая решается численно. Заметим, что если материал пластины обладает большими потерями, то поверхностные волны на пути L затухают, все коэффициенты A_m следует положить равными нулю, и решение упрощается. В случае малых потерь коэффициенты A_m должны быть определены, и для этого был разработан итерационный метод.

Правая часть ИУ (4) отличается от исходной наличием интегралов от произведений ядер на равномерные составляющие токов, для которых легко записываются явные аналитические выражения. Эти интегралы могут быть выражены через введенные ранее [5,6] специальные функции

$$N_\nu(\lambda, \chi, \xi_0, \varsigma_0) = \int_0^\infty \exp(-i\lambda\xi) \rho^{-\nu} H_\nu^{(2)}(\chi\rho) d\xi$$

$$M_\nu(\lambda, \chi, \xi_0, \varsigma_0) = \int_0^\infty \exp(-i\lambda\xi) \xi \rho^{-\nu} H_\nu^{(2)}(\chi\rho) d\xi$$
(6)

где $\rho = [(\xi + \xi_0) + \varsigma_0]^{1/2}$, $\lambda > 0, \xi_0, \varsigma_0$ — действительные числа, $\nu = 0, 1$.

Способ вычисления этих функций в большой мере определяет ограничения, накладываемые на допустимую область изменения параметров задачи, а также быстродействие всего алгоритма. Поэтому большое внимание было уделено оптимизации метода их вычисления. Первоначально [5] было предложено перейти от интеграла по действительной полуоси ξ , где подынтегральное выражение — колеблющаяся функция, к интегралу по мнимой полуоси комплексной плоскости ξ , где функция Ганкеля экспоненциально убывает на бесконечности, после чего использовались формулы Гаусса наивысшей степени алгебраической точности. Дальнейшие исследования показали, что эти интегралы могут быть взяты аналитически, что приводит к бесконечному ряду следующего вида

$$N_\nu(\lambda, \chi, \xi_0, \varsigma_0) = \left(\frac{\pi\rho_0}{2\chi} \right)^{1/2} \frac{e^{i\lambda\xi_0}}{\rho_0^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n J_{n/2}(\lambda\xi_0) *$$

$$* \left[\left(\frac{\xi_0\chi}{\lambda\rho_0} \right)^{n/2} H_{\frac{n-1}{2}+\nu}(\chi\rho_0) - i(-1)^\nu \left(\frac{\lambda\rho_0}{\xi_0\chi} \right)^{n/2} H_{\frac{n+1}{2}-\nu}(\chi\rho_0) \right]$$
(7)

где $\rho_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \varsigma_0^2}$, $\varepsilon = \begin{cases} 1/2, & \text{при } n=0 \\ 1, & \text{при } n \neq 0 \end{cases}$

После улучшения сходимости ряда удалось получить эффективный алгоритм и довольно быстродействующие программы вычисления указанных специальных функций.

В правую часть ИУ (4) входят неизвестные амплитуды A_m возбуж-

денных поверхностных волн. Для нахождения этих амплитуд был разработан итерационный алгоритм, при котором решение эквивалентной СЛАУ выполняется один раз. Решение задачи записывается как сумма частичных решений для первичных токов, интегралов от токов геометрической оптики и интегралов от поверхностных волн с единичной амплитудой. На первом шаге (нулевое приближение) амплитуды всех поверхностных волн полагаются равными нулю. На участках пластины $[1, L]$ и $[-1, -L]$ (см. рис (2)), входящих в контур интегрирования, но достаточно удаленных от края, так что неравномерной составляющей тока можно пренебречь, приравнивается в нескольких точках полученное решение и представление равномерной составляющей с неизвестными коэффициентами возбуждения поверхностных волн

$$I^{IO}(v) + \sum_{m=1}^M A_m I_m^{PB}(v) = I^0(v) \quad (8)$$

Число точек сшивания необходимо взять больше, чем число возбужденных поверхностных волн. Полученную переопределенную СЛАУ относительно коэффициентов A_m можно решить в среднеквадратичном приближении, что дает первое приближение для A_m . На следующем шаге в качестве исходного принимается первое приближение $I^1(v)$ и процесс сшивания повторяется до тех пор, пока решение не стабилизируется. Обычно требуется 5-6 итераций. Отметим кстати, что сходимость решения ИУ на участке $[1, L]$ именно к равномерной составляющей токов является достаточно надежным подтверждением самосогласованности предлагаемого метода решения и правильности работы всех алгоритмов и программ.

Полученное распределение полных поверхностных токов используется для вычисления рассеянного поля (дифракционных коэффициентов). При этом распределение неравномерных составляющих токов получается естественным образом.

3. Гибридные геометрическая и физическая теории дифракции

Описанные выше алгоритмы и программы решения модельных задач, т.е. задач дифракции на бесконечных и полубесконечных структурах обеспечивают вычисление дифракционных коэффициентов для ГТД и неравномерной составляющей токов для ФТД. Однако в наиболее интересном случае наличия в рассматриваемой структуре поверхностных волн решению интегральных уравнений должно предшествовать определение направлений распространения этих волн. Первым шагом в этой процедуре является представление падающего поля в виде суперпозиции волн Е и Н поляризации, для чего необходимо найти проекции на ось нерегулярности

(типа «ребро») векторов E и H падающего поля [7]. Это необходимо сделать, поскольку и дифракционные коэффициенты и неравномерная составляющая токов различны для полей E и H поляризации.

Учтем теперь, что в модельной задаче параметры вдоль оси нерегулярности (ось z) неизменны. Тогда поле может быть разложено в интеграл Фурье. Падающая волна, которая предполагается плоской, представляет собой одну гармонику Фурье по z из непрерывного спектра. В силу ортогональности гармоник Фурье рассеянное поле в модельной задаче будет представлять собой ту же гармонику Фурье по z , что и падающее поле. Иначе говоря, падающее на нерегулярность поле и все вторичные поля, в том числе и поверхностные волны должны иметь одну и ту же фазовую скорость вдоль z .

Этот факт имеет интересные и важные следствия. Первое из них то, что хорошо изученные конусы лучей, возникающие при падении луча на кромку идеально проводящей плоскости, имеются и на любой другой нерегулярности типа «ребро». Такой нерегулярностью может быть диэлектрический клин, край диэлектрической пластины и множество других.

Условие равенства фазовой скорости поверхностной волны номер n и пространственной волны записывается в виде, подобном закону Снеллиуса

$$k_0 \cos(\gamma) = \chi_{en} \cos \Theta \quad (9)$$

Здесь Θ – искомый угол между направлением распространения поверхностной волны и осью z , χ_{en} – волновое число n -ой поверхностной волны, γ – угол между направлением падающей волны и осью z . Аналогичная формула определяет направление трансформированной поверхностной волны номер m (угол Θ_m) по отношению к оси z , если на край пластины падает плоская поверхностная волна номер n (угол Θ_n).

$$\chi_{en} \cos(\Theta_n) = \chi_{em} \cos(\Theta_m) \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что поверхностная волна в реальной (не модельной) задаче пройдя вдоль пластины выходит на край и там эта волна отражается, трансформируется в другие типы волн и излучается, образуя в пространстве конус лучей вторичной дифракции. При этом для расчета амплитуд используется геометрикооптический закон сохранения энергии в лучевой трубке.

Очевидно, что такая картина дифракции и будет иметь место для тел вида плоской пластины ограниченной контуром с большим по сравнению с длиной волны радиусом кривизны. В случае неплоской пластины поверхностная волна излучается, что необходимо учитывать. Методика этого учета в настоящее время разрабатывается.

Описанный комбинированный численно-асимптотический подход (гибридная геометрическая теория дифракции) был применен к реше-

нию задачи дифракции плоской волны на диэлектрическом диске большого радиуса. При этом учитывались лучи первичной и вторичной дифракции. Проведено сравнение результатов расчета рассеянного поля со строгим решением задачи методом интегральных уравнений. Сравнение показало хорошее совпадение результатов [7].

Остановимся теперь на возможностях *гибридной физической теории дифракции*, которая обобщает физическую оптику. Если тело, на котором дифрагирует волна, обладает большими потерями, позволяющими применить граничные условия Леонтовича, то приближение физической оптики строится очевидным образом по аналогии со случаем идеального проводника. Это означает, что находятся плотности токов на плоской поверхности и найденные токи переносятся на искривленную поверхность.

Приближение физической оптики в случае малых потерь можно построить простыми средствами только для плоских структур, например для диска [7] или другого тела, вырезанного из плоской пластины, но так чтобы контур края не имел бы областей с малым по сравнению с длиной волны радиусом кривизны.

В такой пластине будут образовываться поверхностные волны и далее, попадая на край пластины, переизлучаться и отражаться в виде поверхностных волн. С помощью гибридной ФТД можно получить дифракционные поля только первого порядка. ФТД не имеет средств для учета переизлученных поверхностными волнами полей. Поля второго и следующих порядков можно найти только с помощью гибридной ГТД.

4. Заключение

Изложенный в данном сообщении численный метод решения задач дифракции на телах с бесконечно протяженными границами (диэлектрических и металло-диэлектрических) позволяет существенно расширить класс задач, которые могут быть использованы в качестве модельных для ГТД и ФТД. Это, в свою очередь, столь значительно расширяет возможности последних, что можно говорить о создании новых комбинированных (численно-асимптотических) подходов — гибридной геометрической теории дифракции и гибридной физической теории дифракции.

Литература

1. R. Coifman, .V Rohlin. The Fast Multipol Method for the Wave Equation: A Pedestrian Prescription IEEE Antennas and Propagation Magazine v.35 N. 3 June 1993 pp. 7-12.
2. Л.Н. Медьеша-Митшанг, Ван Досин. Гибридные методы анализа отражений от объектов сложной формы. ТИИЭР т.77, №5,1989 с. 147-157
3. Vasil'ev E.N., Solodukhov V.V., Fedorenko A.I. The integral equation method in the problem of the electromagnetic wave diffraction by complex bodies. Electeromagnetics.-1991.-Vol.11. No.2.-PP.161-182.
4. В.В. Солодухов, Е.Н. Васильев. Дифракция плоской электромагнитной волны на диэлектрическом цилиндре с произвольной формой поперечного сечения. ЖТФ, т. XL в.1 1970 с. 47-54
5. Е.Н. Васильев, В.В. Солодухов. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрическом клине. Известия Вузов, радиофизика т.XVII №10 1974, с.с. 1518-1528
6. Vasil'ev E.N, Solodukhov V.V. Makkaveeva V.F. Numerical solving of a new class of canonical problems and their application. Radio Science 1996. –Vol. 31 No. 6. – pp. 1853-1861.
7. E.N. Vasil'ev, V.V. Solodukhov. Hybrid Geometrical Theory of Diffraction. Journal of Comm. Technology and Electronics, v.45 Suppl 2. 2000 pp S184-S195.