

ОБ ОЦЕНКЕ ДЛИНЫ ПРОВЕРЯЮЩЕГО ТЕСТА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ БЕСПОВТОРНЫХ ФУНКЦИЙ¹

В настоящей работе рассматривается одна из конкретных постановок классической задачи построения проверяющего теста [1]. В качестве тестируемого объекта рассматриваются функции, выражимые бесповторными формулами в базисе, содержащем все функции, зависящие не более, чем от двух переменных. Обзор работ, посвященных критериям выразимости булевых функций бесповторными формулами в различных базисах, можно найти в сборнике [2]. В настоящей работе *бесповторными* называются булевы функции, выражимые бесповторными формулами в базисе, содержащем все функции, зависящие не более, чем от двух переменных. Это определение отличается от определения, используемого авторами [2] тем, что ему удовлетворяют константы 0 и 1.

Задача тестирования дискретных объектов наиболее подробно изучена для монотонных булевых функций. Нижняя оценка функции Шеннона получена в статье [3], задача расшифровки решена в работе [4]. Задача расшифровки монотонных k -значных функций рассматривалась в статье [5]. Задача расшифровки (получения условного диагностического теста) для бесповторной функции в классе всех бесповторных функций является вырожденной: для того, чтобы различить между собой константу 1 и все функции вида $x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$ требуется перебрать все наборы. Более того, данный пример показывает, что и проверяющий тест для функции $1(x_1, \dots, x_n)$ в классе всех бесповторных функций также содержит все наборы.

Представляет содержательный интерес следующая постановка задачи. Дана бесповторная функция $f(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящая от всех своих переменных. Требуется построить проверяющий тест для $f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве всех бесповторных функций, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$ произвольным образом. Эту задачу назовем построением *теста для f относительно бесповторной альтернативы*.

Задача имеет следующую интерпретацию. Бесповторные функции и только они реализуются схемами из функциональных элементов без каких-либо ветвлений. Константные неисправности и нарушения работы

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, коды проектов 01-01-00266, 02-01-01110

элементов не приводят к потере свойства неповторности. Если мы хотим проверить реализуется ли данная нам схема без ветвлений с множеством входов $x_1, \dots, x_n$, неизвестным конкретным внутренним строением и неизвестными неисправностями функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, то нам требуется решить рассматриваемую задачу. Эта задача исследовалась автором в статье [6], где был оценен порядок соответствующей функции Шеннона. В настоящей работе строятся индивидуальные примеры функций, для которых удастся достаточно точно оценить минимальную длину теста.

Статья построена следующим образом. Сначала приводятся необходимые сведения из статьи [6]. Далее рассматриваются неповторные функции, представимые формулами в базисе $\{\oplus, \vee\}$ (функции типа Σ). Доказывается, что неповторная функция, существенно зависящая от всех переменных, имеет тип Σ тогда и только тогда, когда она равна единице на наборах с одной единицей и нулю на нулевом наборе. После этого строятся примеры легко и сложно тестируемых функций типа Σ , комбинации которых имеют произвольную минимальную длину теста.

1. Краткий обзор результатов [6].

Каноническим деревом назовем помеченное корневое дерево, удовлетворяющее следующим условиям.

1. Константой (0 или 1) может быть помечен лишь изолированный корень.
2. Листья дерева помечены переменными или их отрицаниями (литералами). Разные листья помечены литералами, соответствующими различным переменным.
3. Внутренние вершины помечены либо линейными ($\oplus, \overline{\oplus}$), либо нелинейными ($\vee, \&$) символами.
4. Смежные вершины помечены различными символами. Смежные вершины не могут быть одновременно помечены линейными символами.
5. Вершина, лежащая над помеченной линейным символом и смежная с ней, не может быть помечена $\&$ или отрицанием переменной. При этом считается, что корень расположен снизу.

Функция, реализуемая каноническим деревом, определяется от листьев к корню по естественному правилу: в вершине, помеченной символом $\circ$, над которой расположены s вершин, в которых реализуются функции $f_1, \dots, f_s$, реализуется функция $f_1 \circ \dots \circ f_s$ (если $\circ = \oplus$, то реализуется отрицание суммы по модулю 2 этих функций).

Утверждение 1. ([6]. Лемма 10 (основная)). *Любая бесповторная функция представима единственным каноническим деревом.*

Пусть подфункция $f(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, u, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{j-1}, v, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n)$ функции $f(x_1, \dots, x_n)$ является существенной. Тогда множество наборов

$$\begin{aligned} &(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, 0, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{j-1}, 0, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n) \\ &(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, 0, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{j-1}, 1, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n) \\ &(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, 1, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{j-1}, 0, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n) \\ &(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, 1, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{j-1}, 1, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n) \end{aligned}$$

называется *квадратом существенности* переменных x_i и x_j функции f . Множеством *квадратов существенности* функции называется произвольное множество наборов, которое для любой пары существенных переменных содержит некоторый квадрат их существенности.

Утверждение 2. ([6]. Теорема 1.) *Множество квадратов существенностей произвольной бесповторной функции является проверяющим тестом относительно бесповторной альтернативы.*

2. Функции типа Σ .

Бесповторные функции, выражимые бесповторной формулой в базисе $\{\oplus, \vee\}$ назовем *функциями типа Σ* . Каноническое дерево функции типа Σ не имеет листьев, помеченных отрицаниями переменных, а его внутренние вершины помечены чередующимися символами $\oplus$ и $\vee$.

Через e_i обозначим набор с единственной единицей в i -той компоненте. Набор α назовем *изолированным* для бесповторной функции f , если

$$\forall i \quad f(\alpha) \neq f(\alpha \oplus e_i)$$

При этом если $f(\alpha) = 0(1)$, набор α называется $0(1)$ -изолированным. Изолированные наборы приведены в следующей таблице.

Таблица 1.

$x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$	$(\overline{\sigma_1}, \dots, \overline{\sigma_n})$	0 —
$x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$	$(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$	1 —
$x_1 \oplus \dots \oplus x_n$		0 —
		1 —
$x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$		1 —
		0 —

Лемма 1. Нулевой набор $(0, \dots, 0)$ является 0-изолированным для бесповторной функции, существенно зависящей от всех своих переменных, тогда и только тогда, когда функция имеет тип Σ .

Доказательство. В силу соотношений

$$0 \vee 0 = 0; \quad 0 \vee 1 = 1; \quad 0 \oplus 0 = 0; \quad 0 \oplus 1 = 1$$

нулевой набор является 0-изолированным для произвольной функции типа Σ , существенно зависящей от всех переменных. Пусть бесповторная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет изолированный набор α . Пусть в некотором поддереве ее канонического дерева реализуется функция $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$. Тогда набор $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m})$ — изолированный набор функции $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$.

Произвольная бесповторная функция не имеет тип Σ в одном из следующих случаев.

1. Корень канонического дерева функции помечен символом $\&$.
2. В каноническом дереве есть нелинейные смежные вершины.
3. В каноническом дереве есть листья, помеченные отрицаниями переменных.
4. В каноническом дереве есть внутренние вершины, помеченные символом $\oplus$.

1. Бесповторная функция, представимая в виде конъюнкции бесповторных подфункций, не имеет 0-изолированных наборов.

2. Пусть не выполнено 1. Дизъюнкция (см. табл. 1) может иметь только 0-изолированный набор, состоящий из 0-изолированных наборов

подфункций, но смежная с ней конъюнкция не имеет 0-изолированных наборов.

3. Пусть не выполнены случаи 1 и 2. Тогда дизъюнкция, один из аргументов которой – отрицание переменной, не имеет изолированного нулевого набора.

4. Если не имеют место случаи 1–3, то в каноническом дереве есть некая вершина T , помеченная $\oplus$, над которой все смежные с ней вершины помечены $\vee$ и под которой нет вершин, помеченных $\oplus$. При этом 0-изолированному набору функции соответствует 0-изолированный набор подфункций, реализуемой в вершине T . Но любой 0-изолированный набор функции $\oplus$ имеет компоненту, равную 1 (см. табл. 1), а дизъюнкция не имеет 1-изолированных наборов. Лемма доказана.

Теорема 1. Для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ типа Σ , существенно зависящей от всех переменных, множество всех наборов веса не более двух является тестом относительно бесповторной альтернативы.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что любое множество вида $0, e_i, e_j, e_i \oplus e_j$ является квадратом существенности для f . В силу утверждения 4 множество всех квадратов существенности является тестом относительно бесповторной альтернативы. Теорема доказана.

3. Нижние и верхние оценки длины тестов для бесповторных функций.

Теорема 2. Пусть $f'(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_s) = h(x_1, \dots, x_l) \vee y_1 \vee \dots \vee y_s$, где h – произвольная бесповторная функция, существенно зависящая от всех своих аргументов. Тогда минимальная длина $T(f')$ теста относительно бесповторной альтернативы для f' не меньше, чем $\frac{s(s-1)}{2}$.

Доказательство. Пусть тест T отличает функцию f' от произвольной функции $f_{i,j}$ вида

$$f_{i,j}(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_s) = h(x_1, \dots, x_l) \vee y_1 \vee \dots \vee y_{i-1} \vee y_{i+1} \vee \dots \vee y_{j-1} \vee y_{j+1} \vee \dots \vee y_s \vee (y_i \oplus y_j).$$

Тогда T содержит набор $\alpha_{i,j}$, на котором $h = 0$ и из всех компонент у ровно две – y_i и y_j – равны единице. Для разных пар (i, j) наборы $\alpha_{i,j}$ различны, поэтому $|T| \geq \frac{s(s-1)}{2}$. Теорема доказана.

Нам понадобится понятие *связно-несвязного* графа [6]. Граф, состоящий из одной вершины считается связно-несвязным. Пусть известны все связно-несвязные k -вершинные графы для $k < n$. Тогда n -вершинный граф G связно-несвязен тогда и только тогда, когда, во-первых, либо граф G (либо его дополнение $\overline{G}$) несвязен и, во-вторых, все компоненты связности графа G (либо его дополнения $\overline{G}$) также являются связно-несвязными графами.

Рассмотрим произвольное невырожденное корневое дерево D , множество внутренних вершин которого правильно раскрашено в два цвета $\{0, 1\}$ (иначе можно считать, что корень имеет пометку 0 или 1), а всем листьям приписаны попарно различные элементы множества V . Такие деревья назовем *помеченно-раскрашенными*. Дереву D ставится в соответствие граф $G = \phi(D)$ с множеством вершин V . При этом ребро (v_i, v_j) принадлежит множеству ребер графа G тогда и только тогда, когда ближайшая к корню дерева D вершина на кратчайшем пути из листа v_i в лист v_j имеет пометку 1.

Утверждение 3. ([6]. Лемма 11.) *Функция $\phi(D)$ взаимно однозначно отображает множество помеченно - раскрашенных деревьев на множество связно-несвязных графов.*

Нетрудно убедиться, что граф $\phi(D)$ связан тогда и только тогда, когда корень дерева D помечен единицей.

Лемма 2. *Граф G связно-несвязен тогда и только тогда, когда любой его порожденный подграф, имеющий не менее двух вершин, либо является несвязным, либо имеет несвязное дополнение.*

Доказательство. Пусть граф G_n – связно-несвязный и имеет некоторый порожденный связный подграф G' со связным дополнением. Пусть G_n имеет наименьшее число n вершин среди графов, обладающих этими свойствами. Возникает противоречие. Все вершины G' должны лежать в одной компоненте связности G_n или $\overline{G_n}$, но это противоречит минимальности n . С другой стороны, пусть из того, что любой порожденный подграф графа G с числом вершин менее n либо является несвязным, либо имеет несвязное дополнение, следует, что G связно-несвязен. Тогда n -вершинный граф G_n , обладающий этим свойством, будет связно-несвязным по определению. Лемма доказана.

Все графы с числом вершин менее четырех являются связно-несвязными. Цепь длины 3 не является связно-несвязным графом. Отсюда

вытекает следующее утверждение (рис. 1)

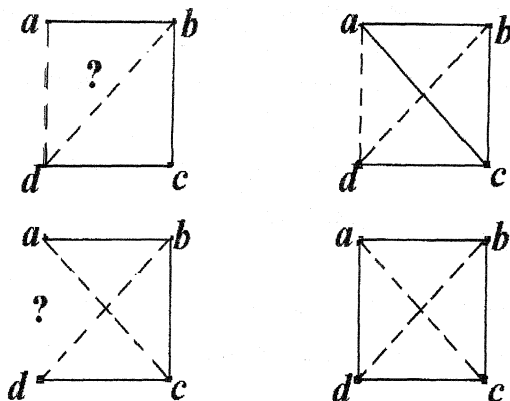


Рис. 1

Лемма 3. (Правило пирамиды). Пусть четырехвершинный граф G с множеством вершин $V(G) = \{a, b, c, d\}$ связно-несвязен. Пусть ребра (a, b) , (b, c) и (c, d) принадлежат множеству ребер графа G , а ребра (a, c) и (b, d) ((a, d) и (b, d)) – не принадлежат. Тогда ребро (a, d) (ребро (a, c)) принадлежит множеству ребер графа G .

Графом второго слоя для функции f типа Σ назовем n -вершинный помеченный граф G , множество ребер которого задается соотношением

$$(i, j) \in E(G) \iff f(e_i \oplus e_j) = 1.$$

Проверяющим тестом для связно-несвязного графа в классе связно-несвязных графов с тем же множеством вершин (далее проверяющим тестом для графа) назовем множество ребер, образующее соответствующий тест. Граф второго слоя является графом $\phi(D)$ для дерева, получаемого из канонического для f заменой пометок $\oplus$ на 0, а $\vee$ на 1. Это дает способ тестирования функций типа Σ : сначала убедиться при помощи значений на наборах веса ноль и один, что функция является функцией типа Σ по лемме 1, а потом добавить к тесту множество наборов веса два, соответствующих проверяющему тесту для графа второго слоя.

Лемма 4. Пусть бесповторная функция $f(x, y)$ типа Σ , существенно зависящая от всех переменных, представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_s) = (g_1(x_1, \dots, x_m) \oplus g_2(x_{m+1}, \dots, x_l)) \vee y_1 \vee \dots \vee y_s, \quad (1)$$

где g_1 и g_2 – дизъюнкции некоторых бесповторных функций. Пусть множество наборов X является тестом относительно бесповторной альтернативы для функции $g_1(x_1, \dots, x_m) \oplus g_2(x_{m+1}, \dots, x_l)$.

Тогда тестом для функции f является объединение следующих множеств:

1. множества всех наборов веса ноль и один (всего $l + s + 1$ набор);
2. множества всех наборов вида $(\alpha_1, \dots, \alpha_l, 0, \dots, 0)$, где $\alpha \in X$ (всего $|X|$ наборов);
3. s наборов веса 2 с $x_1 = 1$ и всевозможными $y_i = 1$;
4. s наборов веса 2 с $x_l = 1$ и всевозможными $y_i = 1$;
5. $\frac{s(s-1)}{2}$ наборов веса 2 с всевозможными $y_i = y_j = 1$.

Доказательство. Значения на наборах первого множества доказывают, что f – функция типа Σ . Значения на наборах второго множества позволяют определить все ребра в графе второго слоя с вершинами x . Значения на наборах пятого множества позволяют определить все ребра в графе второго слоя с вершинами y . Нам остается доказать наличие ребер между произвольными вершинами x_q и y_t . Пусть для определенности $q \leq m$ (случай $q > m$ рассматривается аналогично). Корни канонических деревьев функций g_1 и g_2 помечены $\vee$, следовательно, корни соответствующих им помеченно-раскрашенных деревьев помечены единицами и подграфы графа второго слоя, порожденные множествами вершин $\{x_1, \dots, x_m\}$ и $\{x_{m+1}, \dots, x_l\}$ являются связными. Корень канонического дерева функции $g_1 \oplus g_2$ помечен $\oplus$, следовательно, корень соответствующего ей помеченно-раскрашенного дерева помечен нулем, подграф графа второго слоя, порожденный множеством вершин x несвязен, а ребер между вершинами $\{x_1, \dots, x_m\}$ и $\{x_{m+1}, \dots, x_l\}$ нет. Пусть путь из x_1 в $x_q = x_{i_r}$ в подграфе графа второго слоя, порожденном множеством вершин $\{x_1, \dots, x_m\}$ лежит через промежуточные вершины $x_{i_1}, \dots, x_{i_{r-1}}$. Из теста нам известна следующая информация о ребрах графа второго слоя (рис.2):

1. наличие ребер $(x_1, x_{i_1}), (x_{i_1}, x_{i_2}), \dots, (x_{i_{r-1}}, x_q)$ (множество 2);
2. отсутствие ребер $(x_1, x_l), (x_{i_1}, x_l), (x_{i_2}, x_l), \dots, (x_{i_{r-1}}, x_l), (x_q, x_l)$ (множество 2);

3. наличие ребер (y_t, x_1) (множество 3) и (y_t, x_l) (множество 4);

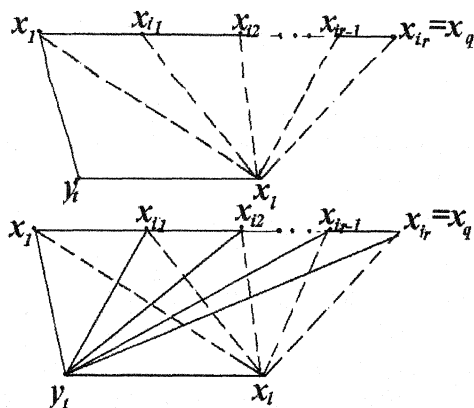


Рис. 2

Применяя последовательно правило пирамиды к подграфам с множествами вершин

$$(x_1, x_l, x_{i_1}, y_t), (x_{i_1}, x_l, x_{i_2}, y_t), \dots, (x_{i_{r-1}}, x_l, x_{i_r} = x_q, y_t),$$

докажем наличие ребер

$$(x_{i_1}, y_t), (x_{i_2}, y_t), \dots, (x_{i_r} = x_q, y_t).$$

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть для произвольного $l, l \geq 4$ существуют функции $g_1(x_1, \dots, x_m)$ и $g_2(x_{m+1}, \dots, x_l)$, удовлетворяющие условиям предыдущей леммы, и при этом множество $|X|$ содержит все наборы веса не более 1, а $|X| \leq C \cdot l$, где C — некая константа. Пусть $n = l + s$. Тогда

1. если функция $\xi(n)$ удовлетворяет условиям $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi(n)}{n} = \infty$ и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi(n)}{n^2} \leq \frac{1}{2}, \text{ то существует последовательность функций}$$

$\{f_n\}$, задаваемых (1), для которых выполняется соотношение

$$T(f_n) \sim \xi(n) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

2. для любой неотрицательной константы ψ существует последовательность бесповторных функций $\{f_n(x_1, \dots, x_n)\}$, определяемых соотношением (1) такая, что

$$\psi \cdot n \leq T(f_n) \leq (\psi + C) \cdot n + O(\sqrt{n})$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. По теореме 2 и предыдущей лемме выполнено двойное неравенство

$$\frac{s(s-1)}{2} \leq T(f_n) \leq \frac{s(s-1)}{2} + 3s + Cl.$$

Для построения первой последовательности достаточно положить $s = [\sqrt{2\xi(n)}]$, второй — $s = \lceil \sqrt{2\psi \cdot n} + 1 \rceil$. Теорема доказана.

Назовем бинарное дерево *равномерным*, если его листья удалены от корня на расстояния, отличающиеся друг от друга не более, чем на единицу.

Лемма 5. Для графа $\phi(D_n)$ произвольного равномерного бинарного помеченно-раскрашенного дерева D_n с n листьями существует проверяющий тест в классе связно-несвязных графов, содержащий $2n - 3$ ребра.

Доказательство. Индукция по n . Базис. Для $n = 2$ и $n = 3$ полный тест содержит одно и три ребра соответственно.

Индукционный шаг. Предположим, что для любого равномерного бинарного помеченно-раскрашенного дерева D_k при $2 \leq k < n$ существует тест графа $\phi(D_k)$, содержащий не более $2k - 3$ ребер. Пусть для определенности корень дерева D_n помечен 1, оно имеет два поддерева D_{k_1} и D_{k_2} , состоящих из поддеревьев D_a, D_b и D_c, D_d соответственно (при этом $k_1 + k_2 = n$). Возьмем объединение тестов для $\phi(D_{k_1})$ и $\phi(D_{k_2})$ и добавим к нему ребра (a, c) , (c, b) и (b, d) , где a, b, c, d — произвольные соответствующие листья поддеревьев D_a, D_b и D_c, D_d (рис. 3). Корни дерева D_n и поддеревьев D_a, D_b, D_c и D_d помечены единицами, а корни поддеревьев D_{k_1} и D_{k_2} помечены нулями. Поэтому графы $\phi(D_n)$, $\phi(D_{k_1})$, $\phi(D_{k_2})$, $\phi(D_a)$, $\phi(D_b)$, $\phi(D_c)$ и $\phi(D_d)$ являются связными. Связность последних шести графов показывает объединение тестов для $\phi(D_{k_1})$ и $\phi(D_{k_2})$. Три добавленных ребра доказывают связность $\phi(D_n)$. Так как $\phi(D_n)$ несвязен, а $\phi(D_{k_1})$ и $\phi(D_{k_2})$ связны, то только эти подграфы могут быть компонентами связности несвязного графа $\phi(D_n)$. Длина

получаемого теста не превосходит $2k_1 - 3 + 2k_2 - 3 + 3 = 2n - 3$. Лемма доказана.

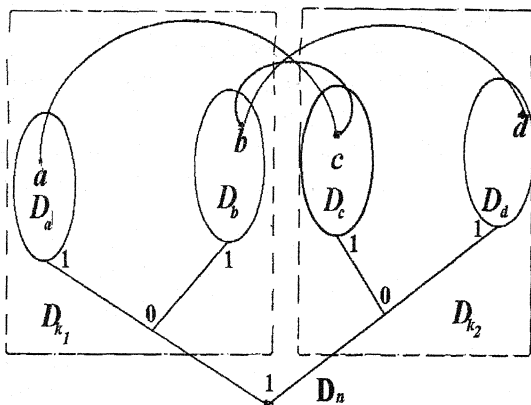


Рис. 3

Теорема 4.

1). Пусть функция $\xi(n)$ удовлетворяет условиям $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi(n)}{n} = \infty$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi(n)}{n^2} \leq \frac{1}{2}$. Тогда существует последовательность функций $\{f_n\}$, задаваемых (1), для которых выполняется соотношение $T(f_n) \sim \xi(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

2). Для любой неотрицательной константы ψ существует последовательность бесповторных функций $\{f_n(x_1, \dots, x_n)\}$, определяемых соотношением (1) такая, что

$$\psi \cdot n \leq T(f_n) \leq (\psi + 3) \cdot n + O(\sqrt{n})$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Определим последовательность функций.

$$g_1(x_1) = h_1(x_1) = x_1,$$

$$g_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = h_n(x_1, \dots, x_n) \vee h_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n}),$$

$$h_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = g_n(x_1, \dots, x_n) \oplus g_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n}).$$

$$g_{2n+1}(x_1, \dots, x_{2n+1}) = h_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \vee h_n(x_{n+2}, \dots, x_{2n+1})$$

$$h_{2n+1}(x_1, \dots, x_{2n+1}) = g_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \oplus g_n(x_{n+2}, \dots, x_{2n+1})$$

Для всех этих функций канонические деревья являются бинарными и равномерными. Поэтому в силу леммы 5 для графа $\phi(D)$ канонического дерева D функции h_l существует тест из $2l - 3$ ребер. По этому тесту строится тест X для функции h_l , содержащий $l + 1$ набор веса 0 и 1 и $2l - 3$ наборов, соответствующих ребрам теста для графа $\phi(D)$. Множество X и функции $g_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}(x_1, \dots, x_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor})$ и $g_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor + 1}(x_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor + 1}, \dots, x_l)$ удовлетворяют условиям теоремы 3 с константой $C = 3$. Теорема доказана.

В заключение приведем в явном виде последовательность тестов для функций h_n и g_n . Пусть матрицы Q_j задаются соотношениями:

$$Q_2 = (11), \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 101 \\ 011 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1010 \\ 0110 \\ 0101 \end{pmatrix}$$

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 11000 \\ 01010 \\ 00110 \\ 00101 \end{pmatrix}, \quad Q_6 = \begin{pmatrix} 110000 \\ 000110 \\ 010100 \\ 001100 \\ 001001 \end{pmatrix}, \quad Q_7 = \begin{pmatrix} 1100000 \\ 0011000 \\ 0000110 \\ 0100100 \\ 0001100 \\ 0001001 \end{pmatrix}$$

$$Q_{4n} = \begin{pmatrix} Q_n(x_1, \dots, x_n) & \Theta & \Theta & \Theta \\ \Theta & Q_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) & \Theta & \Theta \\ \Theta & \Theta & Q_n(x_{2n+1}, \dots, x_{3n}) & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & Q_n(x_{3n+1}, \dots, x_{4n}) \\ 0 \dots 01 & 0 \dots 0 & 10 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 01 & 10 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 01 & 0 \dots 0 & 10 \dots 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $s \in \{1, 2, 3\}$. Положим $t(s) = \left\lceil \frac{s+1}{2} \right\rceil$.

$$Q_{4l+s} = \begin{pmatrix} Q_{l+1}(x_1^{l+1}) & \Theta & \Theta & \Theta \\ \Theta & Q_{l+t(s)-1}(x_{l+2}^{2l+t(s)}) & \Theta & \Theta \\ \Theta & \Theta & Q_{l+s-t(s)}(x_{2l+t(s)+1}^{3l+s}) & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & Q_l(x_{3l+s+1}^{4l+s}) \\ 0 \dots 01 & 0 \dots 0 & 10 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 01 & 10 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 01 & 0 \dots 0 & 10 \dots 0 \end{pmatrix}$$

Пусть I_n – единичная матрица, 0_n – нулевая, а Q_1 – пустая матрица. Тогда строки следующей матрицы образуют тест относительно бесповторной альтернативы для функций h_n и g_n .

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & I_n & & \\ & Q_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} & & 0_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} & \\ & 0_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} & & Q_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} & \\ & & & & Q_n \end{pmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Редькин Н.П. Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992, – 192 с.
2. Избранные вопросы теории булевых функций. Под ред. С.В.Винокурова и Н.А.Перязева. М.: Физматлит, 2001, – 192 с.
3. Коробков В.К. Некоторые обобщения задачи "расшифровки" монотонных функций алгебры логики // Сб. "Дискретный анализ". Вып. 5, Новосибирск, 1965, С. 19 – 25
4. Hansel G. Sur le nombre des fonctions booléennes de n variables // C.R. Acad. Sci. Paris, 1966, v.262, p. 1088-1090. [Рус. пер.: Ансель Ж. О числе монотонных булевых функций n переменных // Кибернетический сборник, Новая серия. Вып. 5. М.: Мир, 1968. – С. 42-53.]
5. Сержантов А.В. Оптимальный алгоритм расшифровки некоторых монотонных функций // Математические вопросы кибернетики, Наука, Вып.1, 1988, 223-233.
6. Вороненко А.А. О проверяющих тестах для бесповторных функций // Математические вопросы кибернетики, Физматлит, Вып.11, 2002. С.163 – 176.

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕГРЕССИИ (ТЭР)

В значительном числе случаев дорогостоящие регрессионные эксперименты предваряются соответствующими теоретическими исследованиями. Таких экспериментов, как правило, бывает немного. В результате возникает задача совмещения результатов двух типов исследований.

Теоретики такие задачи трактуют так: имеем функцию Z , полученную расчетами, ее надо уточнить с помощью нескольких экспериментальных точек. Для экспериментаторов задача звучит так: по малому числу экспериментальных точек построить регрессию, опираясь на функцию Z .

Данная работа посвящена одному из возможных способов решения этой задачи. Решение ищется в виде линейной регрессии со специальным базисом, индивидуальным для каждой регрессии. Базис определяется численным путем по теоретическим данным, коэффициенты, как обычно, получают по экспериментальным данным.

В дальнейшем удобно такие линейные регрессии называть сокращенно *ТЭР* (теоретико-экспериментальные регрессии).

Первый вариант способа построения *ТЭР* был опубликован автором в работе [1], в следующей работе [2] была показана возможность выполнения на основе *ТЭР* процедуры D -оптимального планирования регрессионных экспериментов [3]. В обобщающей работе [4] (в соавторстве с А.Л. Поляченко и Т.А. Шапошниковой) дана сводка результатов из [1,2] и приведены конкретные численные примеры D -оптимальных экспериментов для типичной задачи скважинной ядерной геофизики.

В данной работе предлагаются два новых варианта построения *ТЭР*. Первый дает возможность более полно, чем в [4], использовать теоретические данные, второй вариант (со смешанным базисом) позволяет управлять процессом построения *ТЭР*. В варианте со смешанным базисом используются функции как специальные, рассмотренные автором в [4], так и классические, например, многочлены. Такие "смеси" делают процесс построения *ТЭР* более гибким и создают оправданные предпосылки для постановки задачи, в определенном смысле обратной задаче оптимального планирования экспериментов. Это задача вычисления "оптимальных" базисов, использование которых приводит к тому, что исходный план экспериментов становится оптимальным.

Следует обратить внимание на то, что, как и в [4], в данной работе мы имеем дело с готовым теоретическим и экспериментальным материалом, изменять который мы не в силах.

Автор благодарен проф. Т.А. Гермогеновой, проф. М.Б. Малютову и

К.А. Кукушкину, общение с которыми способствовало постановке задачи о смешанных базисах.

Введем обозначения.

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) - \quad (1)$$

набор непрерывных независимых переменных.

$$-\infty < a_i \leq x^{(i)} \leq b_i < \infty. \quad (2)$$

Ω – n -мерный параллелепипед в пространстве переменных (1), для которого выполняются неравенства (2).

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{k_i}^{(i)}); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

– дискретные точки по переменным (1).

$P \in \Omega$ – полная сетка узлов переменных (1), соответствующая точкам (3).

Предположим, что с целью выявления зависимости $u(x)$ проведены теоретические и экспериментальные исследования. При этом получены q экспериментальных точек

$$\bar{u}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (4)$$

и теоретическая функция $Z(x)$. Считаем, что функция $Z(x)$ дискретна и определена на полной сетке переменных (1), иначе говоря, $Z(x)$ – n -мерная матрица (таблица) с числом элементов

$$k = \prod_{i=1}^n k_i.$$

Наша задача – построение $TЭР$ по эксперименту (4), опираясь на $Z(x)$.

Конкретным примером таких задач являются, например, задачи построения интерпретационных зависимостей для нейтронных методов скважинной ядерной геофизики. Для этих задач необходимое число учитываемых переменных (1) $n \geq 4$, число точек $q \leq 30$.

Из сочетания этих значений n, q видна необходимость совместного учета результатов теории и эксперимента. Для указанных задач теоретическая функция $Z(x)$ определяется по решению системы дифференциальных уравнений переноса излучения в горных породах (диффузионное приближение). Экспериментальные данные для этой задачи – измерения, полученные реальным скважинным прибором на натуральных моделях горных пород. Крайне ограниченный объем экспериментальных данных объясняется трудностями строительства парка натуральных моделей: далеко не все модели с необходимыми значениями переменных (1) удастся реализовать, сроки жизни моделей ограничены, каждая модель уникальна.

Простейший вариант построения $TЭР$ состоит в том, что мы ищем регрессию в виде [4]

$$u(c, x) = \sum_{s=1}^m c_s Z_s(x); \quad x \in P; c = (c_1, \dots, c_m) \in R^m, \quad (5)$$

где базисные функции $Z_s(x)$, $s=1, 2, \dots, m$ являются дискретными функциями с разделяющимися переменными

$$Z_s(x) = f_s(x^{(1)}) \times g_s(x^{(2)}) \times \dots \times h_s(x^{(n)}); \quad x \in P; s = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

являющимися в свою очередь решениями следующей задачи минимизации

$$H_0(x) = Z(x) \\ \min_{\tilde{f}_s \times \tilde{g}_s \times \dots \times \tilde{h}_s} (H_{s-1}(x) - \tilde{f}_s(x^{(1)}) \times \tilde{g}_s(x^{(2)}) \times \dots \times \tilde{h}_s(x^{(n)})); \quad (7)$$

$$H_s(x) = Z(x) - \sum_{t=1}^s (f_t(x^{(1)}) \times g_t(x^{(2)}) \times \dots \times h_t(x^{(n)})); \quad (8)$$

$$s = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — значок среднеквадратичной нормы.

В работе [5] показано, что существует по крайней мере одно решение задачи (6)-(8), причем метод последовательного выделения компонентов $Z_s(x)$ приводит к представлению $Z(x)$ в виде убывающего ряда

$$Z(x) = \sum_{s=1}^{\infty} (f_s(x^{(1)}) \times g_s(x^{(2)}) \times \dots \times h_s(x^{(n)})). \quad (9)$$

Первые m слагаемых разложения (9) и составляют базис $TЭР$ для модели (5).

Алгоритм расчета базиса (6) универсален для всех дискретных (табличных) $Z(x)$ и всех n [5,6,7]. Непрерывный его аналог впервые был, по видимому, описан Шмидтом еще в 1907г. при разложении ядра интегрального уравнения [8]. Для частного случая $n=2$ разложение (9) полностью совпадает с разложением двумерной матрицы на сумму матриц единичного ранга [9]. Время расчета базиса на компьютере, естественно, зависит от конкретной задачи. Например, в задачах, в которых автор принимал участие, расчет 5-6 базисных функций (с 6-ю значащими цифрами) для $n=4$, $k_1=6$, $k_2=k_3=4$, $k_4=3$ занимает несколько секунд на РС.

Конкретные численные примеры, дают основание предполагать, что для положительных $Z(x)$ последовательность функций f_s , $s=1, 2, \dots, m$ обладает некоторыми свойствами собственных векторов якобиевых матриц:

- функция f_s испытывает $s-1$ перемену знака,
- нули двух последовательных функций f_s, f_{s+1} перемежаются.

Нетрудно заметить, что в ТЭР с моделью (5) используется только часть слагаемых разложения (9). Значительно большей "отдачи" от теоретических данных можно ожидать, если брать модель

$$u(c, x) = \sum_{s=1}^{m-1} c_s Z_s(x) + c_m (Z(x) - \sum_{s=1}^{m-1} Z_s(x)); \quad x \in P; \quad (10)$$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in R^m.$$

Естественным доводом в пользу модели (10) по сравнению с моделью (5) является выполнение равенства

$$u(c, x) = Z(x)$$

для $c_s = 1, \quad s = 1, 2, \dots, m$. Очевидно, что это случай, когда все экспериментальные точки (4) лежат на $Z(x)$. Очевидно также, что модели (5) и (10) совпадают, если в разложении (9) число членов ряда конечно и равно m .

Замечания:

(i) для этой работы способы оценки коэффициентов $c_s, s = 1, 2, \dots, m$ и числа m членов регрессии (5) не существенны, поэтому здесь не рассматриваются;

(ii) принимая во внимание, что для выбранного базиса (6) вопрос интерполяции в (5) сводится к интерполяции функций от одной переменной, повсюду в этой работе рассматриваются только дискретные функции;

(iii) в практических вычислениях стоит проверить необходимость использования в (10) свободного члена [7].

В процессе построения модели ТЭР возникает естественный вопрос: хватит ли слагаемых в разложении (9), для того чтобы можно было работать с имеющимся экспериментом (4). Ответ очевидный: не всегда. Например, для $n=1$ мы вообще имеем единственную базисную функцию $Z_1=Z$ и все выше приведенные конструкции являются тривиальными. Для $n=2$ мы имеем [5]

$$Z(x) = Z(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sum_{s=1}^r Z_s(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sum_{s=1}^r (f_s(x^{(1)}) \times g_s(x^{(2)})). \quad (11)$$

Здесь r – ранг матрицы Z , иначе говоря, в разложении (9) заведомо конечное число членов. Для $n > 2$ мы в (9) можем иметь как конечное, так и бесконечное число членов. Одним словом, заранее не ясно, достаточно ли членов в (9) мы имеем.

Нам представляется, что в случае необходимости разумным выходом из положения является погружение исходной задачи в задачу большей размерности, т.е. с большим числом n , необходимо также, чтобы для этой задачи большей размерности соответствующее разложение (9) имело

бы больше членов, чем в исходной задаче (это всегда можно сделать).

Рассмотрим один из подходов к этой проблеме - использование смешанного базиса. Рассмотрение целесообразно провести на простеньком примере.

Пусть $n=1$ и $l_1(x^{(1)})$, $l_2(x^{(1)})$ две дискретные функции на P_1 , равные

$$l_1(x^{(1)}) = 1; \quad l_2(x^{(1)}) = x^{(1)}. \quad (12)$$

Предположим, что функции

$$Z(x^{(1)}), \quad l_1(x^{(1)}), \quad l_2(x^{(1)}) \quad (13)$$

линейно независимы (очевидно, это не обременительное условие). Если совокупность (13) взять в качестве базисной для искомой регрессии, то получим

$$u(c, x^{(1)}) = c_1 Z(x^{(1)}) + c_2 + c_3 x^{(1)}. \quad (14)$$

Это легкий, но не лучший путь использования базиса. Действительно, для $c_3=0$ мы имеем часто встречающийся случай, который является обычным масштабированием и сдвигом. Однако уже в случае всех ненулевых коэффициентов в (14) регрессия представляется чем-то искусственным и "некрасивым". В связи с этим в данной работе предлагается поступить следующим образом:

1. Рассмотрим совокупность (13), как двумерную функцию $Z(x^{(1)}, x^{(2)})$ от искусственной переменной $x^{(2)}$. Пусть

$$Z(x^{(1)}, 1) = Z(x^{(1)}); \quad Z(x^{(1)}, 2) = l_1(x^{(1)}); \quad Z(x^{(1)}, 3) = l_2(x^{(1)}). \quad (15)$$

2. Для $Z(x^{(1)}, x^{(2)})$ найдем функции

$$Z_s(x^{(1)}, x^{(2)}); \quad s = 1, 2, 3, \quad (16)$$

как решение задачи (6)-(8)

3. Используем функции (16) при $x^{(2)}=1$ как базисные для регрессии

$$u(c, x^{(1)}) = \sum_{s=1}^3 c_s Z_s(x^{(1)}, 1); \quad x^{(1)} \in P_1; \quad c = (c_1, c_2, c_3) \in R^3.$$

Из выражения (11) непосредственно следует, что

$$\sum_{s=1}^3 Z_s(x^{(1)}, 1) = Z(x^{(1)}) \quad (18)$$

т.е. при $c_1=c_2=c_3=1$ в выражении (17), как и в общем случае (10), мы получаем

$$u(c, x^{(1)}) = Z(x^{(1)}).$$

Итак, для выбранной совокупности функций (13) мы получаем разложение (18) теоретической функции $Z(x^{(1)})$ на сумму слагаемых, при этом

стоящие в (17) коэффициенты дают представление о "вкладе" этих сла-
гаемых в искомую регрессию.

Очевидно, что при других функциях, например, l_1 - константа, а l_2 -
экспонента, мы получим разложение (18) с другими функциями (16). Это
обстоятельство позволяет надеяться, что используя разные функции
 $l_1(x^{(1)}), l_2(x^{(1)})$, и получая разные разложения (18) и, соответственно, разные
базисы (16), мы сможем научиться получать базисные функции (16),
удовлетворяющие разным дополнительным требованиям. Одной из инте-
реснейших задач такого рода является задача вычисления "оптимального"
базиса, иначе говоря, базиса, для которого исходный план эксперимента
является оптимальным.

Принцип использования смешанных базисов для общего случая $n > 1$
тот же, что и для $n=1$. Здесь этот случай не рассматривается.

Помимо своего основного назначения – синтеза дискретных
данных разной природы – модель $TЭР$ и ее составные части могут быть
использована в других задачах. Нам представляется, что наиболее инте-
ресны такие.

1. Расчет оптимальных планов эксперимента. Возможность исполь-
зования модели (10) для этой задачи объясняется линейностью модели
(10) по коэффициентам; разумность использования модели (10) объясня-
ется возможностью объективного учета теоретических данных, накоплен-
ных к началу планирования экспериментальных работ. Некоторые чис-
ленные примеры D -оптимальных планов для задач скважинной ядерной
геофизики даны в работе [4].

2. Интерполяция дискретных функций, заданных на полной сетке
переменных. Основание очевидно - использование в правой части разло-
жения (9) функций от одной переменной. Однако, как и во всякой задаче
интерполяции, здесь требуется опыт вычислителя.

3. Задачи, связанные с задачами распознавания образов. Это задачи
компонентного анализа, фильтрации шумов и сглаживания табличных
данных. В литературе для $n=2$ примеры такого рода задач даны в
[10,11,12].

Важно отметить, что в случае отсутствия теоретической матрицы Z ,
некоторые способы построения регрессий с обычными базисными функ-
циями можно свести к рассмотренному методу $TЭР$. Предположим, что
методом последовательного наращивания числа m , мы ищем регрессию

$$u(c, x) = \sum_{s=1}^m c_s u_s(x)$$

с обычными базисными функциями $u_s(x)$, $s=1, 2, \dots, m$. Очевидно, что про-
межуточный результат при переходе от m_0 к m_0+1 можно рассматривать
как "теоретическую" функцию, т.е. брать

$$Z(x) = \sum_{s=1}^{m_0} c_s u_s(x) .$$

Литература

1. Калашникова М.И. Алгоритм сопоставления массивов геофизической информации большой размерности. - ВНИИЯГТ. М., деп. в ВИНТИ, 1982, N 1569-82 деп., 7с.
2. Калашникова М.И. Применение методов планирования эксперимента при ядерно-геофизических исследованиях на натуральных моделях. - ВНИИЯГТ. М., деп. в ВИНТИ, 1985, N 1894-85 деп., 14с.
3. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов). М., "Наука", 1977, 312 с.
4. M.I.Kalashnikova, A.L.Polyachenko, T.A.Shaposhnikova. Mathematical- Experimental Charts, Geophys. J., 1990. V 8(4), pp 484-492.
5. Поспелов В.В. О приближении функций нескольких переменных суммами произведений функций одного переменного. Препринт ИПМ АН СССР, N 32, М., 1972, 75с.
6. Даугавет В.А. Один практический прием приближения функций многих переменных. Сб. "Методы вычислений", N 6, изд. ЛГУ, 1970, с.3-8.
7. Шура-Бура М.Р. Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного. Сб. "Вычислительная математика", N 2, М., 1957, с.3-19.
8. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann., LXIII, 1907, p.433-476
9. G.Forsythe, M.Malcolm, C.Moler. Computer Methods for Mathematical Computations, N.Y. 1977.
10. Мещерская А.В., Руховец Л.В., Юдин М.И. и др. Естественные составляющие метеорологических полей. Л., Гидрометеиздат, 1970, 199с.
11. Баглай Р.Д., Смирнов К.К. К обработке двумерных сигналов на ЭВМ. ЖВМ и МФ. т.15, N1, 1975, с. 241-248
12. Обухов А.М. О статистических ортогональных разложениях эмпирических функций. Изв. АН СССР, серия "Геофизическая", вып.3, 1960, с.432-439.