

В.А. ИЛЬИН, Э.Г. ПОЗНЯК

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть II

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ

*Рекомендовано Министерством образования
Российской Федерации в качестве учебника
для студентов физических специальностей
и специальности "Прикладная математика"*

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2004

УДК 517
ББК 22.16
И 46

УЧЕБНИК УДОСТОЕН
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРЕМИИ СССР ЗА 1980 ГОД

ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть II: Учеб.: Для вузов. — 5-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 464 с. — (Курс высшей математики и математической физики). — ISBN 5-9221-0537-X.

Один из выпусков «Курса высшей математики и математической физики» под редакцией А.Н.Тихонова, В.А.Ильина, А.Г.Свешникова. Учебник создан на базе лекций, читавшихся авторами в течение ряда лет на физическом факультете и факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета. Книга включает теорию функциональных последовательностей и рядов, кратных (в том числе несобственных), криволинейных и поверхностных интегралов, интегралов, зависящих от параметров, теорию рядов и интегралов Фурье.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Физика» и «Прикладная математика».

Ил. 48.

Учебное издание

*ИЛЬИН Владимир Александрович,
ПОЗНЯК Эдуард Генрихович*

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть II

Серия «Курс высшей математики и математической физики»

Редактор *Д.А. Муртова*
Оригинал-макет: *В.В. Затекин*

ЛР №071930 от 06.07.99

Подписано в печать 01.09.04. Формат 60×90/16. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 26,27. Заказ № 10946

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная ул., 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0537-X



ISBN 5-9221-0537-X

© ФИЗМАТЛИТ, 2001, 2002, 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	11
Предисловие к первому изданию	11
Г л а в а 1. Функциональные последовательности и ряды . .	13
§ 1. Равномерная сходимость	13
1. Понятие функциональной последовательности и функционального ряда (13). 2. Сходимость функциональной последовательности в точке и на множестве (15). 3. Понятие равномерной сходимости на множестве (16). 4. Критерий Коши (17). 5. Достаточные признаки равномерной сходимости (19). 6. Почленный переход к пределу. Непрерывность суммы ряда и предельной функции последовательности (23).	
§ 2. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов	27
1. Почленное интегрирование (27). 2. Почленное дифференцирование (29). 3. Сходимость в среднем (34).	
§ 3. Равнотенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела	37
§ 4. Степенные ряды	41
1. Степенной ряд и область его сходимости (41). 2. Непрерывность суммы степенного ряда (45). 3. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенного ряда (45).	
§ 5. Разложение функций в степенные ряды	47
1. Разложение функции в степенной ряд (47). 2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (48). 3. Элементарные представления о функциях комплексной переменной (50). 4. Равномерное приближение непрерывной функции многочленами (теорема Вейерштрасса) (52).	
Г л а в а 2. Двойные и n-кратные интегралы	57
§ 1. Определение и существование двойного интеграла	58
1. Определение двойного интеграла для прямоугольника (58). 2. Существование двойного интеграла для прямоугольника (59). 3. Определение и существование двойного интеграла для произвольной области (61). 4. Определение двойного интеграла при помощи произвольных разбиений области (64).	
§ 2. Основные свойства двойного интеграла	68
§ 3. Сведение двойного интеграла к повторному однократному	69
1. Случай прямоугольника (69). 2. Случай произвольной области (71).	
§ 4. Тройные и n -кратные интегралы	73
§ 5. Замена переменных в n -кратном интеграле	77
Дополнение. О приближенном вычислении n -кратных интегралов	93

1. Формулы численного интегрирования, оптимальные для классов функций (93). 2. О формулах численного интегрирования, оптимальных для каждой конкретной функции (95). 3. Пример приближенного вычисления кратного интеграла (97).	
Г л а в а 3. Несобственные интегралы	98
§ 1. Несобственные интегралы первого рода (одномерный случай)	98
1. Понятие несобственного интеграла первого рода (98). 2. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла первого рода. Достаточные признаки сходимости (100). 3. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов (102). 4. Замена переменных под знаком несобственного интеграла и формула интегрирования по частям (104).	
§ 2. Несобственные интегралы второго рода (одномерный случай)	106
1. Понятие несобственного интеграла второго рода. Критерий Коши (106). 2. Заключительные замечания (107).	
§ 3. Главное значение несобственного интеграла	109
§ 4. Кратные несобственные интегралы	110
1. Понятие кратных несобственных интегралов (110). 2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций (111). 3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций (114). 4. Главное значение кратных несобственных интегралов (117).	
Г л а в а 4. Криволинейные интегралы	118
§ 1. Определения криволинейных интегралов и их физический смысл	118
§ 2. Существование криволинейных интегралов и сведение их к определенным интегралам	121
Г л а в а 5. Поверхностные интегралы	127
§ 1. Понятие поверхности	127
1. Понятие поверхности (127). 2. Регулярная поверхность (128). 3. Задание поверхности с помощью векторных функций (131). 4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Односторонние и двусторонние поверхности (133). 5. Вспомогательные леммы (134).	
§ 2. Площадь поверхности	137
1. Понятие площади поверхности (137). 2. Квадрируемость гладких поверхностей (138).	
§ 3. Поверхностные интегралы	142
1. Понятия поверхностных интегралов первого и второго родов (142). 2. Существование поверхностных интегралов первого и второго родов (143). 3. Поверхностные интегралы второго рода, не зависящие от выбора декартовой системы координат (147).	
Г л а в а 6. Основные операции теории поля	149
§ 1. Преобразования базисов и координат. Инварианты	149
1. Взаимные базисы векторов. Ковариантные и контравариантные координаты векторов (149). 2. Преобразования базиса и координат (152). 3. Инварианты линейного оператора. Дивергенция и ротор линейного оператора (153).	
§ 2. Основные понятия и операции, связанные со скалярным и векторным полем	156

1. Понятия скалярного и векторного поля (156). 2. Дифференцируемые скалярные поля. Градиент скалярного поля. Производная по направлению (157). 3. Дифференцируемые векторные поля. Дивергенция и ротор векторного поля. Производная векторного поля по направлению (160). 4. Повторные операции теории поля (164).	
§ 3. Выражение основных операций теории поля в криволинейных координатах	165
1. Криволинейные координаты (165). 2. Выражение градиента и производной по направлению для скалярного поля в криволинейных координатах (170). 3. Выражение дивергенции, ротора и производной по направлению для векторного поля в криволинейных координатах (172). 4. Выражение оператора Лапласа в криволинейных ортогональных координатах (174). 5. Выражение основных операций теории поля в цилиндрической и сферической системах координат (174).	
Г л а в а 7. Формулы Грина, Стокса и Остроградского	176
§ 1. Формула Грина	176
1. Формулировка основной теоремы (176). 2. Доказательство формулы Грина для специального класса областей (177). 3. Инвариантная запись формулы Грина (179). 4. Вспомогательные предложения (182). 5. Специальное разбиение области D с кусочно-гладкой границей L (185). 6. Доказательство теоремы 7.1 (188).	
§ 2. Формула Стокса	189
1. Формулировка основной теоремы (189). 2. Доказательство формулы Стокса для гладкой поверхности, однозначно проектирующейся на три координатные плоскости (190). 3. Инвариантная запись формулы Стокса (192) 4. Доказательство теоремы 7.3 (193).	
§ 3. Формула Остроградского	195
1. Формулировка основной теоремы (195). 2. Доказательство формулы Остроградского для специального класса областей (196). 3. Инвариантная запись формулы Остроградского (198).	
§ 4. Некоторые приложения формул Грина, Стокса и Остроградского	200
1. Выражение площади плоской области через криволинейный интеграл (200). 2. Выражение объема через поверхностный интеграл (201). 3. Условия, при которых дифференциальная форма $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ представляет собой полный дифференциал (201). 4. Потенциальные и соленоидальные векторные поля (206).	
Дополнение. Дифференциальные формы в евклидовом пространстве	210
§ 1. Знакопеременные полилинейные формы	210
1. Линейные формы (210). 2. Билинейные формы (211). 3. Полилинейные формы (211). 4. Знакопеременные полилинейные формы (212). 5. Внешнее произведение знакопеременных форм (212). 6. Свойства внешнего произведения знакопеременных форм (215). 7. Базис в пространстве знакопеременных форм (216).	

§ 2. Дифференциальные формы	217
1. Определения (217). 2. Внешний дифференциал (219). 3. Свойства внешнего дифференциала (219).	
§ 3. Дифференцируемые отображения	221
1. Определение дифференцируемых отображений (221). 2. Свойства отображения φ^* (222).	
§ 4. Интегрирование дифференциальных форм	224
1. Определения (224). 2. Дифференцируемые цепи (225). 3. Формула Стокса (227). 4. Примеры (229).	
Г л а в а 8. Мера и интеграл Лебега	230
§ 1. О структуре открытых и замкнутых множеств	231
§ 2. Измеримые множества	235
1. Внешняя мера множества и ее свойства (235). 2. Измеримые множества и их свойства (237).	
§ 3. Измеримые функции	243
1. Понятие измеримой функции (243). 2. Свойства измеримых функций (245). 3. Арифметические операции над измеримыми функциями (246). 4. Последовательности измеримых функций (248).	
§ 4. Интеграл Лебега	251
1. Понятие интеграла Лебега от ограниченной функции (251). 2. Класс интегрируемых по Лебегу ограниченных функций (255). 3. Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции (256). 4. Интеграл Лебега от неотрицательной неограниченной функции и его свойства (259). 5. Интеграл Лебега от неограниченной функции произвольного знака (263). 6. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (265). 7. Классы Лебега $L^p(E)$ (270). 8. Заключительные замечания (273).	
Дополнение 1. Необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману	273
Дополнение 2. Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции по Лебегу	275
Г л а в а 9. Интегралы, зависящие от параметров	277
§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра	277
1. Понятие интеграла, зависящего от параметра (277). 2. Свойства непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра (278). 3. Случай, когда пределы интегрирования зависят от параметра (280).	
§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра	282
1. Понятие несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра. Понятие равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра (282). 2. Свойства непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметра (285). 3. Несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра (289).	
§ 3. Применение теории интегралов, зависящих от параметра к вычислению несобственных интегралов	290
§ 4. Интегралы Эйлера	294

1. Область сходимости интегралов Эйлера (294). 2. Непрерывность интегралов Эйлера (295). 3. Некоторые свойства функции $\Gamma(p)$ (296). 4. Некоторые свойства функции $B(p, q)$ (298). 5. Связь между эйлеровыми интегралами (299). 6. Вычисление определенных интегралов с помощью эйлеровых интегралов (300).	
§ 5. Формула Стирлинга	302
§ 6. Кратные интегралы, зависящие от параметров	306
1. Собственные кратные интегралы, зависящие от параметров (306). 2. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметров (307). 3. Приложение к теории ньютонова потенциала (309).	
Глава 10. Ряды и интеграл Фурье	311
§ 1. Понятие об ортонормированных системах и об общем ряде Фурье	311
§ 2. Замкнутые и полные ортонормированные системы	320
§ 3. Замкнутость тригонометрической системы и следствия из нее	323
1. Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами (323). 2. Доказательство замкнутости тригонометрической системы (326). 3. Следствия замкнутости тригонометрической системы (328).	
§ 4. Простейшие условия равномерной сходимости и почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье	329
1. Вводные замечания (329). 2. Простейшие условия абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье (331). 3. Простейшие условия почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье (333).	
§ 5. Более точные условия равномерной сходимости и условия сходимости в данной точке	335
1. Модуль непрерывности функции. Классы Гельдера (335). 2. Выражение для частичной суммы тригонометрического ряда Фурье (337). 3. Интегральный модуль непрерывности функции (339). 4. Принцип локализации (344). 5. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье для функции из класса Гельдера (346). 6. О сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно-гёльдеровской функции (351). 7. Суммируемость тригонометрического ряда Фурье непрерывной функции методом средних арифметических (355). 8. Заключительные замечания (357).	
§ 6. Интеграл Фурье	358
1. Образ Фурье и его простейшие свойства (359). 2. Условия разложимости функции в интеграл Фурье (361). 3. Понятие о прямом и обратном преобразованиях Фурье (366). 4. Некоторые дополнительные свойства преобразования Фурье (368).	
§ 7. Кратные тригонометрические ряды и интегралы Фурье	370
1. Понятие кратного тригонометрического ряда Фурье и его прямоугольных и сферических частичных сумм (370). 2. Модуль непрерывности и классы Гельдера для функции N переменных (372). 3. Условия сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье (373). 4. О разложении функции в N -кратный интеграл Фурье (376).	

Г л а в а 11. Гильбертово пространство	378
§ 1. Пространство l^2	378
1. Понятие пространства l^2 (378). 2. Общий вид линейного функционала в l^2 (381). 3. О слабой компактности ограниченного по норме l^2 множества (384).	
§ 2. Пространство L^2	388
1. Простейшие свойства пространства L^2 (388). 2. Сепарабельность пространства L^2 (389). 3. Существование в L^2 замкнутой ортонормированной системы, состоящей из счетного числа элементов (392). 4. Изоморфизм пространств L^2 и l^2 и следствия из него (394).	
§ 3. Абстрактное гильбертово пространство	400
1. Понятие абстрактного гильбертова пространства (400). 2. Эквивалентность понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы в гильбертовом пространстве (402).	
§ 4. Вполне непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	406
1. Понятие линейного непрерывного оператора (406). 2. Понятие сопряженного оператора (408). 3. Понятие вполне непрерывного оператора (412). 4. Существование собственных значений у линейного вполне непрерывного самосопряженного оператора (414). 5. Основные свойства собственных значений и собственных элементов линейного вполне непрерывного самосопряженного оператора (418).	
Г л а в а 12. Основы теории кривых и поверхностей	421
§ 1. Векторные функции	421
1. Понятие векторной функции (421). 2. Предельное значение векторной функции. Непрерывность (422). 3. Производная векторной функции (423). 4. Дифференцируемость векторной функции (426). 5. Формула Тейлора для векторных функций (427). 6. Интегралы от векторных функций (428).	
§ 2. Некоторые сведения из теории кривых	429
1. Регулярные кривые (429). 2. Касательная к кривой (429). 3. Соприкасающаяся плоскость кривой (430). 4. Кривизна кривой (432). 5. Кручение кривой (434). 6. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой (436).	
§ 3. Некоторые сведения из теории поверхностей	438
1. Первая квадратичная форма поверхности. Измерения на поверхности (438). 2. Вторая квадратичная форма поверхности (441). 3. Классификация точек регулярной поверхности (441). 4. Кривизна кривой на поверхности (444). 5. Специальные линии на поверхности (445). 6. Формула Эйлера. Средняя и гауссова кривизна поверхности. Теорема Гаусса (449).	
П р и л о ж е н и е. О вычислении значений функции по приближенно заданным коэффициентам Фурье	452
1. Задача о суммировании тригонометрического ряда Фурье с приближенно заданными коэффициентами Фурье (452). 2. Метод регуляризации для задачи о суммировании тригонометрического ряда Фурье (454). 3. Заключительные замечания о значении метода регуляризации (459).	
Алфавитный указатель	460